

**9. Übungsblatt zur Numerik I (Bonusblatt)**  
**Abgabe: Dienstag, 24.06.2008, vor der Klausur**

**Aufgabe 33:** *Newton-Cotes-Formeln*

Berechnen Sie  $I(f) = \int_0^1 \frac{1}{x+1} dx$  exakt und dann näherungsweise mit folgenden Quadraturformeln:

- i) Rechteckregel     $Q(f) = (b-a)f(a)$
- ii) Trapezregel     $Q(f) = \frac{b-a}{2}(f(a) + f(b))$
- iii) Simpson-Regel     $Q(f) = \frac{b-a}{6} \left( f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right)$

Vergleichen Sie jeweils den tatsächlichen absoluten Fehler  $|I(f) - Q(f)|$  mit den theoretischen Fehlerabschätzungen aus der Vorlesung. (je 2)

**Programmieraufgabe 34:** *Zusammengesetzte Quadraturformeln*

- i) Implementieren Sie die zusammengesetzte Trapezregel aus Beispiel 7.5.1 der Vorlesung.
- ii) Implementieren Sie die zusammengesetzte Simpson-Regel aus Beispiel 7.5.3 der Vorlesung.
- iii) Approximieren Sie das Integral  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin(x)} = 2(\sqrt{2} - 1)$  mit den Schrittweiten  $h := \frac{\pi}{4}, \frac{h}{2}, \frac{h}{4}, \dots, \frac{h}{256}$  und geben Sie jeweils den Fehler aus. Weisen Sie durch ein geeignetes Experiment nach, dass der Quadraturfehler im Falle der zusammengesetzten Trapezregel von der Ordnung  $\mathcal{O}(h^2)$  und bei der zusammengesetzten Simpson-Regel von der Ordnung  $\mathcal{O}(h^4)$  ist. (je 4)

**Bitte wenden!**

### Aufgabe 35:

i) Lösen Sie das folgende lineare Gleichungssystem  $Ax = b$  mit

$$A = \begin{pmatrix} 16 & 6 & 5 \\ 8 & 8 & 7 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 27 \\ 33 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie dazu eine  $LR$ -Zerlegung der Matrix  $A$  mit Hilfe des Gauss-Algorithmus.

ii) Lösen Sie zusätzlich das Gleichungssystem  $A\tilde{x} = \tilde{b}$  mit  $A$  aus Teil i) und

$$\tilde{b} = \begin{pmatrix} 48 \\ 38 \\ 11 \end{pmatrix}.$$

(4+2)

### Aufgabe 36:

Bestimmen Sie zu der Wertetabelle

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} t_i & -2 & 0 & 1 & 5 \\ \hline y_i & -2 & -1 & 0 & 1 \end{array}$$

eine Ausgleichsgerade  $g(t) = a + tb$  derart, dass der quadratische Fehler  $\sum_{i=1}^4 (y_i - g(t_i))^2$  minimiert wird. Verwenden Sie dazu eine  $QR$ -Zerlegung (Householder-Verfahren). (4)

### Aufgabe 37:

Zeigen Sie, dass die Fixpunktiteration

$$x^{(k+1)} := \cos(x^{(k)}), \quad k = 0, 1, \dots,$$

für alle Startwerte  $x^{(0)} \in \mathbb{R}$  gegen den eindeutig bestimmten Fixpunkt  $z = \cos(z)$  konvergiert. (3)

### Organisatorisches:

- **Klausurtermin: Dienstag, 24.06.2008, 11.00 Uhr, HG 116, Hörsaalgebäude. Dauer: 150 Minuten, ohne Hilfsmittel.**
- **Bitte halten Sie während der Klausur Ihren Studien- und Personalausweis bereit.**
- **Klausurrelevanter Stoff: bis einschließlich Kapitel 7.3**