Universität Marburg **Sommer-Semester 2009**
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. B. Schmitt, M. Werner

Übungen zur Numerik I
1. Aufgabenblatt

Aufgabe 1 Bei der Interpolation mit Polynomen kann man außer Funktionswerten auch Ableitungswerte vorgeben. Allerdings können bei Verwendung beliebiger Interpolationsbedingungen Probleme auftreten. Versuchen Sie daher, aus dem Ansatz $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$ die Interpolationspolynome zu den folgenden Daten zu bestimmen: (3)

a) $p(0) = 1, \quad p'(0) = 1, \quad p'(1) = 2, \quad p(2) = 1.$
b) $p(-1) = 1, \quad p'(-1) = 1, \quad p'(1) = 2, \quad p(2) = 1.$
c) $p(-1) = 1, \quad p'(-1) = -6, \quad p'(1) = 2, \quad p(2) = 1.$

Aufgabe 2 Zu paarweise verschiedenen Stützstellen $x_0, ..., x_n$ seien $L_i(x)$, $i = 0, \dots, n$, die Lagrange-Polynome. Damit werden definiert (3)

$$H_i(x) := \Big(1 - 2(x - x_i)L_i'(x_i)\Big) L_i^2(x), \qquad G_i(x) := (x - x_i)L_i^2(x).$$

Zeigen Sie, dass dann

$$p(x) := \sum_{i=0}^{n} y_i H_i(x) \; + \; \sum_{i=0}^{n} z_i G_i(x)$$

ein Polynom vom Grad höchstens $2n + 1$ ist, das folgende Interpolationsbedingungen erfüllt

$$p(x_k) = y_k, \quad p'(x_k) = z_k, \quad k = 0, \dots, n.$$

Aufgabe 3 Die Funktion $f(x) := (e^x - 1)/x$ besitzt bei $x = 0$ einen wohldefinierten Grenzwert, kann allerdings in (einer Umgebung von) $x = 0$ numerisch nicht ausgewertet werden. Als Ersatz kann man den Wert $p_n(0)$ des Interpolationspolynomes verwenden, der dazu mit dem Neville-Algorithmus ausgewertet wird. (3)

a) Bei $x = 0$, $x_i \neq 0 \forall i$, vereinfacht sich der Rekursionschritt, formen Sie diesen um in die Gestalt

$$p_{ik}(0) = p_{i,k-1}(0) + \dots, \quad 0 \le i < i + k \le n.$$

b) Wenden Sie den Neville-Algorithmus an mit $n = 3$ und den Punkten $\{x_i\} = \{-\frac{1}{8}, \frac{1}{8}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\}$.

Abgabe: Freitag, 24.04.09, vor der Vorlesung