Universität Marburg **Sommer-Semester 2009**
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. B. Schmitt, M. Werner

Übungen zur Numerik I
2. Aufgabenblatt

Aufgabe 4 a) Geben Sie das Newton-Interpolationspolynom zu den Datenpaaren (4)

$i =$	0	1	2	3
$x_i =$	-3	-1	0	4
$y_i =$	9	0	3	-5

an. Berechnen Sie daraus die Standardform $p(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$.

b) Geben Sie die Newton-Darstellung des kubischen Hermite-Interpolationsolynoms zu den Daten

$$f(0) = 1, \quad f'(0) = 1, \quad f(1) = 0, \quad f'(1) = 1$$

an.

Aufgabe 5 Die k-te dividierte Differenz einer Funktion $f \in C^k[a,b]$ kann für beliebige Stützstellen $x_j \in [a,b]$ (d.h. auch für $x_i = x_j,\ i \neq j$) explizit angegeben werden durch (4)

$$f[x_0, \ldots, x_k] = \int_0^1 \int_0^{t_1} \cdots \int_0^{t_{k-1}} f^{(k)}\Big(x_0 + t_1(x_1 - x_0) + \ldots + t_k(x_k - x_{k-1})\Big) dt_k \ldots dt_2\, dt_1.$$

a) Zeigen Sie damit direkt die Aussage

$$f[x_0, \ldots, x_k] = \frac{1}{k!} f^{(k)}(\xi), \quad \min_{j=0}^{k} x_j \leq \xi \leq \max_{j=0}^{k} x_j.$$

b) Werten Sie das Integral für $k = 2$ unter der Voraussetzung $x_0 = x_1 \neq x_2$ aus.

Aufgabe 6 Eine Funktion $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ sei mit der Schrittweite $h = \frac{1}{100}$ tabelliert in Stützstellen $x_j = jh$, j ganzzahlig. Zur Bestimmung von $f(\hat{x})$, $\hat{x} \in [x_m, x_{m+1}]$, soll das Interpolationspolynom $p_{2k+1}(\hat{x})$ zu den symmetrisch dazu liegenden Punkten (3)

$$x_{m-k},\ x_{m-k+1},\ \ldots,\ x_{m+k+1}$$

verwendet werden. Geben Sie eine gute Schranke für den Interpolationsfehler $|p_{2k+1}(\hat{x}) - f(\hat{x})|$ an und leiten Sie für den speziellen Fall $f(x) := \cos x$ daraus ab, für welches k jeweils ein Fehler unterhalb der Toleranzen $10^{-4}, 10^{-7}, 10^{-10}$ garantiert werden kann.

Bitte wenden!

Aufgabe 7 Die Folge der Tschebyscheff-Polynome $T_n(x) = t_n$ erfüllt bekanntlich die Rekursion (3)

$$t_{n+1} = 2x\, t_n - t_{n-1}, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Zeigen Sie für festes $x \in (-1, 1)$

a) ausgehend von dem Ansatz $t_n = z^n,\ z \in \mathbb{C}$, dass jede Folge (t_n), die diese Rekursion erfüllt, die Gestalt $t_n = a_1 z_1^n + a_2 z_2^n$, $n \in \mathbb{N}_0$, hat mit festen $a_1, a_2, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$,

b) die explizite Darstellung

$$T_n(x) = \frac{1}{2}\Big[(x + \sqrt{x^2 - 1})^n + (x - \sqrt{x^2 - 1})^n\Big],\ n \in \mathbb{N}_0.$$

Aufgabe 8 Erstellen Sie ein Programm in Java (oder Octave), das die Newton-Interpolation für einen gegebenen Polynomgrad durchführt. Dazu sind Unterprogramme (4*)

- `static void divdiff(int n,double[] x,double[] a)` und
- `static double horner(int n,double z,double[] x,double[] a)`

zu schreiben, welche zunächst die dividierten Differenzen im Feld `a` berechnen und dann die Auswertung des Polynomwerts $p_n(z)$ mit dem Hornerschema durchführen. Die Datenwerte y werden beim Aufruf von `divdiff` in `a` übergeben. Als Test soll das Programm damit die Interpolation der Funktion $f(x) = 1/(1 + 5x^2)$ mit den Stützstellen $x_i = 2i/n - 1$, $i = 0, \ldots, n$ für $n = 28$ durchführen. Geben Sie den Fehler $f(z_j) - p_n(z_j)$ in $z_j = j/21 - 1$, $j = 0, \ldots, 42$ aus.

Abgabe: Freitag, 08.05.09, vor der Vorlesung.
Bitte senden Sie das zu Aufgabe 8 erstellte Programm per E-Mail an Ihren Tutor und geben Sie einen Ausdruck zusammen mit den theoretischen Aufgaben ab.