

Übungen zur NUMERIK I
4. Aufgabenblatt

Aufgabe 13 Zeigen Sie, dass der Wert des Bernsteinpolynoms (3)

$$p_k(x) = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \left(\frac{x}{h}\right)^j \left(1 - \frac{x}{h}\right)^{k-j} b_j$$

an der Stelle x durch wiederholte lineare Interpolation bestimmt werden kann. Mit $b_{0j} := b_j$, $j = 0, \dots, k$, und $y := x/h$ gilt $p_k(x) = b_{k0}$ am Ende der Rekursion

$$b_{mj} := (1 - y)b_{m-1,j} + yb_{m-1,j+1}, \quad j = 0, \dots, k - m, \quad m = 1, \dots, k.$$

Aufgabe 14 Bei gegebenen Koeffizienten a_i , $i = -1, \dots, n + 1$, auf einem äquidistanten (3) erweiterten Gitter ist nach (2.2.16) der Wert des Splines $s(x) = \sum_{i=-1}^{n+1} a_i B_i(x)$ im Punkt $x \in (x_j, x_{j+1}]$ tatsächlich gegeben durch $s(x) = \sum_{i=j-1}^{j+2} a_i \hat{B}(x - x_i)$.

Zeigen Sie mit (2.2.15) und $\xi := \frac{x-x_j}{h}$, dass diese Darstellung übereinstimmt mit $s(x) = A_0 + A_1\xi + A_2\xi^2 + A_3\xi^3$, wobei gilt

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{6}(a_{j-1} + 4a_j + a_{j+1}), & A_1 &= \frac{1}{2}(a_{j+1} - a_{j-1}), \\ A_2 &= \frac{1}{2}(a_{j-1} - 2a_j + a_{j+1}), & A_3 &= \frac{1}{6}(a_{j+2} - 3a_{j+1} + 3a_j - a_{j-1}). \end{aligned}$$

Aufgabe 15 Bei Messungen werden meist nicht Funktionswerte $f(x_i)$ einer Funktion f er- (3) mittelt, sondern lokale Mittelwerte der Form

$$a_i(f) = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x)w_i(x) dx, \quad w_i(x) \geq 0.$$

Mit diesen Funktionalen wird die lokale Spline-Approximation $s(x) := \sum_{i=-1}^{n+1} a_i(f)B_i(x)$ gebildet mit den B-Splines B_i vom Grad 3 auf einem äquidistanten, erweiterten Gitter.

a) Geben Sie eine hinreichende Bedingung an die Gewichtsfunktionen w_i dafür an, dass im Intervall $[x_0, x_n]$ konstante Funktionen exakt reproduziert werden.

b) Zeigen Sie, dass unter dieser Bedingung für Funktionen $f \in C^1([x_{-2}, x_{n+2}])$ gilt

$$|f(x) - s(x)| \leq ch \|f'\|_\infty, \quad x \in [x_0, x_n].$$

Bitte wenden!

Aufgabe 16 a) Bestimmen Sie jeweils die normalisierte Dezimaldarstellung ($B = 10$) der (2) folgenden Dualzahlen

$$(1101.1)_2, \quad (10.\overline{110})_2.$$

b) Berechnen Sie jeweils für $B = 10$, $l = 4$ bei üblicher Rundung:

$$(98.76 \tilde{*} 98.76) \tilde{-} (98.66 \tilde{*} 98.66)$$

$$(98.76 \tilde{+} 98.66) \tilde{*} (98.76 \tilde{-} 98.66).$$

Welche der beiden Alternativen liefert das genauere Ergebnis und warum?

Abgabe: Freitag, 22.05.09, vor der Vorlesung.