

Übungen zur NUMERIK I
5. Aufgabenblatt

Aufgabe 17 Die Differenz von zwei Quadraten kann auf die beiden Weisen $a \cdot a - b \cdot b = (a + b)(a - b)$, $a, b \in \mathbb{R}$, ausgewertet werden, welche jeweils drei Operationen erfordern. (4)

a) Bestimmen Sie für beide Varianten der Formel die zu erwartenden Rundungsfehler bei exakter Eingabe $a, b \in M$, wobei Produkte der Größenordnung \mathcal{E}^2 vernachlässigt werden.

b) Vergleichen Sie Ihre Ergebnisse aus a) mit den in Aufgabe 16 b) tatsächlich aufgetretenen Rundungsfehlern.

Aufgabe 18 Die Größe $b \in \mathbb{R}$ sei eine Konstante. Berechnen Sie für die Funktion (2)

$$F(x_1, x_2) = \frac{1}{1 + x_1 e^{bx_2}}$$

die Konditionszahlen κ_1, κ_2 und bestimmen Sie für $b = 1$ deren Wert an den Stellen $(x_1, x_2) = (150, 5)$ und $(x_1, x_2) = (-150, -5)$.

Aufgabe 19 Für $x \in \mathbb{R}$ werde die quadratische Gleichung $xz^2 + 2z - x = 0$ betrachtet. (4)
Die Lösungsformel für diejenige Lösung, welche für $x \rightarrow 0$ beschränkt bleibt, ist $z = F(x) := \frac{1}{x}(\sqrt{1 + x^2} - 1)$.

a) Die Formel für F besteht aus 5 Operationen einschließlich der Wurzelbildung. Setzen Sie entsprechend die Funktion $F = \phi_5 \circ \phi_4 \circ \phi_3 \circ \phi_2 \circ \phi_1$ aus elementaren Abbildungen ϕ_k zusammen mit $\phi_2, \phi_3, \phi_4 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$.

b) Der bei numerischer Auswertung in Abbildung ϕ_2 eingeschleppte Fehler wird mit der Restabbildung $\psi := \phi_5 \circ \phi_4 \circ \phi_3$ auf den Endfehler übertragen. Berechnen Sie zu $z = \psi(y)$, $y = \phi_2(\phi_1(x))$ die Konditionszahlen κ_{y_i} für $x \rightarrow 0$.

c) Geben Sie eine bei $x \cong 0$ günstigere Darstellung für F an.

Abgabe: Freitag, 29.05.09, vor der Vorlesung.