Universität Marburg **Sommer-Semester 2009**
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. B. Schmitt, M. Werner

Übungen zur Numerik I
6. Aufgabenblatt

Aufgabe 20 Mit Vektoren $u, v \in \mathbb{R}^n$ der Euklidnorm eins und $t \in \mathbb{R}$ wird die Matrix $A = I - tuv^\mathsf{T}$ betrachtet. (3)

a) Für $v^\mathsf{T} u \neq 0$ ist t jeweils so zu bestimmen, daß A eine Involution ($A^2 = I$) bzw. ein Projektor ($A^2 = A$) wird. Wie sehen im zweiten Fall Kern und Bildraum aus?

b) Zeigen Sie, daß für $v^\mathsf{T} u = 0$ gilt $Kern(A) = \{0\}\ \forall t \in \mathbb{R}$ und $\|A^k\| \to \infty\ (k \to \infty)\ \forall t \neq 0$.

Aufgabe 21 Die Matrixnormen (2)

$$\|A\|_1 = \max_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|, \quad \|A\|_\infty = \max_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

sind verträglich mit den entsprechenden Vektornormen, $\|Ax\|_p \le \|A\|_p \|x\|_p$, $p \in \{1, \infty\}$. Beweisen Sie, dass sie auch die induzierten Normen sind, indem Sie für beide Normen zu einer gegebenen Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ jeweils einen Vektor $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ konstruieren, für den gilt $\|A\hat{x}\|_p = \|A\|_p \|\hat{x}\|_p$.

Aufgabe 22 Der Satz von Neumann soll so modifiziert werden, dass er auch Schranken für die Inverse einer geänderten regulären Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ liefert. (3)

a) Es sei $\|\cdot\|$ zunächst eine allgemeine Matrix-Norm. Zeigen Sie, dass die Matrix $A + C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ regulär ist unter einer der Voraussetzungen $\|A^{-1}C\| < 1$ oder $\|CA^{-1}\| < 1$ und geben Sie in beiden Fällen eine Schranke für $\|(A + C)^{-1}\|$ an.

b) Bei der Matrix $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sei $A := \operatorname{diag}(m_{ii})$ die Diagonale von M und $C := M - A$ der Rest. Zeigen Sie, dass die Bedingung $\|A^{-1}C\|_\infty < 1$ mit der Zeilensummennorm äquivalent ist zu der Bedingung

$$|m_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |m_{ij}|, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Aufgabe 23 Der Rechen- und Speicher-Aufwand bei der Gauß-Elimination läßt sich erheblich reduzieren, wenn die Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ Bandgestalt hat, d.h. wenn Elemente in einem bestimmten Abstand von der Hauptdiagonale null sind, etwa (5)

$$a_{ij} = 0 \quad \text{für} \quad |i - j| > 2.$$

In diesem speziellen Fall besitzt A nur 5 nichttriviale Diagonalen und diese Gestalt wird durch den Gauß-Algorithmus ohne Pivotisierung nicht geändert. Schreiben Sie ein Java-Unterprogramm

- `static boolean bandgauss(int n,double[][] a,double[] x)`

das den Gauß-Algorithmus für ein LGS $Ax = b$ mit einer 5-Bandmatrix A ohne Pivotisierung durchführt. Das boolesche Ergebnis des Aufrufs ist nur wahr, wenn kein Pivotelement null war. Die Matrix A ist dabei in einem Feld MAT vom Typ

double[n,5]

zu speichern mit der Zuordnung a_{ij}=MAT[i][$j-i+2$], dabei wird also z.B. das Element MAT[0][0] nicht genutzt. Im Verfahren ist die Matrix A im Feld MAT durch die LR-Zerlegung zu überschreiben. Auch die rechte Seite b wird im Feld x an das Programm übergeben und durch die Lösung x ersetzt. Testen Sie das Programm mit der 5-diagonal-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & & & & \\ 2 & 5 & 4 & 1 & & & \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & & \\ & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

und rechter Seite $b = (1, 3, 4, 4, 4, \ldots)^T$, $n = 10$, und drucken Sie die LR-Zerlegung und die Lösung x aus.

Abgabe: Freitag, 05.06.09, vor der Vorlesung,
Programmieraufgabe 23 eine Woche später.