Universität Marburg **Sommer-Semester 2009**
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. B. Schmitt, M. Werner

Übungen zur Numerik I
7. Aufgabenblatt

Aufgabe 24 Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit (2)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie die LR-Zerlegung von A mit Spaltenpivotisierung (absolutes Maximum). Geben Sie L, R sowie die Permutationsmatrix P an, so dass gilt $A = PLR$.

b) Lösen Sie das Gleichungssystem $Ax = b$ mit Hilfe der in a) berechneten LR-Zerlegung.

Aufgabe 25 Gegeben sei die symmetrische, reelle Tridiagonalmatrix (4)

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & -b_2 & & & \\ -b_2 & a_2 & -b_3 & & \\ & -b_3 & a_3 & -b_4 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & -b_n & a_n \end{pmatrix},$$

mit $a_i, b_i \geq 0$, $i = 1, \dots, n$ $(b_1 := 0, b_{n+1} := 0)$.

a) Es gelte $a_i - b_i - b_{i+1} \geq d > 0$, $i = 1, \dots, n$. Zeigen Sie, dass A dann positiv definit ist mit $x^\mathsf{T} Ax \geq d\|x\|_2^2 \, \forall x \in \mathbb{R}^n$.

b) Für ein $t > 0$ gelte $a_1 \geq t$ und $ta_i - b_i^2 - t^2 \geq 0$, $i = 2, \dots, n$. Formulieren Sie den Gauß-Algorithmus zur Zerlegung $A = LR$ und zeigen Sie, dass für die Pivotelemente gilt $r_{ii} \geq t, i = 1, \dots, n$.

c) Bestimmen Sie unter den Voraussetzungen aus b) den Rechenaufwand zur Durchführung des Gauß-Algorithmus beim System $Ax = y$.

Bitte wenden!

Aufgabe 26 Zu $n \in \mathbb{N}$ und $a > 0$ wird folgende Tridiagonalmatrix betrachtet (3)

$$A = \begin{pmatrix} a & -1 & & & \\ -a & a+1 & -1 & & \\ & -a & a+1 & -1 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & -a & a+1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

a) Konstruieren Sie die LR-Zerlegung der Matrix A.

b) Berechnen Sie L^{-1}.

c) Berechnen Sie für $a = 1$ mit b) die Inverse A^{-1}.

Abgabe: Freitag, 12.06.09, vor der Vorlesung