Universität Marburg **Sommer-Semester 2009**
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. B. Schmitt, M. Werner

Übungen zur Numerik I
9. Aufgabenblatt

Aufgabe 30 Für Einzel- und Gesamtschrittverfahren sind bei der Matrix (3)

$$A = A(\alpha) := \begin{pmatrix} 1 & \alpha & -\alpha \\ 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \alpha & 1 \end{pmatrix}$$

jeweils diejenigen Parameterwerte $\alpha \in \mathbb{R}$ gesucht, für die das Verfahren konvergiert. Konstruieren Sie damit ein Beispiel für jeden der beiden folgenden Fälle:

a) das Einzelschrittverfahren konvergiert, das Gesamtschrittverfahren divergiert i.a.

b) das Gesamtschrittverfahren konvergiert, das Einzelschrittverfahren divergiert i.a..

Aufgabe 31 Es sei $M = \mathbb{R}^{m\times m}$ versehen mit einer festen Matrixnorm $\|\cdot\|$. Mit der Matrix (3) $B \in M$ wird folgende Abbildung definiert:

$$L : \begin{cases} M & \rightarrow & M, \\ X & \mapsto & L(X) := BX + XB. \end{cases}$$

a) Zeigen Sie, dass L eine lineare Abbildung ist mit $\|L(X)\| \leq 2\|B\|\|X\| \ \forall X \in M$.

b) Mit $C \in M$ wird die affine Abbildung $G(X) := L(X) + C$ betrachtet. Zeigen Sie, dass diese Abbildung für $\|B\| < \frac{1}{2}$ kontrahierend ist und daher eine eindeutige Lösung $Z \in M$ der Gleichung $X = G(X)$ existiert.

c) Zeigen Sie für diese Lösung die Schranke

$$\|Z\| \leq \frac{\|C\|}{1 - 2\|B\|}.$$

Bitte wenden!

Aufgabe 32 Gegeben sei das Gleichungssystem $Ax = b$ mit $b \in \mathbb{R}^3$ und (3)

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -6 & 3 \\ -4 & 4 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Geben Sie die Iterationsmatrix $B(\omega) = (1-\omega)I + \omega B_G$ zu der Iteration an, die man durch zusätzliche Relaxation beim Gesamtschrittverfahren erhält.

b) Bestimmen Sie die Eigenwerte von $B(\omega)$ und den optimalen Relaxationsparameter $\hat{\omega}$, der $\rho(B(\omega))$ minimiert. Welchen Wert hat $\rho(B(\hat{\omega}))$?

Aufgabe 33 Die praktische Durchführung des Einzelschrittverfahrens ist sehr einfach, da die einzelne Komponente $x_i^{(k)}$ des letzten Iterationsvektors sofort durch den neuen Wert $x_i^{(k+1)}$ überschrieben werden kann. Die Anweisung für einen Schritt beim System $Ax = b$ lautet daher (4*)

$$x_i := \frac{1}{a_{ii}}\Big(b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} a_{ij}x_j\Big), \quad i \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Im Unterschied zum Gesamtschrittverfahren hängt daher aber das Ergebnis auch von der Nummerierung bzw. der Reihenfolge beim Indexdurchlauf $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ ab, die in der Vorlesung verwendete Abfolge $i = 1, 2, \dots, n$ ist nur die naheliegendste.

Programmieren Sie das Einzelschrittverfahren für das LGS mit $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $n = 16$, und

$$\begin{array}{r|cccccc} a_{ij} = & -1 & -1 & 6 & -2 & -2 & 0 \\ \hline \text{für } j = & i-8 & i-1 & i & i+1 & i+8 & \text{sonst} \end{array}, \quad \text{sowie } b = \mathbb{1},$$

einmal für die Indexreihenfolge $i = 1, 2, \dots, n$ und dann für $i = n, n-1, \dots, 1$. Führen Sie jeweils mit $x^{(0)} := 0$ soviele Schritte durch bis für die Änderungen gilt $\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|_\infty \le 10^{-6}$. Vergleichen Sie die Anzahl der Schritte für beide Varianten.

Abgabe: Freitag, 26.06.09, vor der Vorlesung,
Programmieraufgabe 33 eine Woche später