

3. Übungsblatt zur Wavelet-Analyse II

Aufgabe 5: Prä-Wavelets mittels Box-Splines

Wir wollen das Courant finite Element, also den Box-Spline $B(\cdot|X) := B(\cdot | \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix})$ als Generator $\phi(\cdot)$ benutzen. Dann gilt

$$B(\cdot|X) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} a_k B(2 \cdot -k|X)$$

mit

$$a(z) = 1 + (z_1 + z_1^{-1} + z_2 + z_2^{-1} + z_1 z_2 + z_1^{-1} z_2^{-1})/2,$$

vergleiche Satz 3.1.8 der Vorlesung. Wegen $M = 2I$ wählen wir $R = E = \{(0, 0), (1, 0), (0, 1), (1, 1)\}$.

- i) Berechne die Untersymbole $a_e(z)$, $e \in E$.
- ii) Man gebe eine einfache Ergänzung der Zeile $(a_{e_0}(z), \dots, a_{e_3}(z))$ an. (*Hinweis:* Man verwende Einheitsvektoren!)
- iii) Untersuche die folgende (vereinfachte) Gram-Schmidt-Orthogonalisierung. Setze:

$$\psi_e := \phi_e *' c - \phi *' b_e, \quad e \in E \setminus \{0\},$$

mit

$$c(z) = [\phi, \phi](z), \quad b_e(z) = [\phi_e, \phi](z),$$

und zeige

$$V_1 = V_0 \oplus W_0, \quad V_0 \perp W_0, \quad W_0 = \overline{\text{span}\{\psi_e(\cdot - k_e) | k_e \in \mathbb{Z}^d, e \in E \setminus \{0\}\}}.$$