Philipps-Universität Marburg **Sommersemester 2016**
Fachbereich Mathematik und Informatik
Prof. Dr. S. Dahlke, F. Eckhardt

Übungen zur Vorlesung
ANGEWANDTE FUNKTIONALANALYSIS
1. Aufgabenblatt

Aufgabe 1.1. *(1+2=3 Punkte)*
Betrachten Sie die Menge $X := \{0, 1\}$. Es sei $\tau_X := \{\emptyset, \{1\}, \{0, 1\}\}$.

(i) Zeigen Sie: (X, τ_X) ist ein topologischer Raum.

(ii) Zeigen Sie, dass es keine Metrik $d : X \to [0, \infty)$ gibt, so dass diese die auf X angegebene Topologie erzeugt.

Aufgabe 1.2. *(2+2=4 Punkte)*
Es seien (X, τ_X) und (Y, τ_Y) topologische Räume. Zeigen Sie:

(i) Eine stetige Abbildung $f : X \to Y$ erhält Berührpunkte, d.h. für $\emptyset \neq A \subset X$ gilt: $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$.

(ii) Ist speziell $Y = \mathbb{R}$ und τ_Y die Standardtopologie auf $\mathbb{R}$, so gilt für $f, g : X \to \mathbb{R}$ stetig: Die Menge $A := \{x \in X : f(x) \leq g(x)\}$ ist abgeschlossen.

Aufgabe 1.3. *(2+2=4 Punkte)*
Es sei (X, d) ein metrischer Raum und $\emptyset \neq A \subset X$. Zeigen Sie:

(i) Die Abbildung

$$\begin{aligned} d(\cdot, A) : X &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto d(x, A) := \inf_{y \in A} d(x, y) \end{aligned}$$

ist stetig.

(ii) Ist A abgeschlossen, so gilt $d(x, A) > 0$ für alle $x \notin A$.

Aufgabe 1.4. *(2+1=3 Punkte)*

(i) Es sei (X, d) ein metrischer Raum und $x, x', y, y' \in X$. Beweisen Sie die Vierecksungleichung (vgl. Formel (1.2.2) der Vorlesung):

$$|d(x, y) - d(x', y')| \leq d(x, x') + d(y, y').$$

(ii) Betrachten Sie für $x, y \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} d_1(x, y) &:= \sqrt[m]{|x^{2n-1} - y^{2n-1}|} \quad \text{für } m, n \in \mathbb{N} \text{ beliebig und} \\ d_2(x, y) &:= \sqrt[m]{|x - y|^n} \quad \text{für } n \geq m. \end{aligned}$$

Entscheiden Sie, ob $(\mathbb{R}, d_i)$, $i = 1, 2$, metrische Räume sind.

Abgabe: 28.04.2016 vor der Vorlesung