

Übungen zur Vorlesung
ANGEWANDTE FUNKTIONALANALYSIS
10. Aufgabenblatt

Aufgabe 10.1. (4 Punkte)

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein Gebiet. Zeigen Sie, dass $L_\infty(\Omega)' \not\cong L_1(\Omega)$, indem Sie ein Funktional F auf $L_\infty(\Omega)$ konstruieren, das nicht durch eine $L_1(\Omega)$ -Funktion dargestellt werden kann.

Aufgabe 10.2. (3 Punkte)

Zeigen Sie: Ein Banachraum X ist nicht separabel, wenn er eine nicht separable Teilmenge M enthält.

Aufgabe 10.3. (3 Punkte)

Zeigen Sie:

- (i) $\ell_\infty(\mathbb{N})$ ist nicht separabel.
- (ii) $L_\infty(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein Gebiet, ist nicht separabel.

Aufgabe 10.4. (4 Punkte)

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}$ offen. Zeigen Sie: Falls für $u \in L_{1,\text{loc}}(\Omega)$ gilt

$$\int_{\Omega} u(x) D^1 \phi(x) dx = 0 \quad \text{für alle } \phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega),$$

so ist u fast überall konstant.