Philipps-Universität Marburg **Sommersemester 2016**
Fachbereich Mathematik und Informatik
Prof. Dr. S. Dahlke, F. Eckhardt

Übungen zur Vorlesung
Angewandte Funktionalanalysis
3. Aufgabenblatt

Aufgabe 3.1. *(4 Punkte)*
Es seien X, Y Banachräume und $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ ein isometrischer Isomorphismus. Zeigen Sie, dass dann auch die Abbildung

$$T' : Y' \to X', \quad y' \mapsto y' \circ T$$

ein isometrischer Isomorphismus ist.

Aufgabe 3.2. *(4 Punkte)*
Unter den Bezeichnungen von Aufgabe 3.1. seien X, Y nun Hilberträume. Es seien J_X, J_Y die bijektiven, antilinearen Isometrien aus dem Rieszschen Darstellungssatz. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$T^t : Y \to X, \quad T^t := J_X^{-1} \circ T' \circ J_Y$$

für alle $x \in X$, $y \in Y$

$$\langle Tx, y \rangle_Y = \langle x, T^t y \rangle_X$$

erfüllt.

Aufgabe 3.3. *(4 Punkte)*
Es sei X ein Hilbertraum, $\emptyset \neq A \subset X$ ein abgeschlossener Unterraum von X und $P : X \to A$ die orthogonale Projektion auf A gemäß (2.4.7). Zeigen Sie:

(i) Es gilt $P = P^2$ (*P ist idempotent*) und $\langle Px, y \rangle_X = \langle x, Py \rangle_X$ für alle $x, y \in X$ (*P ist symmetrisch*).

(ii) Es gilt umgekehrt: Eine beschränkte, lineare Abbildung $Q : X \to X$, welche die Bedingungen aus (i) erfüllt, stimmt mit der orthogonalen Projektion auf $B := \operatorname{ran}(Q)$, das Bild von Q, überein.

Aufgabe 3.4. *(3 Punkte)*
Es seien A, B abgeschlossene Unterräume des Hilbertraumes X. Zeigen Sie:

(i) $(A + B)^\perp = A^\perp \cap B^\perp$.

(ii) $(A \cap B)^\perp = A^\perp + B^\perp$.

Abgabe: 12.05.2016 vor der Vorlesung