Philipps-Universität Marburg **Sommersemester 2016**
Fachbereich Mathematik und Informatik
Prof. Dr. S. Dahlke, F. Eckhardt

Übungen zur Vorlesung
Angewandte Funktionalanalysis
4. Aufgabenblatt

Aufgabe 4.1. *(4 Punkte)*
Zeigen Sie, dass für ein beschränktes Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ gilt:

$$\mathcal{C}^0(\bar{\Omega}) = \mathcal{C}(\bar{\Omega}).$$

Geben Sie ein Beispiel dafür, dass jedoch $\mathcal{C}^0(\overline{\mathbb{R}^d}) \neq \mathcal{C}(\overline{\mathbb{R}^d})$ gilt.

Aufgabe 4.2. *(4 Punkte)*
Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Gebiet. Zeigen Sie: Für $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$, ist $\mathcal{C}^m(\bar{\Omega})$ kompakt in $\mathcal{C}^0(\bar{\Omega})$ eingebettet.

Aufgabe 4.3. *(4 Punkte)*
Es sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum und $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge abgeschlossener Teilmengen von X. Zeigen Sie: Wenn $\cup_{k\in\mathbb{N}} A_k$ eine offene Kugel enthält, so gibt es ein k, so dass A_k eine offene Kugel enthält.

Aufgabe 4.4. *(4 Punkte)*
Es sei $b(x, y)$ eine beschränkte Bilinearform auf einem Hilbertraum X, d.h. es existiert eine Konstante $c_b > 0$ mit $|b(x, y)| \leq c_b \cdot \|x\|_X \cdot \|y\|_Y$ für alle $x, y \in X$. Zeigen Sie, dass es zwei eindeutig bestimmte Operatoren S, $T \in \mathcal{L}(X)$ gibt mit

$$b(x, y) = \langle Sx, y\rangle_Y = \langle x, Ty\rangle_X, \quad c_b = \|S\| = \|T\|.$$

Abgabe: 19.05.2016 vor der Vorlesung