Philipps-Universität Marburg **Sommersemester 2016**
Fachbereich Mathematik und Informatik
Prof. Dr. S. Dahlke, F. Eckhardt

Übungen zur Vorlesung
Angewandte Funktionalanalysis
5. Aufgabenblatt

Aufgabe 5.1. *(4 Punkte)*
Es sei V ein Hilbertraum und $T : V \to V$ eine lineare Abbildung mit

$$\langle Tx, y\rangle_V = \langle x, Ty\rangle_V$$

für alle $x, y \in V$. Zeigen Sie, dass T dann stetig ist.

Aufgabe 5.2. *(4 Punkte)*
Es seien X_1, X_2 abgeschlossene Unterräume eines Banachraumes X mit $X_1 \cap X_2 = \{0\}$ und $X = X_1 + X_2$. Zeigen Sie, dass dann eine Konstante $C > 0$ existiert, so dass $C\|x_1 + x_2\|_X \geq \max\{\|x_1\|_X, \|x_2\|_X\}$ für alle $x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2$.

Aufgabe 5.3. *(4 Punkte)*
Es sei X ein nicht-trivialer, normierter Raum über $\mathbb{R}$, d.h., $X \neq \{0\}$. Zeigen Sie, dass X' ebenfalls nicht-trivial ist, indem Sie für beliebiges $x \in X$, $x \neq 0$, die Existenz eines stetigen linearen Funktionals $f_x \in X'$ mit $\|f_x\| = 1$ und $f_x(x) = \|x\|_X$ nachweisen.

Aufgabe 5.4. *(4 Punkte)*
Zeigen Sie folgende Elemente des Beweises von Satz 3.2.1:

(i) Ist $\emptyset \neq A \subset V$, V Banachraum, konvex, so ist auch $\bar{A}$ konvex.

(ii) Ist zudem $T \in \mathcal{L}(V, W)$ mit einem weiteren Banachraum W, so ist $T(A) \subset W$ konvex.

(iii) Die Menge $\overline{T(B_1(0))}$ ist symmetrisch bezüglich 0.

Abgabe: 26.05.2016 per E-Mail an Ihren Tutor