Philipps-Universität Marburg **Sommersemester 2016**
Fachbereich Mathematik und Informatik
Prof. Dr. S. Dahlke, F. Eckhardt

Übungen zur Vorlesung
Angewandte Funktionalanalysis
6. Aufgabenblatt

Aufgabe 6.1. *(4 Punkte)*
Es seien V ein normierter Vektorraum und $A, B \subset V$ konvexe Teilmengen von V mit $\operatorname{int}(A) \neq \emptyset$ und $\operatorname{int}(A) \cap B = \emptyset$. Zeigen Sie: Es existiert ein $F \in V'$, $F \neq 0$, mit $\operatorname{Re}F(x) \leq \operatorname{Re}F(y)$ für alle $x \in A$, $y \in B$.

Aufgabe 6.2. *(4 Punkte)*
Es sei $(V, \{p_i\})$, $i \in I$, der lokalkonvexe topologische Vektorraum gemäß Definition 3.4.1 mit der lokalkonvexen Vektorraumtopologie τ_{lk}.

(i) Zeigen Sie, dass für $I := \mathbb{N}$ durch
$$d(x,y) := \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} \frac{p_i(x-y)}{1+p_i(x-y)}$$
eine Metrik auf V definiert ist, so dass die von d auf V induzierte Topologie mit τ_{lk} übereinstimmt (Man sagt dann: Die lokalkonvexe Vektorraumtopologie ist *metrisierbar*).

(ii) Zeigen Sie die Umkehrung: Ist τ_{lk} metrisierbar, so existiert eine Folge $(p_1, p_2, \dots)$ aus I, die τ_{lk} erzeugt.

Aufgabe 6.3. *(4 Punkte)*
Es sei $c_{00} \subset c_0$ der *Raum der endlichen Nullfolgen*, d.h. für alle $x \in c_{00}$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $x_i = 0$ für alle $i \geq N$. Für eine beliebige Zahlenfolge $a = (a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ sei
$$p_a(x) := \sup_{i \in \mathbb{N}} |a_i x_i|.$$
Zeigen Sie:

(i) Für alle Folgen $a = (a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ ist p_a eine wohldefinierte Halbnorm auf c_{00}.

(ii) $(c_{00}, \{p_a\})$ ist ein lokalkonvexer topologischer Vektorraum.

Aufgabe 6.4. *(4 Punkte)*
Es sei $(V, \{p_i\})$ erneut der lokalkonvexe topologische Vektorraum gemäß Definition 3.4.1 mit der lokalkonvexen Vektorraumtopologie τ_{lk}. Zeigen Sie, dass für $I := \{1, \dots, n\}$ durch
$$\|x\| := \sum_{i=1}^{n} p_i(x)$$
eine Norm auf V definiert ist, so dass die von $\|\cdot\|$ auf V induzierte (Norm-)Topologie mit τ_{lk} übereinstimmt.

Abgabe: 26.05.2016 per E-Mail an Ihren Tutor