

Übungen zur Vorlesung
ANGEWANDTE FUNKTIONALANALYSIS
7. Aufgabenblatt

Aufgabe 7.1. (4 Punkte)

Es sei V ein Banachraum. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$i: \begin{array}{l} V \rightarrow V'' \\ x \mapsto \langle x, \cdot \rangle \end{array}$$

eine lineare Isometrie mit abgeschlossenem Bild in V'' ist. Dabei bezeichnet $\langle x, f \rangle = f(x)$ für $x \in V$ und $f \in V'$ die Dualitätsabbildung aus Definition 3.5.1.

Aufgabe 7.2. (4 Punkte)

Es sei V ein Banachraum.

- (i) Zeigen Sie für eine Folge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset V$ und $x \in V$: $x_k \rightarrow x$ genau dann, wenn $\|x_k\|_V \leq C$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und $f(x_k) \rightarrow f(x)$ für alle $f \in W$ aus einer dichten Teilmenge W von V' .
- (ii) Zeigen Sie im Fall $V := c_0(\mathbb{N})$: $x_k \rightarrow x$ genau dann, wenn $\|x_k\|_{\ell_\infty(\mathbb{N})} \leq C$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und $x_{ki} \rightarrow x_i$ für alle $i \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 7.3. (4 Punkte)

Es seien V, W Banachräume und $T: V \rightarrow W$ linear. Zeigen Sie: $T \in \mathcal{L}(V, W)$ genau dann, wenn T stetig bezüglich der schwachen Topologien von V und W ist.

Aufgabe 7.4. (4 Punkte)

Es sei V ein Hilbertraum. Zeigen Sie:

$$x_k \rightarrow x \iff x_k \rightharpoonup x \text{ und } \|x_k\|_V \rightarrow \|x\|_V.$$