Philipps-Universität Marburg **Sommersemester 2016**
Fachbereich Mathematik und Informatik
Prof. Dr. S. Dahlke, F. Eckhardt

Übungen zur Vorlesung
Angewandte Funktionalanalysis
8. Aufgabenblatt

Aufgabe 8.1. *(4 Punkte)*
Es sei V ein Banachraum. Beweisen oder widerlegen Sie:

(i) Gilt $f_k \to f$ in V' und $x_k \rightharpoonup x$ in V, so folgt $f_k(x_k) \to f(x)$.

(ii) Gilt $f_k \overset{*}{\rightharpoonup} f$ in V' und $x_k \to x$ in V, so folgt $f_k(x_k) \to f(x)$.

(iii) Gilt $f_k \overset{*}{\rightharpoonup} f$ in V' und $x_k \rightharpoonup x$ in V, so folgt $f_k(x_k) \to f(x)$.

Aufgabe 8.2. *(4 Punkte)*
Zeigen Sie, dass der Raum $c_0(\mathbb{N})$ der Nullfolgen nicht vollständig bezüglich der schwachen Topologie ist.

Aufgabe 8.3. *(4 Punkte)*
Es sei V ein Banachraum. Zeigen Sie die Bemerkung zum Satz von Alaoglu/Bourbaki: Die abgeschlossene Einheitskugel $\tilde{B}_1(0)$ in V' ist im Allgemeinen nicht schwach$*$-folgenkompakt.
Hinweis: Betrachen Sie $V := \ell_\infty(\mathbb{N})$.

Aufgabe 8.4. *(4 Punkte)*
Zeigen Sie: Für einen normierten linearen Raum V sind äquivalent:

(i) V ist separabel.

(ii) Es gibt eine abzählbare Menge Z mit $V = \overline{\mathrm{lin}(Z)}$, wobei

$$\mathrm{lin}(Z) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left\{ z = \sum_{i=1}^{n} \mu_i z_i, \mu_i \in \mathbb{K}, z_i \in Z, i = 1, \dots, n \right\}$$

die lineare Hülle von Z bezeichnet.

Abgabe: 16.06.2016 vor der Vorlesung