

Übungen zur Approximationstheorie

– Blatt 1 –

Abgabe: Donnerstag, 02.05.2019, 12:00-12:15 im HS I,

Aufgabe 1.1. (4 Punkte)

Es sei $n \in \mathbb{N}$. Zeige für $f(x) := x$ und $g(x) := x^2$ folgende Eigenschaften der Bernstein-Polynome (vgl. Definition 1.1.4):

$$B_n f(t) = t \quad \text{und} \quad B_n g(t) = \frac{(n-1)t^2 + t}{n}.$$

Aufgabe 1.2. (4 Punkte)

Es seien $M, k, n \in \mathbb{N}$. Zeige:

(i) Für $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ gilt

$$\Delta_h^M f(x) = \sum_{j=0}^M (-1)^{M-j} \binom{M}{j} f(x + jh).$$

(ii) Für $f \in \mathcal{C}([0, 1])$, $x \in [0, 1]$, gilt

$$\frac{\partial^k}{\partial x^k} B_{n+k} f(x) = \frac{(n+k)!}{n!} \sum_{j=0}^n \left(\Delta_{\frac{1}{n+k}}^k f \right) \left(\frac{j}{k+n} \right) \cdot \binom{n}{j} \cdot x^j (1-x)^{n-j}.$$

Aufgabe 1.3. (4 Punkte)

Zeige für $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Formel (1.1.7) der Vorlesung:

$$f \text{ konvex} \implies \Delta_h^2 f \geq 0.$$

Aufgabe 1.4. (mündlich)

Zeige:

(i) Der Ausdruck $V_a^b f$ gemäß (1.1.9) definiert keine Norm auf dem Raum $BV[a, b]$, der Ausdruck $V_a^b f + |f(a)|$ hingegen schon.

(ii) Für $m, \ell \in \mathbb{N}$ gilt

$$\int_0^1 x^m (1-x)^\ell dx = \frac{1}{m+\ell+1} \cdot \frac{1}{\binom{m+\ell}{m}}.$$