Fachbereich Mathematik und Informatik der Philipps-Universität Marburg
Prof. Dr. S. Dahlke, A. Görlich

Sommersemester 2019

Übungen zur Approximationstheorie

– Blatt 2 –

Abgabe: Donnerstag, 09.05.2019, 12:00-12:15 in HS I

Aufgabe 2.1. (4 Punkte)

(i) Zeige für $n \in \mathbb{N}$ folgende Formel für die Differenz zweier Bernstein-Polynome:

$$B_n f(x) - B_{n+1} f(x) = \frac{x(1-x)}{n(n+1)} \sum_{k=0}^{n-1} f\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n+1}, \frac{k+1}{n}\right] \binom{n-1}{k} x^k (1-x)^{n-1-k}.$$

Dabei bezeichnet $f[x_0, \ldots, x_\ell]$ die aus der Numerik I bekannten dividierten Differenzen,

$$\begin{aligned} f[x_0, \ldots, x_\ell] &:= \frac{f[x_1, \ldots, x_\ell] - f[x_0, \ldots, x_{\ell-1}]}{x_\ell - x_0}, \\ f[x_i] &:= f(x_i). \end{aligned}$$

(ii) Folgere, dass für eine konvexe Funktion $f \in \mathcal{C}([0,1])$ gilt:

$$B_n f(x) \geqslant B_{n+1} f(x) \geqslant f(x), \quad x \in (0,1).$$

Aufgabe 2.2. (4 Punkte)
Zeige, dass für das Polynom $S_m(t)$, $m \in \mathbb{N}_0$, gemäß (1.1.6) gilt:

$$S_6(t) = u_3(n) p_6(t),$$

d.h., S_6 ist ein Polynom Grad 3 in n und vom Grad 6 in t.

Aufgabe 2.3. (4 Punkte)
Es sei $d > 1$. Zeige durch Angabe einer geeigneten affinen Transformation $Q \to \tilde{Q}$, $Q = [0,1]^d$, dass Satz 1.3.2 der Vorlesung für allgemeine Quader $\tilde{Q} = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_d, b_d]$ richtig bleibt.

Aufgabe 2.4. (mündlich)
Es sei $d > 1$. Zeige: Ist $f \in \mathcal{C}([0,1]^d)$ durch ein Tensorprodukt gegeben, $f(x) = (f_1 \otimes \ldots \otimes f_d)(x) = f_1(x_1) \cdot \ldots \cdot f_d(x_d)$, so hat auch das zugehörige Bernstein-Polynom Tensorproduktform, $B_n f(x) = (B_n f_1 \otimes \ldots \otimes B_n f_d)(x) = B_n f_1(x_1) \cdot \ldots \cdot B_n f_d(x_d)$.