Fachbereich Mathematik und Informatik
der Philipps-Universität Marburg
Prof. Dr. S. Dahlke, A. Görlich Sommersemester 2019

Übungen zur Approximationstheorie

– Blatt 3 –

Abgabe: Donnerstag, 16.05.2019, 12:00-12:15Uhr in HS I

Aufgabe 3.1. (4 Punkte)
Es sei $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ kompakt und $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine stetige Approximation der Eins. Zeige, dass unter diesen Voraussetzungen die Familie $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ zugeordneter Integraloperatoren mit

$$K_n : \begin{array}{ccc} \mathcal{C}^0(\bar{I}) & \to & \mathcal{C}^0(\bar{I}) \\ f & \mapsto & \int\limits_a^b k_n(x,t) f(t)\, dt \end{array}$$

wohldefiniert ist.

Aufgabe 3.2. (4 Punkte)
Es sei $n \in \mathbb{N}_0$, $F_n(t)$ der Fejer-Kern gemäß (1.5.4) und $f \in \mathcal{C}_\pi$. Zeige, dass für den zugeordneten Integraloperator

$$K_n f(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} F_n(x-t) f(t)\, dt$$

gilt:

$$K_n f(x) = \frac{1}{(n+1)\pi} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (f(x-2t) + f(x+2t)) \frac{\sin^2((n+1)t)}{\sin^2(t)}\, dt.$$

Aufgabe 3.3. (4 Punkte)
Es sei $n \in \mathbb{N}_0$, $F_n(t)$ der Fejer-Kern gemäß (1.5.4), K_n der zugeordnete Integraloperator aus Aufgabe 3.2 und $f \in \mathcal{C}_\pi$ sei Lipschitz-stetig mit Exponent $\alpha \in (0, 1)$ und Lipschitz-Konstante $M > 0$, d.h.,

$$|f(x) - f(y)| \leqslant M|x-y|^\alpha \text{ für alle } x, y \in \mathbb{R}.$$

Zeige folgende Abschätzung für den Approximationsfehler,

$$\|K_n f - f\| \leqslant C(\alpha) \frac{M}{(n+1)^\alpha}.$$

Dabei ist $C(\alpha)$ ein vom Parameter α abhängiger Faktor.

Aufgabe 3.4. (mündlich)

(i) Betrachte den Raum

$$\mathcal{C}_\pi = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} : \text{f stetig, } 2\pi\text{-periodisch}\}$$

mit der Norm $\|f\|_{\mathcal{C}_\pi} = \sup_{x\in[-\pi,\pi]} |f(x)|$. Weise nach, dass $(\mathcal{C}_\pi, \|\cdot\|_{\mathcal{C}_\pi})$ ein Banachraum ist.

- bitte wenden -

(ii) Sei $k : \mathbb{R} \times (0, \infty) \to \mathbb{R}$ mit

$$k(s,t) := \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-s^2/4t}$$

der *Wärmeleitungskern* und für eine beschränkte, stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei für $x \in \mathbb{R}$ und $t > 0$

$$u(t,x) := \int_{\mathbb{R}} f(y) k(x-y,t) dy.$$

Verifiziere, dass $u(t,x)$ die Gleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) = 0 \text{ für } t > 0,\ x \in \mathbb{R}$$

erfüllt.