Fachbereich Mathematik und Informatik
der Philipps-Universität Marburg
Prof. Dr. S. Dahlke, A. Görlich

Sommersemester 2019

Übungen zur Approximationstheorie

– Blatt 4 –

Abgabe: Donnerstag, 23.05.2019, 12:00-12:15 in HS I

Aufgabe 4.1. (4 Punkte)
Beweise die Bemerkung aus dem Beweis von Satz 1.5.17 der Vorlesung. Für $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sin^2(nt) = 2(1+\cos(nt)) \cdot \sin^2\left(\frac{nt}{2}\right).$$

Aufgabe 4.2. (4 Punkte)
Es sei $f \in \mathcal{C}_\pi^1$, d.h., eine stetig differenzierbare, 2π-periodische Funktion. Zeige, dass unter diesen Voraussetzungen die Ableitung des de la Vallée Poussin-Mittels $V_n f$ gemäß (1.5.16) die erste Ableitung von f gleichmäßig approximiert, d.h.

$$\lim_{n\to\infty} \|f' - (V_n f)'\|_{\mathcal{C}_\pi} = 0.$$

Hinweis: Es darf ohne Beweis folgende alternative Darstellung von $V_n f$ benutzt werden,

$$V_n f(x) = \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \cdot \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos^{2n}\left(\frac{t-x}{2}\right) dt.$$

Dabei ist $n!!$ das Produkt aller natürlichen Zahlen, die kleiner oder gleich n sind und mit n gerade oder ungerade sind. Beispielsweise ist $6!! = 2 \cdot 4 \cdot 6$.

Aufgabe 4.3. (4 Punkte)
Es sei $f \in \mathcal{C}_\pi$. Zeige, dass das n-te Fourier-Polynom $S_n f$ gemäß (1.5.12) den L_2-Approximationsfehler unter allen trigonometrischen Polynomen vom Grad n minimiert, d.h.

$$\|f - S_n f\|_{L_2} \leqslant \|f - T\|_{L_2}$$

für jedes trigonometrische Polynom $T \neq S_n f$, $T(x) = \sum_{k=-n}^{n} \alpha_k e^{ikx}$, vom Grad n.
Folgere, dass $(S_n f)_{n\in\mathbb{N}}$ im quadratischen Mittel gegen f konvergiert, d.h.,

$$\lim_{n\to\infty} \|f - S_n f\|_{L_2} = 0.$$

Aufgabe 4.4. (mündlich)
Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f \in \mathcal{C}^0(\bar{I})$, d.h. beschränkt und gleichmäßig stetig. Zeige folgende Eigenschaften des Stetigkeitsmoduls $\omega(f,\delta,I)$ gemäß (2.1.1).

(i) ω ist subadditiv, d.h., $\omega(f,\delta_1+\delta_2,I) \leqslant \omega(f,\delta_1,I) + \omega(f,\delta_2,I)$ für alle $\delta_1,\delta_2 \geqslant 0$.

(ii) ω ist stetig auf $\mathbb{R}_+$.