Fachbereich Mathematik und Informatik
der Philipps-Universität Marburg
Prof. Dr. S. Dahlke, A. Görlich

Sommersemester 2019

Übungen zur Approximationstheorie

– Blatt 5 –

Abgabe: Donnerstag, 06.06.2019, 12:00-12:15 Uhr in HS I

Aufgabe 5.1. (4 Punkte)

(i) Zeige: Das System $\left\{\frac{1}{\pi} j_n\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine periodische Approximation der Eins (vgl. Definition 1.5.1).

(ii) Zeige: Es gilt $j_n(t) \in T_{2n-2}$, d.h., $j_n(t)$ ist ein trigonometrisches Polynom mit Frequenz kleiner gleich $2n-2$.

Aufgabe 5.2. (4 Punkte)
Beweise, dass die Jackson-Ungleichung (2.2.3) auch im Fall $p = \infty$ gilt, d.h. es existiert eine Konstante $C > 0$ mit

$$\|f - J_n f\|_{\mathcal{C}_\pi} \leqslant C \cdot \omega\left(f, \frac{1}{n}\right)_{L_\infty} \qquad \text{für alle } f \in \mathcal{C}_\pi, n \in \mathbb{N}.$$

Aufgabe 5.3. (4 Punkte)
Es sei $p(x)$ ein Polynom mit reellen Koeffizienten vom Grad kleiner gleich n. Zeige, dass für ein endliches Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$ folgendes Analogon zu Korollar 2.3.2 gilt: Für die Ableitung $p'(x)$ gilt im Intervall (a, b) die Abschätzung

$$|p'(x)| \leqslant \frac{n}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} \sup_{x\in[a,b]} |p(x)|.$$

Aufgabe 5.4. (4 Punkte)
Es sei X versehen mit der Norm $\|\cdot\|_{L_1(\Omega)}$ ein Banachraum und $Y \subset X$ ein abgeschlossener Unterraum (mit $\dim(Y) < \infty$). Seien $f \in X$, $g \in Y$ und $B := \{x \in \Omega : f(x) = g(x)\}$. Zeige: Gilt für alle $h \in Y$ die Bedingung

$$\int_\Omega h(x) \cdot \operatorname{sgn}(f(x) - g(x))\, dx \leqslant \int_B |h(x)|\, dx,$$

so ist g die beste Approximation an f aus Y.

Aufgabe 5.5. (4 Punkte)
Es seien $f \in \mathcal{C}_\pi$, $m, n \in \mathbb{N}$ und $0 < \alpha < 1$. Zeige:

$$E_n(f)_{\mathcal{C}_\pi} = \mathcal{O}(n^{-m-\alpha}) \quad \Longrightarrow \quad f \in \mathcal{C}_\pi^m.$$

Aufgabe 5.6. (mündlich)
Gib ein trigonometrisches Polynom $g \in T_n$ an, für das in Abschätzung (2.3.2) Gleichheit gilt, d.h.

$$\sup_{x\in(-\pi,\pi)} |g'(x)| = n \sup_{x\in[-\pi,\pi]} |g(x)|.$$