Fachbereich Mathematik und Informatik
der Philipps-Universität Marburg
Prof. Dr. S. Dahlke, A. Görlich

Sommersemester 2019

Übungen zur Approximationstheorie

– Blatt 6 –

Abgabe: Donnerstag, 13.06.2019, 12:00-12:15 in HS I

Aufgabe 6.1. (4 Punkte)

(i) Es sei X versehen mit der Norm $\|\cdot\|_X$ ein Banachraum und $Y \subset X$ ein abgeschlossener Unterraum mit $\dim(Y) < \infty$. Sei $f \in X$.
Die Norm $\|\cdot\|_X$ sei *strikt konvex*, d.h., für alle $g, h \in X$, $g \neq h$, mit $\|g\|_X = \|h\|_X = 1$ und alle $\alpha, \beta > 0$ mit $\alpha + \beta = 1$ gilt $\|\alpha g + \beta h\|_X < 1$.
Zeige, dass es in diesem Fall genau eine beste Approximation von f durch Y gibt.

(ii) Es sei $\mathcal{C}([-1,1])$ der Raum der stetigen Funktionen über dem Intervall $[-1,1]$. Zeige anhand dieses Beispiels, dass die L_1-Norm nicht strikt konvex ist.

Aufgabe 6.2. (4 Punkte)
Es seien $1 \leqslant p \leqslant \infty$ und $f \in X_p$. Zeige für $r \in \mathbb{N}$ und $\delta > 0$ folgende Eigenschaften der Glattheitsmoduli $\omega_r(f,\delta)_{L_p}$:

(i) $\omega_r(f,\lambda\delta)_{L_p} \leqslant (m+1)^r \omega_r(f,\delta)_{L_p}$ für alle $\lambda > 0$ mit $m < \lambda \leqslant m+1, m \in \mathbb{N}$.

(ii) $\omega_r(f,n\delta)_{L_p} \leqslant n^r \omega_r(f,\delta)_{L_p}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(iii) $\omega_r(f,\delta)_{L_p} \leqslant 2^{r-k} \omega_k(f,\delta)_{L_p}$ für alle $0 \leqslant k \leqslant r$.

Aufgabe 6.3. (4 Punkte)
Es sei $\Psi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ mit supp $\Psi \subset [-1,1]$ und $\Psi(x) = 1$ für $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Betrachte die 2π-periodische Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \Psi(x) x \log(|x|) & , \quad -\pi \leqslant x \leqslant \pi, x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases} .$$

Zeige, dass $f \in B^1_\infty(L_\infty) \setminus \Lambda^1_\infty(L_\infty)$ gilt.

Aufgabe 6.4. (mündlich)
Beweise: Es existieren von f unabhängige Konstanten $c, C > 0$, so dass für die Seminorm $|f|_{B^s_{p\infty}}$ (vgl. Definition 2.5.1) gilt:

$$c \cdot \sup_{k \in \mathbb{N}_0} 2^{ks} \omega(f, 2^{-k})_{L_p} \leqslant |f|_{B^s_{p\infty}} \leqslant C \cdot \sup_{k \in \mathbb{N}_0} 2^{ks} \omega(f, 2^{-k})_{L_p}.$$