Fachbereich Mathematik und Informatik der Philipps-Universität Marburg
Prof. Dr. S. Dahlke, A. Görlich

Sommersemester 2019

Übungen zur Approximationstheorie

– Blatt 7 –

Abgabe: Donnerstag, 27.06.2019, 12:00-12:15 in HS I

Aufgabe 7.1. (4 Punkte)
Es sei $\Psi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ mit supp $\Psi \subset [-1,1]$ und $\Psi(x) = 1$ für $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Betrachte die 2π-periodische Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \Psi(x) x \log(|x|) & , \quad -\pi \leqslant x \leqslant \pi, x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases} .$$

Zeige, dass $f \in B^1_\infty(L_\infty) \setminus \Lambda^1_\infty(L_\infty)$ gilt.

Aufgabe 7.2. (4 Punkte)
Es seien $I := [a,b]$, $|I| < \infty$, und $f \in \mathcal{C}^r(I)$ mit $r \in \mathbb{N}$. Zeige die Abschätzung aus Bemerkung 2.6.2 der Vorlesung:

$$|(\Delta_h^r f)(x)| \leqslant |f^{(r)}(\xi)| \cdot |h|^r, \quad \xi \in (x, x + rh).$$

Aufgabe 7.3. (4 Punkte)
Es seien $r \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $T := [-\pi, \pi]$ und $f \in X_p$. Zeige, dass es eine Konstante $C > 0$ und ein $m \in \mathbb{N}$ gibt, so dass die Abschätzung

$$\omega_r(f,\delta)_{L_p} \leqslant C\delta^r \left(\sum_{j=0}^{m} (2^j\delta)^{-r} \omega_{r+1}(f, 2^j\delta)_{L_p} + \frac{\|f\|_{L_p(T)}}{(2\pi)^r} \right), \quad \delta > 0,$$

gilt.

Aufgabe 7.4. (4 Punkte)

(i) Es sei $(X, \|\cdot\|_X)$ ein Banachraum und $Y \subset X$ ein abgeschlossener Unterraum endlicher Dimension. Zeige: Ist T ein lineares, beschränktes Funktional auf X, das auf Y verschwindet, $T(g) = 0$ für alle $g \in Y$, so gilt die Abschätzung

$$|T(f)| \leqslant \|T\| \cdot E(f, Y, X) \text{ für alle } f \in X.$$

(ii) Betrachte speziell den Fall $X := (\mathcal{C}([-1,1]), \|\cdot\|_\infty)$ und $Y := \Pi_1$. Weise nach, dass für die beste Approximation $E(f, Y, X)$ der Funktion $f(x) := e^x$, $x \in [-1,1]$, gilt:

$$E(f, Y, X) > \frac{1}{4}.$$

Aufgabe 7.5. (mündlich)
Es sei $T_n^g = \{h \in T_n : h \text{ gerade}\}$. Zeige, dass die Funktion $f_k(x) := (\cos(x))^k$ ein trigonometrisches Polynom vom Grad k ist. Folgere, dass $\{1, \cos(x), (\cos(x))^2, \ldots, (\cos(x))^n\}$ eine Basis von T_n^g ist.