Fachbereich Mathematik und Informatik
der Philipps-Universität Marburg
Prof. Dr. S. Dahlke, A. Görlich

Sommersemester 2019

Übungen zur Approximationstheorie

– Blatt 8 –

Abgabe: Donnerstag, 04.07.2019, 12:00-12:15 Uhr in HS I

Aufgabe 8.1. (4 Punkte)
Es sei $(X, \|\cdot\|_X)$ ein Banachraum und $Y \subset X$ ein abgeschlossener Unterraum endlicher Dimension derart, dass für alle $f \in X$ die beste Approximation $E(f, Y, X)$ eindeutig ist. Zeige, dass der „Operator P der besten Approximation"

$$P : f \mapsto Pf := \operatorname{argmin}_{g \in Y} \|f - g\|_X$$

stetig ist, d.h. für jede Folge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset X$ mit $f_k \to f$ folgt $Pf_k \to Pf$.

Aufgabe 8.2. (4 Punkte)
Beweise Bemerkung 4.2.4 der Vorlesung:
Ist H ein Hilbertraum mit Innenprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle_H$ und $H_1 \subset H$ ein abgeschlossener Unterraum, so ist auch das orthogonale Komplement $H_1^\perp = \{x \in H : \langle x, y\rangle_H = 0 \quad \forall y \in H_1\}$ abgeschlossen.

Aufgabe 8.3. (4 Punkte)
Betrachte den Raum $L_2(\mathbb{R})$. Sei $(V_j)_{j\geqslant 0}$ eine Folge von abgeschlossenen Unterräumen mit $V_j \subset V_{j+1}$ für alle $j \geqslant 0$.
Sei $P_j : L_2(\mathbb{R}) \to V_j$ die orthogonale Projektion. Zeige:

$$\overline{\bigcup_{j\geqslant 0} V_j}^{L_2(\mathbb{R})} = L_2(\mathbb{R}) \Longleftrightarrow \lim_{j\to\infty} ||P_j f - f||_{L_2(\mathbb{R})} = 0 \text{ für alle } f \in L_2(\mathbb{R}).$$