Fachbereich Mathematik und Informatik
der Philipps-Universität Marburg
Prof. Dr. S. Dahlke, A. Görlich

Sommersemester 2019

# Übungen zur Approximationstheorie

– Blatt 9 –

Abgabe: Donnerstag, 11.07.2019, 12:00-12:15 in HS I

**Aufgabe 9.1. (4 Punkte)**
Es sei $f \in L_1(\mathbb{R}^d)$. Beweise folgende Eigenschaften der Fourier-Transformierten $Ff$ von $f$.

(i) $F(e^{i(\cdot h)} f(\cdot))(\xi) = Ff(\xi - h)$.

(ii) $F(f(a\cdot))(\xi) = a^{-d} Ff\left(\frac{\xi}{a}\right), a > 0$.

(iii) $F(\lambda f + \mu g) = \lambda Ff + \mu Fg$.

(iv) $F_d(f_1 \otimes \cdots \otimes f_d) = \prod_{j=1}^d F_1 f_j$.

**Aufgabe 9.2. (4 Punkte)**
Betrachte zu $f, g \in L_1(\mathbb{R}^d)$ den Faltungsoperator $*$ gemäß (5.1.12),

$$(f * g)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} f(x-y) g(y)\, dy.$$

Zeige, dass es bezüglich $*$ kein neutrales Element gibt, d.h., es existiert kein $g \in L_1(\mathbb{R}^d)$ mit $g * f = f$ für alle $f \in L_1(\mathbb{R}^d)$.
*Hinweis:* Du darfst ohne Beweis benutzen, dass aus $Ff(\xi) = 0$ für alle $\xi \in \mathbb{R}^d$ folgt, dass $f(x) = 0$ für fast alle $x \in \mathbb{R}^d$.

**Aufgabe 9.3. (4 Punkte)**
Beweise Satz 5.1.6 der Vorlesung: Sei $f \in L_1(\mathbb{R}^d)$.

(i) Sei $x_k f \in L_1(\mathbb{R}^d)$. Dann gilt:

$$\frac{\partial}{\partial \xi_k} Ff(\xi) = F(-i x_k f(x))(\xi)$$

(ii) Sei $\frac{\partial f}{\partial x_k} \in L_1(\mathbb{R}^d)$. Dann gilt:

$$F\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right)(\xi_k) = i\xi_k Ff(\xi)$$

**Aufgabe 9.4. (mündlich)**
Betrachte für $d = 1$ die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gemäß

$$f(x) := \begin{cases} 1 - |x| & , \quad -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 & , \quad \text{sonst} \end{cases}.$$

Zeige, dass $f$ die Fourier-Transformierte einer Funktion $g \in L_1(\mathbb{R})$ ist.