Philipps-Universität Marburg **Sommer-Semester 2019**
Fachbereich Mathematik und Informatik
Prof. Dr. S. Dahlke, L. Sawatzki

Übungen zur Vorlesung
Numerische Behandlung elliptischer partieller Differentialgleichungen
1. Aufgabenblatt

Aufgabe 1.1. *(10 Punkte)*
Beweise Bemerkung 1.2.1 der Vorlesung:

Der Differentialoperator

$$L := \sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{d} a_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} + a(x)$$

ist elliptisch im Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ genau dann, wenn

$$\sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq c(x) \|\xi\|_2^2 \qquad \text{mit } c(x) > 0 \text{ für alle } x \in \Omega, \xi \in \mathbb{R}^d.$$

Aufgabe 1.2. *(3+3+4=10 Punkte)*
Beweise Lemma 1.2.4 der Vorlesung:

Seien $\mathbf{A}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{d \times d}$, $\mathrm{Tr}(\mathbf{A}) := \sum_{i=1}^{d} a_{ii}$. Zeige:

(i) $a_{ii} \geq 0$ und $\mathrm{Tr}(\mathbf{A}) \geq 0$, falls $\mathbf{A}$ positiv semidefinit.

(ii) $\mathrm{Tr}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \mathrm{Tr}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}) = \sum_{i,j=1}^{d} a_{ij} b_{ji}$.

(iii) $\mathrm{Tr}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \geq 0$, falls $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ positiv semidefinit und symmetrisch.

Aufgabe 1.3. *(6+6=12 Punkte)*

(i) Betrachte den Lebesgue-Raum $L_p(\Omega)$ über einer beliebigen Menge $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$. Dazu sei

$$\|f\|_{L_p(\Omega)} := \begin{cases} \left(\int_\Omega |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p}, & 1 \leq p < \infty, \\ \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} |f(x)|, & p = \infty, \end{cases}$$

sowie

$$\mathcal{L}_p(\Omega) := \{ f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}} \text{ messbar} : \|f\|_{L_p(\Omega)} < \infty \}.$$

Wir definieren jetzt eine Äquivalenzrelation für messbar Funktionen durch

$$f \sim g :\Longleftrightarrow f - g = 0 \text{ f.ü.}$$

Damit ist der Lebesgue-Raum definiert durch

$$L_p(\Omega) := \mathcal{L}_p(\Omega)/\sim .$$

Zeige, dass $L_p(\Omega)$ für alle $1 \le p \le \infty$ ein Banachraum ist, d.h. $\|\cdot\|_{L_p}$ ist eine Norm, die Elemente in $L_p(\Omega)$ sind wohldefiniert und der Raum ist linear und vollständig. Warum ist $\mathcal{L}_p(\Omega)$ keine Banachraum?

(ii) Betrachte den Raum der k-mal stetig differenzierbaren Funktionen $C^k(\overline{\Omega})$ versehen mit der Norm

$$\|f\|_{C^k(\overline{\Omega})} := \sum_{|\alpha|\le k} \|D^\alpha f\|_\infty$$

und zeige, dass dies ein Banachraum ist.

Aufgabe 1.4. *(2+2+2+2=8 Punkte)*
Klassifiziere die folgenden partiellen Differentialgleichungen und ihre Bedingungen:

(i) Die Diffusionsgleichung

$$\begin{aligned} f_{xx}(x,t) &= f_t(x,t), \quad (x,t) \in \Omega \times (0,\infty), \\ f(0,t) &= f_x(0,t) = 0, \quad (x,t) \in \partial\Omega \times (0,\infty), \\ f(x,0) &= g(x), \quad x \in \Omega. \end{aligned}$$

(ii) Die Poissongleichung

$$\begin{aligned} -\Delta f &= g, \quad \text{in } \Omega, \\ f &= 0, \quad \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

(iii) Die Burgergleichung

$$\begin{aligned} f_t + f f_x &= \mu f_{xx} \quad \text{in } \Omega \times (0,\infty), \\ f &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \times (0,\infty), \\ f(x,0) &= g(x) \quad \text{für alle } x \in \Omega. \end{aligned}$$

(iv) Die Schwingungsgleichung

$$\begin{aligned} T_0 f_{xx} &= \rho f_{tt} - g(x,t) \quad \text{in } \Omega \times (0,\infty), \quad T_0, \rho > 0, \\ f(x,0) &= \phi(x), f_t(x,0) = \varphi(x), \quad \text{für alle } x \in \Omega. \end{aligned}$$

Abgabe: 02.05.19, vor der Vorlesung