Philipps-Universität Marburg **Sommer-Semester 2019**
Fachbereich Mathematik und Informatik
Prof. Dr. S. Dahlke, L. Sawatzki

Übungen zur Vorlesung
Numerische Behandlung elliptischer partieller Differentialgleichungen
2. Aufgabenblatt

Aufgabe 2.1. *(6 Punkte)*
Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen. Zeige:

(i) Besitzt $u \in L_2(\Omega)$ die schwache Ableitung $v = D^\alpha u \in L_2(\Omega)$ und ist u auf Ω (klassisch) stetig differenzierbar mit klassischer Ableitung $w = D^\alpha u$, so gilt $v = w$ fast überall in Ω.

(ii) Besitzt $u \in L_2(\Omega)$ die schwache Ableitung $v = D^\alpha u \in L_2(\Omega)$ und besitzt wiederum v die schwache Ableitung $w = D^\beta v \in L_2(\Omega)$, so gilt $w = D^{\alpha+\beta} u$ im schwachen Sinne.

Aufgabe 2.2. *(8 Punkte)*
Es seien $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein Gebiet und $H_0^k(\Omega)$, $k \in \mathbb{N}_0$, die Vervollständigung von $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ bzgl. der Norm $\|\cdot\|_{H^k(\Omega)}$ in $L_2(\Omega)$. Zeige:

(i) $H_0^k(\Omega) \subset H^k(\Omega)$ ist ein Hilbert-Raum mit Skalarprodukt (2.2.5) und entsprechender Norm.

(ii) Es gilt $H_0^0(\Omega) = H^0(\Omega) = L_2(\Omega)$.

Aufgabe 2.3. *(12 Punkte)*
Sei $\Omega = (-1, 1) \subset \mathbb{R}$.

(i) Konstruiere jeweils eine Funktion u aus $H^1(\Omega) \setminus H^2(\Omega)$, $H^1(\Omega) \setminus \mathcal{C}^1(\Omega)$ und $H^1(\Omega) \setminus \mathcal{C}^0(\Omega)$.

(ii) Betrachte die Funktion $u : \Omega \to \mathbb{R}$, gegeben durch

$$u(x) := \begin{cases} x + 1, & -1 < x \leq 0, \\ 1 - x, & 0 < x < 1. \end{cases}$$

Bestimme alle $s > 0$ mit $u \in H^s(\Omega)$.

Aufgabe 2.4. *(8 Punkte)*
Zeige Lemma 2.2.11. aus der Vorlesung:

Es sei $u \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$. Beweise für einen beliebigen Index $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}_0^d$ folgende Rechenregeln der Fourier-Transformation (2.2.13):

(i) $\mathcal{F}(D^\alpha u(x))(\xi) = i^{|\alpha|}\xi^\alpha \mathcal{F}(u(x))(\xi)$,

(ii) $D^\alpha(\mathcal{F}(u(x)))(\xi) = (-i)^{|\alpha|}\mathcal{F}(x^\alpha u(x))(\xi)$.

Aufgabe 2.5. *(6 Punkte)*
Beweise die Abschätzung (2.2.21), die für den Beweis von Satz 2.2.14 benötigt wird:

Es existiert eine von $k \in \mathbb{N}$ abhängige Konstante $C = C(k)$ mit

$$\frac{1}{C}(1 + \|\xi\|_2^2)^k \leq \sum_{|\alpha| \leq k} |\xi^\alpha|^2 \leq C(1 + \|\xi\|_2^2)^k, \quad \text{für alle } \xi \in \mathbb{R}^d.$$

Abgabe: 16.05.19, vor der Vorlesung