Philipps-Universität Marburg **Sommer-Semester 2019**
Fachbereich Mathematik und Informatik
Prof. Dr. S. Dahlke, L. Sawatzki

Übungen zur Vorlesung
Numerische Behandlung elliptischer partieller Differentialgleichungen
3. Aufgabenblatt

Aufgabe 3.1. *(10 Punkte)*

(i) Es sei $(X, \|\cdot\|_X)$ ein normierter linearer Raum mit Dualraum $X' = L(X, \mathbb{R})$. Zeige: X' ist ein Banachraum mit Norm $\|x'\|_{X'} := \sup_{0 \neq x \in X} \frac{|x'(x)|}{\|x\|_X}$.

(ii) Sind $(X, \|\cdot\|_X)$ und $(Y, \|\cdot\|_Y)$ Banachräume und X stetig und dicht in Y eingebettet, so ist Y' stetig in X' eingebettet.

(iii) Es seien $(X, \|\cdot\|_X)$ und $(Y, \|\cdot\|_Y)$ Hilberträume und X sei stetig und dicht in Y eingebettet. Zeige, dass dann Y' stetig und dicht in X' eingebettet ist.

Aufgabe 3.2. *(10 Punkte)*
Beweise Lemma 2.3.2 der Vorlesung:
Es seien $(X, \|\cdot\|_X)$ und $(Y, \|\cdot\|_Y)$ normierte Räume und $T \in L(X, Y)$. Zeige: Für jedes $y' \in Y'$ wird durch die Beziehung

$$\langle Tx, y' \rangle_{Y \times Y'} = \langle x, x' \rangle_{X \times X'}, \quad \text{für alle } x \in X,$$

ein eindeutiges $x' \in X'$ definiert. Für die so wohldefinierte Abbildung $T' : y' \mapsto x'$ gilt: $T' \in L(Y', X')$ mit $|||T'||| = |||T|||$.

Aufgabe 3.3. *(10 Punkte)*
Beweise Lemma 2.5.4 aus der Vorlesung:
Es sei V ein Hilbertraum. Zeige:

(i) $A \in L(V, V')$ gehört genau dann zu einer stetigen Bilinearform $a : V \times V \to \mathbb{R}$, d.h.

$$a(x, y) = \langle Ax, y \rangle_{V' \times V}, \quad x, y \in V,$$

wenn A' zu $a^*(x, y) = a(y, x)$ gehört.

(ii) Ist a eine symmetrische stetige Bilinearform, so gilt $A = A'$.

Aufgabe 3.4. *(10 Punkte)*
Es seien $(U, \|\cdot\|_U)$ und $(V, \|\cdot\|_V)$ Hilberträume, die einen Gelfand-Dreier bilden, d.h.,

$$V \subset U \subset V'$$

mit stetigen und dichten Einbettungen. Weiter sei $T \in L(V', V)$. Zeige:

(i) T gehört auch zu $L(V', V')$, $L(U, U)$, $L(V, V)$ und $L(U, V)$.

(ii) Ist die Einbettung $V \subset U$ kompakt, so sind $T \in L(V', V')$, $T \in L(U, U)$, $T \in L(V, V)$, $T \in L(V', U)$ und $T \in L(U, V)$ kompakt.

Abgabe: 30.05.19, vor der Vorlesung