Philipps-Universität Marburg **Sommer-Semester 2019**
Fachbereich Mathematik und Informatik
Prof. Dr. S. Dahlke, L. Sawatzki

Übungen zur Vorlesung
Numerische Behandlung elliptischer partieller Differentialgleichungen
4. Aufgabenblatt

Aufgabe 4.1. *(15 Punkte)*
Beweise Lemma 3.1.1 aus der Vorlesung:
Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein Gebiet und der Differentialoperator

$$L = \sum_{|\alpha| \leq 2m} a_\alpha(x) D^\alpha, \quad x \in \Omega,$$

sei gleichmäßig elliptisch in Ω mit hinreichend glatten Koeffizienten $a_\alpha(x)$. Zeige, dass sich L dann in der Form

$$L = \sum_{|\alpha| \leq m} \sum_{|\beta| \leq m} (-1)^{|\beta|} D^\beta a_{\alpha,\beta}(x) D^\alpha$$

mit geeigneten $a_{\alpha,\beta}$ schreiben lässt.
Hinweis: Hinreichende Glattheit heißt hier, dass für die Koeffizienten sowie deren Ableitungen alle Operationen durchgeführt werden dürfen, die Glattheitsbedingungen stellen.

Aufgabe 4.2. *(5 Punkte)*
Es sei V ein Hilbertraum und $a(\cdot,\cdot) : V \times V \to \mathbb{R}$ eine V-elliptische Bilinearform. Ferner seien $V_0 \subset V$ dicht in V und $f \in V'$. Zeige, dass eine Lösung x von

$$a(x, y) = f(y), \quad y \in V,$$

dann schon durch die Bedingung

$$a(x, y) = f(y), \quad y \in V_0,$$

eindeutig bestimmt ist.

Aufgabe 4.3. *(10 Punkte)*
Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Gebiet. Der Differentialoperator

$$L = \sum_{|\alpha| \leq 1} \sum_{|\beta| \leq 1} (-1)^{|\beta|} D^\beta a_{\alpha,\beta}(x) D^\alpha$$

sei gleichmäßig elliptisch auf Ω mit $a_{\alpha,\beta} \in L_\infty(\Omega)$. Ferner seien $a_{0,0} \equiv 0$ und $a_{\alpha,0} \equiv c_{\alpha,0}$, $a_{0,\beta} \equiv c_{0,\beta}$ für $|\alpha| = |\beta| = 1$ mit beliebigen reellen Konstanten $c_{\alpha,0}, c_{0,\beta} \in \mathbb{R}$. Zeige, dass die Bilinearform $a(\cdot,\cdot)$ gemäß (3.1.5) $H_0^1(\Omega)$-elliptisch ist.

Aufgabe 4.4. *(10 Punkte)*
Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Gebiet mit Lipschitzrand $\partial\Omega$ and $a(\cdot,\cdot) : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ eine $H_0^1(\Omega)$-elliptische Bilinearform. Zeige, dass dann die Abbildung

$$H_0^1(\Omega) \ni u_0 \longmapsto a(u_0, \cdot) \in (H_0^1(\Omega))'$$

linear, stetig und injektiv ist.

Abgabe: 13.06.19, vor der Vorlesung