Philipps-Universität Marburg **Sommer-Semester 2019**
Fachbereich Mathematik und Informatik
Prof. Dr. S. Dahlke, L. Sawatzki

Übungen zur Vorlesung
Numerische Behandlung elliptischer partieller Differentialgleichungen
5. Aufgabenblatt

Aufgabe 5.1. *(10 Punkte)*
Es sei $(V, \|\cdot\|_V)$ ein Hilbertraum. Zeige:

(i) Ist $W \subset V$ ein abgeschlossener Teilraum mit äquivalenter Norm und $a(\cdot,\cdot)$ eine V-elliptische Bilinearform, dann ist $a(\cdot,\cdot)$ auch W-elliptisch.

(ii) Ist $V_N \subset V$, $\dim V_N = N < \infty$ mit $\|\cdot\|_{V_N} = \|\cdot\|_V$, so gilt

$$\|f\|_{V_N'} \leq \|f\|_{V'}, \quad \text{für alle } f \in V'.$$

Aufgabe 5.2. *(10 Punkte)*
Zeige Lemma 4.1.7 aus der Vorlesung:

(i) Falls $a(\cdot,\cdot)$ symmetrisch ist, so ist dies auch $\mathcal{L}$.

(ii) Ist $a(\cdot,\cdot)$ symmetrisch und V-elliptisch, dann ist $\mathcal{L}$ positiv definit und u^N löst das Variationsproblem

$$J(u^N) \leq J(u) := a(u,u) - 2f(u) \quad \text{für alle } u \in V_N.$$

Aufgabe 5.3. *(5 Punkte)*
Zeige Bemerkung 4.2.3 aus der Vorlesung:
Sei $a(\cdot,\cdot)$ stetig und eine geschachtelte Folge von Unterräumen $(V_i)_{i\in\mathbb{N}}$ von V mit $V_i \subset V_{i+1}$ für alle $i \in \mathbb{N}$ sowie $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} V_i$ dicht in V gegeben. Dann folgt

$$\lim_{i\to\infty} d(u, V_i) = \lim_{i\to\infty} \inf_{v_i \in V_i} \|u - v_i\|_V = 0 \quad \text{für alle } u \in V.$$

Aufgabe 5.4. *(15 Punkte)*
Betrachte zu $\Omega = B(0,1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$ die Poisson-Gleichung mit homogenen Dirichlet-Randbedingungen

$$-\Delta u = 1 \text{ in } \Omega, \quad u = 0 \text{ auf } \partial\Omega.$$

Berechne eine Näherungslösung dieses Problems mit Hilfe des Galerkin-Verfahrens und des Ansatzraumes $V_4 := \operatorname{span}\{b_1, b_2, b_3, b_4\}$, wobei

$$b_1(r,\varphi) = \sin(\pi r)(1 + \sin(\varphi)), \quad b_2(r,\varphi) = \sin(3\pi r)(1 + \sin(\varphi)), \quad b_3(r,\varphi) = \sin(\pi r), \quad b_4(r,\varphi) = \sin(3\pi r).$$

Hinweis: Berechne alle Integrale in Polarkoordinaten. Dabei können Integrale auch mit technischen Hilfsmitteln berechnet werden.

Zusatzaufgabe *(20 Punkte)*
Berechne die exakte Lösung der Differentialgleichung mit homogenen Randbedingungen aus Aufgabe 5.4 und vergleiche diese mit der errechneten Näherungslösung. Diskutiere den gewählten Ansatzraum V_4 im Hinblick auf die analytischen Eigenschaften der exakten Lösung.

Abgabe: 27.06.19, vor der Vorlesung