Philipps-Universität Marburg **Sommer-Semester 2019**
Fachbereich Mathematik und Informatik
Prof. Dr. S. Dahlke, L. Sawatzki

Übungen zur Vorlesung
Numerische Behandlung elliptischer partieller Differentialgleichungen
6. Aufgabenblatt

Aufgabe 6.1. *(10 Punkte)*
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Gebiet mit $0 \in \Omega$. Dann gilt $u := \|\cdot\|^s \in H^1(\Omega)$, falls $s \in \{0\} \cup (1 - \frac{d}{2}, \infty)$.

Aufgabe 6.2. *(10 Punkte)*

(i) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Gebiet, $d \geq 2$. Zeige, dass

$$V := \{\, u|_\Omega : u \in C^2(\mathbb{R}^d) \ \text{ harmonisch} \,\}$$

ein unendlich-dimensionaler, linearer Teilraum von $H^1(\Omega)$ ist.

(ii) Was bedeutet dies für $H^1(\Omega) \backslash H^1_0(\Omega)$?

(iii) Im Fall $d = 1$ gilt $H^1(\Omega) = H^1_0(\Omega) \oplus \Pi^1$. Was bedeutet dies für (i) und (ii)?

Aufgabe 6.3. *(10 Punkte)*
Es sei $(X, \|\cdot\|_X)$ ein normierter Raum, $X' = L(X, \mathbb{R})$ sein Dualraum und $X'' = (X', \mathbb{R})$ dessen Dualraum, der so genannte Bidualraum.

(i) Es werde die Abbildung

$$k : X \to X'', \quad (k(x))(x') = x'(x), \quad x \in X, x' \in X',$$

definiert. Zeige, dass k eine lineare, injektive Isometrie ist, die so genannte *kanonische Abbildung* von X nach X''.

(ii) Zeige, dass $k(X)$ vollständig ist, wenn X vollständig ist.

(iii) Ist X ein Banachraum und k eine surjektive Abbildung, so bezeichnet man X als *reflexiven Banachraum.* Zeige: X ist genau dann reflexiv, wenn X' reflexiv ist.

(iv) Zeige: Jeder Hilbertraum ist reflexiv.

Aufgabe 6.4. *(10 Punkte)*
Es seien $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Gebiet mit Lipschitzrand $\partial\Omega$, $g \in L_2(\Omega)$ und $\varphi \in L_2(\partial\Omega)$. Zeige, dass dann durch

$$f(v) := \int_\Omega g(x)v(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} \varphi(x)v(x)\,\mathrm{d}\Gamma\,, \quad v \in H^1(\Omega)$$

ein lineares Funktional $f \in (H^1(\Omega))'$ gegeben ist mit

$$\|f\|_{(H^1(\Omega))'} \ \leq \ C\big(\, \|g\|_{(H^1(\Omega))'} + \|\varphi\|_{H^{-1/2}(\partial\Omega)}\,\big)\,, \quad C > 0.$$

Aufgabe 6.5. *(10 Punkte)*
Betrachte die Differentialgleichung

$$\begin{aligned} -u''(x) &= x \cdot \sin(x), \quad x \in (0, 2\pi), \\ u(0) &= u(2\pi) = 0. \end{aligned}$$

Bestimme näherungsweise die Lösung der Differentialgleichung mit linearen finiten Elementen und 7 äuqidistanten Knoten $0 < x_1 < \ldots < x_7 < 2\pi$.

Abgabe: 11.07.19, vor der Vorlesung