Philipps-Universität Marburg **Sommersemester 2017**
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. T. Surowiec, A. Kröck, A. Sieber

Übungen zur Nichtlinearen Optimierung
1. Aufgabenblatt

Aufgabe 1 **(Globale und lokale Minimierer/Maximierer; zulässige Menge)** (10)

(i) Skizzieren Sie die folgenden Funktionen auf einem geeigneten Bereich. Zeichnen Sie in Ihrer Skizze alle (strikten) globale und lokale Minimierer und Maximierer ein,

$$f(x) := \begin{cases} x^4 - 14x^3 + 33x^2 + 80x - 100, & x \leq 11 \\ e^{11-x} + 779, & x \geq 11 \end{cases},$$
$$g(x,y) := -x^2 - y^2 + xy - 2x + 2y.$$

(ii) Betrachten Sie das Minimierungsproblem

$$\begin{array}{ll} \min & f(x) \\ \text{s.t.} & x_1^2 + x_2^2 \leq 4 \\ & x_1^2 \geq 1 \end{array}.$$

Skizzieren Sie die zulässige Menge.

(iii) Betrachten Sie die zulässige Menge, welche durch die Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} 1 - x_1^2 - x_2^2 &\geq 0 \\ x_1 + x_2 - \sqrt{2} &\leq 0 \\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

definiert ist. Entscheiden Sie für die Punkte $x_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^T, x_2 = (1,0)^T, x_3 = (-1,0)^T, x_4 = \left(-\frac{1}{2}, 0\right)^T$ und $x_5 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^T$, ob diese zulässig oder unzulässig sind. Entscheiden Sie für zulässige Punkte zusätzlich, ob diese im Inneren oder auf dem Rand der jeweiligen Nebenbedingungen liegen.

Aufgabe 2 **(Konvexität und Niveaumenge)** (10)

(i) Seien $\{A_i\}_{i=1}^n$ konvexe Mengen mit $\bigcap_{i=1}^n A_i \neq \emptyset$. Zeigen Sie, dass dann auch die Menge $C := \bigcap_{i=1}^n A_i$ konvex ist.

(ii) Sei $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{R}^n$ nichtleer und konvex. Seien $f_1, \ldots, f_m : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ konvexe Funktionen. Zeigen Sie, dass die Funktion $g : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$, $g(x) := \sum_{i=1}^m f_i(x)$, ebenfalls konvex ist.

bitte wenden!

(iii) Die *Niveaumenge* einer Funktion f ist gegeben durch $\operatorname{lev}_\alpha f := \{x \in \mathcal{S} \,|\, f(x) \leq \alpha\}, \alpha \in \mathbb{R}$. Sei $f : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion. Zeigen Sie, dass dann die Niveaumenge $\operatorname{lev}_\alpha f$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ konvex ist.

(iv) Geben Sie ein Beispiel für eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, für die alle Niveaumengen konvex sind, die Funktion f jedoch nicht konvex ist.

Aufgabe 3 (Konvexität) (10)

(i) Zeigen Sie, dass die Funktion $x \mapsto -\ln(x)$ für alle $x > 0$ konvex ist.

(ii) Seien $g_1, \ldots, g_m$ konkave Funktionen auf $\mathbb{R}^n$. Sei f eine konvexe Funktion auf $\mathbb{R}^n$ und μ eine positive Konstante. Die Funktion β sei gegeben durch

$$\beta(x) := f(x) - \mu \sum_{i=1}^{m} \ln(g_i(x)).$$

Zeigen Sie, dass die Funktion β auf der Menge $\mathcal{S} := \{x \,|\, g_i(x) > 0, i = 1, \ldots, m\}$ konvex ist.

Aufgabe 4 (Konvergenz) (10)

Zeigen Sie für alle Folgen $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ deren Konvergenz und bestimmen Sie deren Grenzwert. Bestimmen Sie außerdem die Konvergenzordnung r und die Konvergenzrate C:

(i) $x_k = 2^{-k}, \quad k \in \mathbb{N}$,

(ii) $x_k = 1 + 5 \cdot 10^{-2k}, \quad k \in \mathbb{N}$,

(iii) $x_k = 2^{-2^k}, \quad k \in \mathbb{N}$,

(iv) $x_k = 3^{-k^2}, \quad k \in \mathbb{N}$,

(v) $x_k = \begin{cases} 1 - 2^{-2^k}, & k \text{ ungerade} \\ 1 + 2^{-k}, & k \text{ gerade} \end{cases}$.

Abgabe: Dienstag, 2.Mai 2017, vor der Vorlesung.