Chapitre 7

OPÉRATEURS NON-BORNÉS

Dans ce qui suit $\mathcal{H}$ et $\mathcal{G}$ désignent des espaces de Hilbert.

Version du 28 juin 2001

7.1 Opérateurs fermés

DEFINITION 1 Soient $\mathcal{H}$ et $\mathcal{G}$ des espaces de Hilbert. Nous dirons qu'une application linéaire $T : D(T) \longrightarrow \mathcal{G}$ définie sur un sous-espace vectoriel $D(T)$ de $\mathcal{H}$ est un *opérateur* , dans H à valeurs dans $\mathcal{G}$ s'il faut préciser. Nous dirons que c'est un opérateur dans H s'il prend ses valeurs dans $\mathcal{H}$. Le sous-espace vectoriel $D(T)$ s'appelle le *domaine* de T . Nous désignerons par $\mathcal{D}(T)$ le sous-espace vectoriel $D(T)$ muni du produit scalaire

$$(\xi|\,\eta)_{\mathcal{D}(T)} = (\xi|\,\eta)_{\mathcal{H}} + (T\xi|\,T\eta)_{\mathcal{G}} \ .$$

Ce produit scalaire est parfois noté $(\xi|\,\eta)_T$.

Nous dirons qu'un opérateur T est *fermé* si le graphe

$$\operatorname{Gr} T = \{(\xi, T\xi) \in \mathcal{H} \times \mathcal{G} \mid \xi \in D(T)\}$$

est fermé dans $\mathcal{H} \times \mathcal{G}$.

THEOREME *Soit T un opérateur dans $\mathcal{H}$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) T *est fermé.*

(ii) *Pour toute suite* $(\xi_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset D(T)$ *telle que*

$$\xi := \lim_k \xi_k \quad et \quad \psi := \lim_k T\xi_k$$

existent dans $\mathcal{H}$ respectivement $\mathcal{G}$, on a $\xi \in D(T)$ et $\psi = T\xi$.

(iii) $\mathcal{D}(T)$ *est un espace de Hilbert.*

Dans ce cas $\mathcal{D}(T)$ est l'image de $\operatorname{Gr} T$ *par* pr_1 *et $j : \mathcal{D}(T) \hookrightarrow \mathcal{H}$ est un sous-espace hilbertien de noyau $D_T = j^\dagger$ tel que*

$$\mathcal{D}(T) = D_T(\mathcal{H}) + T^\dagger(\mathcal{G}) \ ,$$

i.e. $\mathrm{Id}_{\mathcal{D}(T)} = D_T D_T^\dagger + T^\dagger T$ *, en considérant les semi-dualités* $\langle \mathcal{D}(T)|\,\mathcal{D}(T)\rangle$ *et* $\langle \mathcal{H}|\,\mathcal{H}\rangle$.

L'équivalence de (i) et (ii) est immédiate. Pour celle de (i) et (iii), il suffit de remarquer que $\mathcal{D}(T)$ est isométrique au sous-espace vectoriel $\operatorname{Gr} T \sqsubset \mathcal{H} \times \mathcal{G}$, $\mathcal{H} \times \mathcal{G}$ étant muni du produit scalaire produit (cf. exemple 3.2.4). Finalement pour tout $\theta, \theta' \in \mathcal{D}(T)$, on a

$$(\theta|\,\theta')_{\mathcal{D}(T)} = (j\theta|\,j\theta')_{\mathcal{H}} + (T\theta|\,T\theta')_{\mathcal{G}} = \left(\theta|\left(D_T D_T^\dagger + T^\dagger T\right)\theta'\right)_{\mathcal{D}(T)} \ ,$$

d'où le résultat par le théorème 6.4 et la proposition 6.7. Nous aurions aussi pû appliquer l'exemple 6.11.3. □

REMARQUE En d'autres termes, on peut permuter limite et opérateur fermé, pour autant que les limites existent.

PROPOSITION *Pour qu'un opérateur fermé T dans $\mathcal{H}$ soit continu sur $D(T)$, muni de la norme induite par $\mathcal{H}$, il faut et il suffit que $D(T)$ soit fermé dans $\mathcal{H}$.*

En effet si $D(T)$ est fermé, c'est un espace de Hilbert et le théorème du graphe fermé montre que T est continu. Réciproquement si T est continu, il existe un unique prolongement continu $\widehat{T} : \overline{D(T)} \longrightarrow \mathcal{G}$. On a alors

$$\operatorname{Gr} \widehat{T} = \overline{\operatorname{Gr} T}^{\overline{D(T)} \times F} = \overline{\operatorname{Gr} T}^{F \times F} = \operatorname{Gr} T \ ,$$

puisque T est fermé, donc

$$\overline{D(T)} = \mathrm{pr}_1 \left(\operatorname{Gr} \widehat{T} \right) = \mathrm{pr}_1 (\operatorname{Gr} T) = D(T) \ . \quad \square$$

Ceci montre que la notion d'opérateur fermé est une bonne généralisation de la notion d'opérateur continu à des opérateurs qui ne sont pas partout définis.

SCOLIE *Si T est un opérateur fermé de domaine dense, on a ou bien*

T est continu et partout défini,

ou bien

T n'est pas continu et n'est pas partout défini.

DEFINITION 2 Dans le premier cas on a $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{G})$ et nous dirons que T est *borné* , dans le second cas on dit que T est *non-borné* .

7.2 Opérateurs fermables

Bien souvent un problème se traduit par la donnée d'un opérateur qui n'est pas fermé. Le but de la théorie des opérateurs non-bornés est essentiellement de construire des prolongements fermés de l'opérateur donné, puis d'étudier leurs propriétés.

DEFINITION 1 Si S et T sont des opérateurs dans $\mathcal{H}$, nous dirons que S est un *prolongement* de T , noté $T \subset S$, si $D(T) \subset D(S)$ et $T = S_{|D(T)}$.

Nous dirons qu'un opérateur dans $\mathcal{H}$ est *fermable* si la fermeture $\overline{\operatorname{Gr} T}^{\mathcal{H}\times\mathcal{G}}$ de $\operatorname{Gr} T$ dans $\mathcal{H}\times\mathcal{G}$ est le graphe d'un opérateur, évidemment fermé et prolongeant T , appelé la *fermeture* de T et noté $\overline{T}$.

PROPOSITION *Soit T un opérateur dans $\mathcal{H}$. Si T possède un prolongement fermé S , alors T est fermable, $\overline{T} \subset S$ et les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) $S = \overline{T}$.

(ii) S *est le plus petit prolongement fermé de* T .

(iii) $D(T)$ *est dense dans* $\mathcal{D}(S)$.

On a évidemment $\overline{\operatorname{Gr} T}^{\mathcal{H}\times\mathcal{G}} \subset \operatorname{Gr} S$, donc $\overline{\operatorname{Gr} T}^{\mathcal{H}\times\mathcal{G}}$ est un graphe et $\overline{T} \subset S$. L'équivalence des trois assertions est immédiate en se rappelant que $\mathcal{D}(S)$ est isométrique au sous-espace vectoriel $\operatorname{Gr} S \sqsubset \mathcal{H}\times\mathcal{G}$. $\square$

Ce lemme nous conduit à poser la

DEFINITION 2 Un sous-espace vectoriel dense de $\mathcal{D}(T)$ s'appelle un *domaine essentiel* de T .

Le domaine d'un opérateur fermable est évidemment un domaine essentiel de sa fermeture. D'autre part tout domaine essentiel d'un opérateur de domaine dense est dense dans $\mathcal{H}$, mais la réciproque est fausse (cf. exemple 7.9.8).

REMARQUE 1 L'injection canonique $j : \mathcal{D}(T) \hookrightarrow \mathcal{H}$ et l'opérateur $T : \mathcal{D}(T) \longrightarrow \mathcal{G}$ sont continus de norme $\leqslant 1$.

En effet, pour tout $\xi \in \mathcal{H}$, on a

$$\|\xi\|_{\mathcal{H}}^2 \ , \ \|T\xi\|_{\mathcal{G}}^2 \leqslant \|\xi\|_{\mathcal{H}}^2 + \|T\xi\|_{\mathcal{G}}^2 = \|\xi\|_{\mathcal{D}(T)}^2 \ . \quad \square$$

Nous désignerons par $\widehat{\mathcal{D}(T)}$ le complété de $\mathcal{D}(T)$. Soient encore $\widehat{j} : \widehat{\mathcal{D}(T)} \longrightarrow \mathcal{H}$ l'unique prolongement linéaire continu de j et $\widehat{T} : \widehat{\mathcal{D}(T)} \longrightarrow \mathcal{G}$ celui de T . Le produit scalaire de $\widehat{\mathcal{D}(T)}$ est donné par

$$(\xi|\,\eta)_{\widehat{\mathcal{D}(T)}} = \left(\widehat{j}\xi\middle|\,\widehat{j}\eta\right)_{\mathcal{H}} + \left(\widehat{T}\xi\middle|\,\widehat{T}\eta\right)_{\mathcal{G}} \quad \text{pour tout } \xi,\eta \in \widehat{\mathcal{D}(T)}$$

(cf. remarque 3.3.2).

THEOREME *Soit T un opérateur dans $\mathcal{H}$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) T *est fermable.*

(ii) $\mathrm{pr}_1 : \overline{\mathrm{Gr}\, T}^{\mathcal{H}\times\mathcal{G}} \longrightarrow \mathcal{H}$ *est injective.*

(iii) Pour toute suite $(\xi_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset D(T)$ *avec* $\lim_k \xi_k = 0$ *dans* $\mathcal{H}$ *et telle que* $\lim_k T\xi_k$ *existe dans* $\mathcal{G}$ *, on a* $\lim_k T\xi_k = 0$ *.*

(iv) L'application canonique $\widehat{j} : \widehat{\mathcal{D}(T)} \longrightarrow \mathcal{H}$ *est injective.*

Dans ce cas

$$\widehat{j}\left(\widehat{\mathcal{D}(T)}\right) = \mathcal{D}\left(\overline{T}\right) \quad \text{et} \quad \widehat{T} = \overline{T}\widehat{j} \ .$$

(i) ⇒ (ii) C'est immédiat.

(ii) ⇒ (iii) Posons $\gamma := \lim_k T\xi_k$. L'hypothèse dans (iii) signifie que $(\xi_k, T\xi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $(0,\gamma)$ dans $\overline{\mathrm{Gr}\, T}^{\mathcal{H}\times\mathcal{G}}$. Mais comme $\mathrm{pr}_1(0,\gamma) = 0 = \mathrm{pr}_1(0,0)$, on obtient $\gamma = 0$ par (ii).

(iii) ⇒ (iv) Si $\xi \in \widehat{\mathcal{D}(T)}$ est tel que $\widehat{j}(\xi) = 0$, il existe une suite $(\xi_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset D(T)$ avec $\xi = \lim_k \xi_k$ dans $\widehat{\mathcal{D}(T)}$. On a

$$\lim_k \xi_k = \lim_k \widehat{j}(\xi_k) = \widehat{j}(\lim_k \xi_k) = \widehat{j}(\xi) = 0 \quad \text{dans } \mathcal{H} \ ,$$

et $(T\xi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $\mathcal{G}$, donc convergente. On en déduit par (iii) que $\lim_k T\xi_k = 0$ dans $\mathcal{G}$, donc que

$$\lim_k \|\xi_k\|_T^2 = \lim_k \left(\|\xi_k\|_{\mathcal{H}}^2 + \|T\xi_k\|_{\mathcal{G}}^2\right) = 0 \ ,$$

ce qui montre que $(\xi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 dans $\widehat{\mathcal{D}(T)}$, donc que $\xi = 0$.

(iv) ⇒ (i) Soit S l'opérateur défini sur $\widehat{j}\left(\widehat{\mathcal{D}(T)}\right)$ par $\widehat{T} = S\widehat{j}$. La remarque 1 montre que $\mathcal{D}(S) = \widehat{j}\left(\widehat{\mathcal{D}(T)}\right)$, donc que S est un opérateur fermé par le théorème 7.1. Il suffit donc par la proposition de remarquer que S prolonge T et que $\mathcal{D}(T)$ est dense dans $\mathcal{D}(S)$. □

REMARQUE 2 Il existe évidemment des opérateurs non-fermables (exercice). Mais nous allons voir (cf. 7.9) que beaucoup d'opérateurs différentiels sont fermables. Il n'est pas souvent possible de déterminer explicitement le domaine $\mathcal{D}\left(\overline{T}\right)$ de la fermeture. C'est une des raisons qui nous oblige à introduire un appareil théorique assez élaboré.

7.3 Opérateurs et sous-espaces hilbertiens

Dans tout ce qui suit nous considérerons
un espace localement convexe séparé F ,
un sous-espace hilbertien $\mathcal{H} \hookrightarrow F^\dagger$ de noyau $h : F \longrightarrow \mathcal{H}$
et
une application linéaire continue $T : F \longrightarrow \mathcal{G}$.

EXEMPLE (classique) Si T est un opérateur de domaine dense dans $\mathcal{H}$ et à valeurs dans $\mathcal{G}$, on peut prendre pour F un domaine essentiel de T , muni de la topologie induite par $\mathcal{D}(T)$ ou d'une topologie localement convexe séparée telle que l'injection canonique $h_T : F \hookrightarrow \mathcal{D}(T)$ soit continue. Si $j : \mathcal{D}(T) \hookrightarrow \mathcal{H}$ désigne aussi l'injection canonique, on obtient le diagramme suivant

$$F \overset{h_T}{\hookrightarrow} \mathcal{D}(T) \overset{j}{\hookrightarrow} \mathcal{H} \overset{j^\dagger}{\hookrightarrow} \mathcal{D}(T)_\beta^\dagger \overset{h_T^\dagger}{\hookrightarrow} F^\dagger \ ,$$

puisque h_T et j sont d'image dense; ceci nous permet d'identifier $\mathcal{H}$ et $\mathcal{D}(T)_\beta^\dagger$ à des sous-espaces hilbertiens de $F^\dagger$. Le noyau h de $\mathcal{H} \hookrightarrow F^\dagger$ est égal à jh_T , donc injectif.

Cadre général Il nous sera utile lorsque nous rencontrerons des situations où le noyau h n'est pas nécessairement injectif, c'est-à-dire lorsque $\mathcal{H}$ n'est pas dense dans $F^\dagger$; cela se rencontre par exemple pour définir la notion d'opérateur décomposable ou en théorie des représentations. Il nous impose également, ce qui est avantageux dans beaucoup de formulations, de ne considérer que des opérateurs définis sur le même domaine, en l'occurence $h(F)$, qui est dense dans $\mathcal{H}$.

On dit parfois, lorsque h est injectif et F possède des propriétés supplémentaires (nucléarité) que $F \hookrightarrow \mathcal{H} \hookrightarrow F^\dagger$ est un *triple de Gelfand* .

Rappelons les construction déjà faites dans les exemples 6.11.3 et 6.16.2. On considère la forme sesquilinéaire hermitienne positive

$$(\varphi, \psi) \longmapsto (h\varphi| h\psi)_{\mathcal{H}} + (T\varphi| T\psi)_{\mathcal{G}} : F \times F \longrightarrow \mathbb{K}$$

associée au noyau hermitien positif $h^\dagger h + T^\dagger T$, l'espace de Hilbert $\widehat{\mathcal{D}(T)}$ complété de l'espace préhilbertien

$$\mathcal{D}(T) := F_{h^\dagger h + T^\dagger T} \ ,$$

l'application canonique

$$h_T : F \longrightarrow \widehat{\mathcal{D}(T)} : \varphi \longmapsto \varphi + \operatorname{Ker}\left(h^\dagger h + T^\dagger T\right) \ ,$$

l'espace de Hilbert $\mathcal{D}(T)^\dagger_\beta = \widehat{\mathcal{D}(T)}^\dagger_\beta$ **plongé** dans $F^\dagger$ à l'aide de $h_T^\dagger$, ainsi que les prolongements linéaires continus canoniques

$$\widehat{h} : \widehat{\mathcal{D}(T)} \longrightarrow \mathcal{H} \quad \text{et} \quad \widehat{T} : \widehat{\mathcal{D}(T)} \longrightarrow \mathcal{G}$$

de h et T . On a $h = \widehat{h} h_T$ et $T = \widehat{T} h_T$, donc $h^\dagger = h_T^\dagger \widehat{h}^\dagger$ et $T^\dagger = h_T^\dagger \widehat{T}^\dagger$; puisque $h^\dagger$ et $h_T^\dagger$ sont les injections canoniques de $\mathcal{H}$ et $\mathcal{D}(T)^\dagger_\beta$ dans $F^\dagger$, $\widehat{h}^\dagger$ est l'injection canonique de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{D}(T)^\dagger_\beta$. Les diagrammes suivants sont donc commutatifs :

$$\begin{tikzcd}
F \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "h_T"'] & & \mathcal{H} \arrow[rr, hook, "h^\dagger"] \arrow[dr, "\widehat{h}^\dagger"'] & & F^\dagger \\
& \widehat{\mathcal{D}(T)} \arrow[ur, "\widehat{h}"'] & & \mathcal{D}(T)^\dagger_\beta \arrow[ur, "h_T^\dagger"'] &
\end{tikzcd}$$

et

$$\begin{tikzcd}
F \arrow[rr, "T"] \arrow[dr, "h_T"'] & & \mathcal{G} \arrow[rr, "T^\dagger"] \arrow[dr, "\widehat{T}^\dagger"'] & & F^\dagger \\
& \widehat{\mathcal{D}(T)} \arrow[ur, "\widehat{T}"'] & & \mathcal{D}(T)^\dagger_\beta \arrow[ur, "h_T^\dagger"'] &
\end{tikzcd} .$$

Remarquons que les adjointes de T et $\widehat{T}$ prennent les mêmes valeurs sur les mêmes éléments de $\mathcal{G}$. En outre le produit scalaire sur $\widehat{\mathcal{D}(T)}$ est donné par

$$(\xi|\,\eta)_{\widehat{\mathcal{D}(T)}} = \left(\widehat{h}\xi \middle| \widehat{h}\eta\right)_{\mathcal{H}} + \left(\widehat{T}\xi \middle| \widehat{T}\eta\right)_{\mathcal{G}} \quad \text{pour tout } \xi, \eta \in \widehat{\mathcal{D}(T)} .$$

Il nous faut maintenant clarifier les conditions sous lesquelles T induit un opérateur dans $\mathcal{H}$. Le résultat suivant est immédiat.

LEMME *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) T *se factorise par* h *en un opérateur* $\widetilde{T}$ *de domaine* $h(F)$.

(ii) *La restriction de* $\widehat{h}$ *à* $\mathcal{D}(T)$ *est injective.*

(iii) *On a* $\operatorname{Ker} h \subset \operatorname{Ker} T$.

Un tel opérateur est toujours de domaine dense. Il est alors clair que les espaces préhilbertiens $\mathcal{D}(T)$ et $\mathcal{D}\left(\widetilde{T}\right)$ sont isomorphes, et le théorème 7.2 montre que $\widetilde{T}$ est fermable si, et seulement si, $\widehat{h}$ est injective. Nous insistons sur le fait qu'il n'est pas judicieux de remplaçer T par $\widetilde{T}$, car il est plus intéressant d'utiliser la semi-dualité $\left\langle F \middle| F^\dagger \right\rangle$ donnée à priori et intimement liée dans les applications au problème considéré.

Ceci nous conduit à poser la

DEFINITION Nous dirons que T est *fermable* si $\widehat{h}$ est injective et nous désignerons par $\overline{T}$ l'opérateur fermé dans $\mathcal{H}$ et à valeurs dans $\mathcal{G}$ tel que $\widehat{T} = \overline{T}\widehat{h}$, appelé la *fermeture de* T .

Dans ce cas, on a évidemment $\mathcal{D}\left(\overline{T}\right) = \widehat{h}\left(\widehat{\mathcal{D}(T)}\right)$, et nous identifierons $\widehat{\mathcal{D}(T)}$ avec $\mathcal{D}\left(\overline{T}\right)$, donc $\widehat{h}$ avec l'injection canonique $j : \mathcal{D}\left(\overline{T}\right) \hookrightarrow \mathcal{H}$.

On a donc les diagrammes commutatifs

$$\begin{tikzcd} \mathcal{D}\left(\overline{T}\right) \arrow[rr, hook, "j"] & & \mathcal{H} \arrow[rr, hook, "j^\dagger"] \arrow[dr, "h^\dagger"'] & & \mathcal{D}(T)^\dagger_\beta \\ & F \arrow[ul, "h_T"] \arrow[ur, "h"'] & & F^\dagger \arrow[ur, "h_T^\dagger"'] & \end{tikzcd}$$

et

$$\begin{tikzcd} \mathcal{D}\left(\overline{T}\right) \arrow[rr, "\overline{T}"] & & \mathcal{G} \arrow[rr, "\overline{T}^\dagger"] \arrow[dr, "T^\dagger"'] & & \mathcal{D}(T)^\dagger_\beta \\ & F \arrow[ul, "h_T"] \arrow[ur, "T"'] & & F^\dagger \arrow[ur, "h_T^\dagger"'] & \end{tikzcd} .$$

Puisque $h_T^\dagger$, $j^\dagger$ et j sont des injections canoniques, nous les écrirons sous la forme générale Id , ou bien pas du tout, si aucune confusion n'en résulte.

REMARQUE Nous allons jouer sur deux tableaux : certaines formulations ne ferrons intervenir que $\mathcal{H}$ et T , tandis que d'autres introduirons $F^\dagger$. L'avantage tient au fait que $\overline{T}$ étant mal connu, surtout son domaine de définition $\mathcal{D}\left(\overline{T}\right)$, la considération de F , donc en particulier la considération d'une topologie adéquate sur le domaine de T , permet de calculer dans $F^\dagger$. C'est ce qui donne tant d'importance aux espaces de distributions.

Historiquement l'opérateur T a tout d'abord été étudié en restant dans l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$; pratiquement les formulations ne faisant intervenir que cet espace (et l'opérateur) semblent plus immédiates et mieux interprétables (par exemple en mécanique quantique, mais cela peut aussi dépendre des écoles !). L'une des objections, à vouloir donner une interprétation de F , a trait à son caractère non-canonique (à voir, puisque l'on peut prendre $F = \mathcal{D}(T)$, mais c'est peut-être cette dépendance qui gêne).

PROPOSITION

(i) Le noyau de $\mathcal{D}(T)^\dagger_\beta \hookrightarrow F^\dagger$ est $h^\dagger h + T^\dagger T$, i.e.

$$\mathcal{D}(T)^\dagger_\beta = \mathcal{H} + T^\dagger(\mathcal{G}) \ ;$$

en particulier tout élément de $\mathcal{D}(T)^\dagger$ est de la forme $\xi + T^\dagger\gamma$ avec $\xi \in \mathcal{H}$ et $\gamma \in \mathcal{G}$. L'application

$$Q := \widehat{h}^\dagger\widehat{h} + \widehat{T}^\dagger\widehat{T} : \widehat{\mathcal{D}(T)} \longrightarrow \mathcal{D}(T)^\dagger_\beta$$

est celle de Riesz. Remarquons que $\widehat{h}^\dagger\widehat{h}$ est le noyau de $\mathcal{H} \hookrightarrow \mathcal{D}(T)^\dagger$ et $\widehat{T}^\dagger\widehat{T}$ celui de $T^\dagger(\mathcal{G}) = \widehat{T}^\dagger(\mathcal{G}) \hookrightarrow \mathcal{D}(T)^\dagger$.

(ii) Si $\mu \in \mathcal{D}(T)^\dagger$, alors l'équation

$$h^\dagger\widehat{h}\theta + T^\dagger\widehat{T}\theta = \mu$$

possède une unique solution $\theta \in \widehat{\mathcal{D}(T)}$. *D'autre part le problème variationnel*

$$\xi + T^\dagger \gamma = \mu \quad et \quad \|\xi\|_{\mathcal{H}}^2 + \|\gamma\|_{\mathcal{G}}^2 \ \textit{est minimal}$$

possède une unique solution $(\xi, \gamma) \in \mathcal{H} \times \mathcal{G}$. *On a*

$$\|\mu\|_{\mathcal{D}(T)_\beta^\dagger}^2 = \|\xi\|_{\mathcal{H}}^2 + \|\gamma\|_{\mathcal{G}}^2 \quad , \quad \xi = \widehat{h}\theta \quad et \quad \gamma = \widehat{T}\theta \ .$$

Démonstration de (i). C'est la reformulation de l'exemple 6.11.3.

Démonstration de (ii). La première partie est évidente puisque Q est une bijection de $\widehat{\mathcal{D}(T)}$ sur $\mathcal{D}(T)_\beta^\dagger$. Quant à la seconde, on applique tout d'abord l'assertion de minimalité à la somme $\mathcal{D}(T)_\beta^\dagger = \mathcal{H} + T^\dagger(\mathcal{G})$ (cf. 6.7), puis à l'image $T^\dagger(\mathcal{G})$ (cf. 6.4) : on a

$$p_{\mathcal{H}}\mu \in \mathcal{H} \quad , \quad p_{T^\dagger(\mathcal{G})}\mu \in T^\dagger(\mathcal{G}) \quad \text{et} \quad \left(T^\dagger\right)_{\mathcal{G}}^{-1}\left(p_{T^\dagger(\mathcal{G})}\mu\right) \in \mathcal{G}$$

avec

$$\mu = p_{\mathcal{H}}\mu + p_{T^\dagger(\mathcal{G})}\mu \quad , \quad p_{T^\dagger(\mathcal{G})}\mu = T^\dagger\left(T^\dagger\right)_{\mathcal{G}}^{-1}\left(p_{T^\dagger(\mathcal{G})}\mu\right) \quad ,$$

$$\|\mu\|_{\mathcal{D}(T)_\beta^\dagger}^2 = \|p_{\mathcal{H}}\mu\|_{\mathcal{H}}^2 + \left\|p_{T^\dagger(\mathcal{G})}\mu\right\|_{T^\dagger(\mathcal{G})} \quad ,$$

$$\left\|p_{T^\dagger(\mathcal{G})}\mu\right\|_{T^\dagger(\mathcal{G})} = \left\|\left(T^\dagger\right)_{\mathcal{G}}^{-1}\left(p_{T^\dagger(\mathcal{G})}\mu\right)\right\|_{\mathcal{G}} \quad ,$$

donc

$$\|\mu\|_{\mathcal{D}(T)_\beta^\dagger}^2 = \|p_{\mathcal{H}}\mu\|_{\mathcal{H}}^2 + \left\|\left(T^\dagger\right)_{\mathcal{G}}^{-1}\left(p_{T^\dagger(\mathcal{G})}\mu\right)\right\|_{\mathcal{G}}^2 \ .$$

Réciproquement si

$$\mu = \xi + T^\dagger\gamma \text{ avec } \xi \in \mathcal{H} \ , \ \gamma \in \mathcal{G} \quad \text{et} \quad \|\xi\|_{\mathcal{H}}^2 + \|\gamma\|_{\mathcal{G}}^2 \ \text{minimal,}$$

on a

$$\|\gamma\|_{\mathcal{G}} \geqslant \left\|T^\dagger\gamma\right\|_{T^\dagger(\mathcal{G})} \ ,$$

donc

$$\|\xi\|_{\mathcal{H}}^2 + \|\gamma\|_{\mathcal{G}}^2 \geqslant \|\xi\|_{\mathcal{H}}^2 + \left\|T^\dagger\gamma\right\|_{T^\dagger(\mathcal{G})}^2 \geqslant$$

$$\geqslant \|p_{\mathcal{H}}\mu\|_{\mathcal{H}}^2 + \left\|p_{T^\dagger(\mathcal{G})}\mu\right\|_{T^\dagger(\mathcal{G})}^2 = \|p_{\mathcal{H}}\mu\|_{\mathcal{H}}^2 + \left\|\left(T^\dagger\right)_{\mathcal{G}}^{-1}\left(p_{T^\dagger(\mathcal{G})}\mu\right)\right\|_{\mathcal{G}}^2 \ ;$$

la minimalité entraîne alors l'égalité, puis l'unicité pour la somme que

$$\xi = p_{\mathcal{H}}\mu \quad \text{et} \quad T^\dagger\gamma = p_{T^\dagger(\mathcal{G})}\mu \ ,$$

et finalement celle pour l'image que

$$\gamma = \left(T^\dagger\right)_{\mathcal{G}}^{-1}\left(p_{T^\dagger(\mathcal{G})}\mu\right) \ .$$

En outre

$$\|\mu\|^2_{\mathcal{D}(T)^\dagger_\beta} = \|p_{\mathcal{H}}\mu\|^2_{\mathcal{H}} + \left\|\left(T^\dagger\right)^{-1}_{\mathcal{G}}\left(p_{T^\dagger(\mathcal{G})}\mu\right)\right\|_{\mathcal{G}} = \|\xi\|^2_{\mathcal{H}} + \|\gamma\|^2_{\mathcal{G}} \ .$$

Pour terminer, soit $\theta \in \widehat{\mathcal{D}(T)}$ avec $\left(h^\dagger\widehat{h} + T^\dagger\widehat{T}\right)\theta = \mu$; on a alors

$$\|\xi\|^2_{\mathcal{H}} + \|\gamma\|^2_{\mathcal{G}} = \|\mu\|^2_{\mathcal{D}(T)^\dagger_\beta} = (\mu|\,\mu)_{\mathcal{D}(T)^\dagger_\beta} = \left\langle Q^{-1}\left(\widehat{h}^\dagger\widehat{h} + \widehat{T}^\dagger\widehat{T}\right)\theta \middle| \widehat{h}^\dagger\widehat{h}\theta + \widehat{T}^\dagger\widehat{T}\theta\right\rangle_{\widehat{\mathcal{D}(T)}} =$$

$$= \left\langle \theta|\,\widehat{h}^\dagger\widehat{h}\theta\right\rangle_{\widehat{\mathcal{D}(T)}} + \left\langle \theta|\,\widehat{T}^\dagger\widehat{T}\theta\right\rangle_{\widehat{\mathcal{D}(T)}} = \left\|\widehat{h}\theta\right\|^2_{\mathcal{H}} + \left\|\widehat{T}\theta\right\|^2_{\mathcal{G}} \ ;$$

par l'unicité on obtient $\xi = \widehat{h}\theta$ et $\gamma = \widehat{T}\theta$. □

En récapitulant les résultats obtenus on a le

THEOREME *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) T *est fermable.*

(ii) $h(F)$ *, ou* $\mathcal{H}$ *, est dense dans* $\mathcal{D}(T)^\dagger_\beta$ *.*

(iii) La semi-dualité $\left\langle \widehat{\mathcal{D}(T)} \middle| \mathcal{D}(T)^\dagger\right\rangle$ *est bien plongeable.*

Dans ce cas on a $\left\langle \mathcal{D}\left(\overline{T}\right) \middle| \mathcal{D}(T)^\dagger\right\rangle$ *est bien plongée et, pour tout* $\varphi \in F$ *,* $\theta \in \mathcal{D}\left(\overline{T}\right)$ *,* $\xi \in \mathcal{H}$ *et* $\mu \in \mathcal{D}(T)^\dagger$ *, on a*

$$\langle\varphi|\,\mu\rangle_F = \langle h\varphi|\,\mu\rangle_{\mathcal{D}(\overline{T})} \quad , \quad \langle\varphi|\,\theta\rangle_F = \langle h\varphi|\,\theta\rangle_{\mathcal{D}(T)^\dagger}$$

et

$$(\theta|\,\xi)_{\mathcal{H}} = \langle\theta|\,\xi\rangle_{\mathcal{D}(\overline{T})} \ .$$

En outre

$$Q := \mathrm{Id} + T^\dagger\overline{T} : \mathcal{D}\left(\overline{T}\right) \longrightarrow \mathcal{D}(T)^\dagger_\beta$$

est l'application de Riesz; les noyaux de

$$\mathcal{D}\left(\overline{T}\right) \hookrightarrow \mathcal{D}\left(\overline{T}\right) \quad , \quad \mathcal{D}\left(\overline{T}\right) \hookrightarrow \mathcal{H} \quad , \quad \mathcal{H} \hookrightarrow \mathcal{D}(T)^\dagger$$

et

$$\mathcal{D}(T)^\dagger_\beta \hookrightarrow \mathcal{D}(T)^\dagger \quad , \quad \mathcal{D}(T)^\dagger_\beta \hookrightarrow F^\dagger$$

sont respectivement

$$Q^{-1} : \mathcal{D}(T)^\dagger \longrightarrow \mathcal{D}\left(\overline{T}\right) \quad , \quad Q^{-1}{}_{|\mathcal{H}} : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{D}\left(\overline{T}\right) \quad , \quad \mathrm{Id} : \mathcal{D}\left(\overline{T}\right) \hookrightarrow \mathcal{H}$$

et

$$Q : \mathcal{D}\left(\overline{T}\right) \longrightarrow \mathcal{D}(T)^\dagger_\beta \quad , \quad Qh_T : F \longrightarrow \mathcal{D}(T)^\dagger_\beta \ .$$

Il suffit d'appliquer le corollaire 6.16. Remarquons premièrement que $h^\dagger\widehat{h} : \widehat{\mathcal{D}(T)} \longrightarrow F^\dagger$ est une factorisation continue de $h^\dagger h$, donc T est fermable – i.e. $\widehat{h}$ est injective – si, et seulement si, la condition (iii) de ce corollaire est satisfaite. Deuxièmement $\widehat{h}^{\dagger}h : F \longrightarrow \mathcal{D}(T)^{\dagger} : \varphi \longmapsto h\varphi$ est continue, donc $h(F)$ est dense dans $\mathcal{D}(T)^{\dagger}_{\beta}$, ou bien $\mathcal{H}$ est dense dans $\mathcal{D}(T)^{\dagger}_{\beta}$ (puisque $h(F)$ est dense dans $\mathcal{H}$) si, et seulement si, la condition (ii) du corollaire est satisfaite.

Les formules de dualité ne sont qu'une réécriture de celles de 6.16. Puisque nous identifions $\widehat{\mathcal{D}(T)}$ avec $\mathcal{D}\left(\overline{T}\right)$, l'application de Riesz a été calculée dans la proposition précédente. Finalement, on obtient les noyaux des différents sous-espaces hilbertiens en utilisant les formules de dualité. □

7.4 L'adjoint d'un opérateur

PROPOSITION *Soit $\gamma \in \mathcal{G}$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) Il existe $\xi \in \mathcal{H}$ tel que l'on ait

$$\left(\widehat{T}\theta\middle|\,\gamma\right)_{\mathcal{G}} = \left\langle\theta\middle|\,\widehat{T}^{\dagger}\gamma\right\rangle_{\widehat{\mathcal{D}(T)}} = \left(\widehat{h}\theta\middle|\,\xi\right)_{\mathcal{H}} \quad \text{pour tout } \theta \in \widehat{\mathcal{D}(T)} \ .$$

(ii) Il existe $\xi \in \mathcal{H}$ tel que l'on ait

$$(T\varphi|\,\gamma)_{\mathcal{G}} = \left\langle\varphi|\,T^{\dagger}\gamma\right\rangle_{F} = (h\varphi|\,\xi)_{\mathcal{H}} \quad \text{pour tout } \varphi \in F \ .$$

(iii) La forme semi-linéaire

$$\varphi \longmapsto (T\varphi|\,\gamma)_{\mathcal{G}} : F \longrightarrow \mathbb{K}$$

est continue pour la topologie semi-normée définie par $\varphi \longmapsto \langle\varphi|\,h\varphi\rangle^{\frac{1}{2}} = \|h\varphi\|_{\mathcal{H}}$ sur F .

(iv) $T^{\dagger}\gamma \in \mathcal{H}$.

Dans ce cas on a $\xi = T^{\dagger}\gamma$.

(i) $\Rightarrow$ (ii) C'est immédiat en posant $\theta := h_T\varphi$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Il suffit d'appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

(iii) $\Rightarrow$ (iv) Remarquons qu'il existe par (iii) une constante $c \in \mathbb{R}_+$ telle que

$$\left|\left\langle\varphi|\,T^{\dagger}\gamma\right\rangle_{\mathcal{D}(T)}\right| = \left|(T\varphi|\,\gamma)_{\mathcal{G}}\right| \leqslant c \cdot \langle\varphi|\,h\varphi\rangle^{\frac{1}{2}} \quad \text{pour tout } \varphi \in F \ ;$$

la proposition 6.3.ii montre alors que $T^{\dagger}\gamma \in \mathcal{H}$.

(iv) $\Rightarrow$ (i) Pour tout $\varphi \in F$, on a

$$\left(\widehat{T}h_T\varphi\middle|\,\gamma\right)_{\mathcal{G}} = \left\langle\varphi|\,T^{\dagger}\gamma\right\rangle = \left(h\varphi|\,T^{\dagger}\gamma\right)_{\mathcal{H}} \ ,$$

d'où le résultat et la formule, puisque $h_T(F)$ est dense dans $\widehat{\mathcal{D}(T)}$. □

DEFINITION On désigne par T^* l'opérateur dans $\mathcal{G}$ à valeurs dans $\mathcal{H}$ défini sur

$$D(T^*) = \left(T^{\dagger}\right)^{-1}(\mathcal{H}) = \left\{\gamma \in \mathcal{G} \;\middle|\; T^{\dagger}\gamma \in \mathcal{H}\right\}$$

par

$$T^*\gamma := T^{\dagger}\gamma \ .$$

On dit que T^* est l' *opérateur adjoint* et que

$$T^{\dagger} : \mathcal{G} \xrightarrow{\widehat{T}^{\dagger}} \mathcal{D}(T)^{\dagger} \hookrightarrow F^{\dagger}$$

est l' *adjoint formel* de T .

REMARQUE Si $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{G})$, la notion d'adjoint ainsi définie coïncide évidemment avec celle de 3.11.2 et on a $T^* = T^\dagger$, puisque nous identifions les semi-duals forts de $\mathcal{G}$ et $\mathcal{H}$.

Mais attention si T est un opérateur fermé non-borné dans $\mathcal{H}$, on a $T \in \mathcal{L}(\mathcal{D}(T), \mathcal{G})$ et, en identifiant le semi-dual fort de $\mathcal{D}(T)$ avec $\mathcal{D}(T)$, l'application linéaire adjointe $T^\dagger : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{D}(T)$ est évidemment différente de l'opérateur adjoint formel $T^\dagger : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{D}(T)^\dagger$, puisque nous n'avons pas identifié $\mathcal{D}(T)$ avec $\mathcal{D}(T)^\dagger_\beta$ et à la place considéré les injections canoniques

$$\mathcal{D}(T) \overset{j}{\hookrightarrow} \mathcal{H} \overset{j^\dagger}{\hookrightarrow} \mathcal{D}(T)^\dagger_\beta \ .$$

Ces deux applications adjointes sont liées par l'application de Riesz $Q : \mathcal{D}(T) \longrightarrow \mathcal{D}(T)^\dagger_\beta$.

THEOREME

(i) T^* *est un opérateur fermé et on a*

$$\mathcal{G} = \mathcal{D}(T^*) + \widehat{T}\left(\widehat{\mathcal{D}(T)}\right) \quad , \quad \mathcal{H} = \widehat{h}\left(\widehat{\mathcal{D}(T)}\right) + T^*(\mathcal{D}(T^*))$$

et

$$T^*(\mathcal{D}(T^*)) = \mathcal{H} \cap T^\dagger(\mathcal{G}) \ .$$

(ii) *Pour que* T *soit fermable, il faut et il suffit que* $\mathcal{D}(T^*)$ *soit dense dans* $\mathcal{G}$ *.*

(iii) *Si* T *est fermable, alors*

$$\mathcal{H} = \mathcal{D}\left(\overline{T}\right) + T^*(\mathcal{D}(T^*))$$

et, pour tout $\theta \in D\left(\overline{T}\right)$ *et* $\gamma \in D(T^*)$ *, on a*

$$\left(\overline{T}\theta \middle| \gamma\right)_{\mathcal{G}} = (\theta | T^*\gamma)_{\mathcal{H}} \ .$$

(iv) *On a les égalités*

$$\overline{T}^* = T^* \quad , \quad T^{**} = \overline{T} \quad , \quad T^{***} = T^* \ .$$

Démonstration de (i). Considérons une suite de Cauchy $(\gamma_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dans $\mathcal{D}(T^*)$, donc telle que $(\gamma_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(T^*\gamma_k)_{k\in\mathbb{N}}$ soient des suites de Cauchy dans $\mathcal{G}$ et $\mathcal{H}$ respectivement. Si $\gamma := \lim_k \gamma_k \in \mathcal{G}$ et $\xi := \lim_k T^*\gamma_k \in \mathcal{H}$ et comme les applications

$$T^\dagger : \mathcal{G} \longrightarrow F^\dagger \quad \text{et} \quad \mathcal{H} \hookrightarrow F^\dagger$$

sont continues, on a $T^\dagger\gamma = \lim_k T^\dagger\gamma_k$ et $\xi = \lim_k T^\dagger\gamma_k$ dans $F^\dagger$, donc $T^\dagger\gamma = \xi \in \mathcal{H}$. Ceci montre que $\gamma \in \mathcal{D}(T^*)$ et que $(\gamma_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathcal{D}(T^*)$ vers γ .

Le noyau de $\widehat{T}\left(\widehat{\mathcal{D}(T)}\right) \hookrightarrow \mathcal{G}$ est $\widehat{T}Q^{-1}\widehat{T}^\dagger$ par le théorème 6.4 et l'exemple 6.2.4, où $Q : \widehat{\mathcal{D}(T)} \longrightarrow \mathcal{D}(T)^\dagger_\beta$ désigne l'application de Riesz. Il nous suffit donc de montrer que celui de $\mathcal{D}(T^*) \hookrightarrow \mathcal{G}$ est $\mathrm{Id}_{\mathcal{G}} - \widehat{T}Q^{-1}\widehat{T}^\dagger$, donc que pour tout $\gamma \in \mathcal{G}$ et $\vartheta \in D(T^*)$, on a

$$\left(\mathrm{Id}_{\mathcal{G}} - \widehat{T}Q^{-1}\widehat{T}^\dagger\right)\gamma \in \mathcal{D}(T^*)$$

et

$$(\gamma | \vartheta)_{\mathcal{G}} = \left(\left(\mathrm{Id}_{\mathcal{G}} - \widehat{T}Q^{-1}\widehat{T}^\dagger\right)\gamma \middle| \vartheta\right)_{\mathcal{D}(T^*)} \ .$$

Mais

$$\widehat{T}^{\dagger}\left(\mathrm{Id}_{\mathcal{G}}-\widehat{T}Q^{-1}\widehat{T}^{\dagger}\right)=QQ^{-1}\widehat{T}^{\dagger}-\widehat{T}^{\dagger}\widehat{T}Q^{-1}\widehat{T}^{\dagger}=\left(Q-\widehat{T}^{\dagger}\widehat{T}\right)Q^{-1}\widehat{T}^{\dagger}=\widehat{h}^{\dagger}\widehat{h}Q^{-1}\widehat{T}^{\dagger} \qquad (*)$$

par la proposition 7.3.i; on a donc

$$T^{\dagger}\left(\mathrm{Id}_{\mathcal{G}}-\widehat{T}Q^{-1}\widehat{T}^{\dagger}\right)\gamma=h^{\dagger}\widehat{h}Q^{-1}\widehat{T}^{\dagger}\gamma\in\mathcal{H}\ ,$$

ce qui prouve l'appartenance. En outre

$$T^{*}\left(\gamma-\widehat{T}Q^{-1}\widehat{T}^{\dagger}\gamma\right)=\widehat{h}Q^{-1}\widehat{T}^{\dagger}\gamma\ ;$$

on a alors

$$\left(\left(\mathrm{Id}_{\mathcal{G}}-\widehat{T}Q^{-1}\widehat{T}^{\dagger}\right)\gamma\middle|\,\vartheta\right)_{\mathcal{D}(T^{*})}=\left(\gamma-\widehat{T}Q^{-1}\widehat{T}^{\dagger}\gamma\middle|\,\vartheta\right)_{\mathcal{G}}+\left(\widehat{h}Q^{-1}\widehat{T}^{\dagger}\gamma\middle|\,T^{*}\vartheta\right)_{\mathcal{H}}=$$

$$=(\gamma|\,\vartheta)_{\mathcal{G}}-\left\langle Q^{-1}\widehat{T}^{\dagger}\gamma\middle|\,\widehat{T}^{\dagger}\vartheta\right\rangle_{\widehat{\mathcal{D}(T)}}+\left\langle Q^{-1}\widehat{T}^{\dagger}\gamma\middle|\,\widehat{h}^{\dagger}T^{*}\vartheta\right\rangle_{\widehat{\mathcal{D}(T)}}=(\gamma|\,\vartheta)_{\mathcal{G}}\ .$$

Le noyau de $\widehat{h}\left(\widehat{\mathcal{D}(T)}\right)=\widehat{h}^{\dagger}\widehat{h}\left(\widehat{\mathcal{D}(T)}\right)\hookrightarrow\mathcal{D}(T)^{\dagger}$ est

$$\widehat{h}^{\dagger}\widehat{h}Q^{-1}\left(\widehat{h}^{\dagger}\widehat{h}\right)^{\dagger}=\widehat{h}^{\dagger}\widehat{h}Q^{-1}\widehat{h}^{\dagger}\widehat{h}$$

par le théorème 6.4 et l'exemple 6.2.4. Celui de $T^{*}(\mathcal{D}(T^{*}))=\widehat{T}^{\dagger}(\mathcal{D}(T^{*}))\hookrightarrow\mathcal{D}(T)^{\dagger}$ est

$$\widehat{T}^{\dagger}\left(\mathrm{Id}_{\mathcal{G}}-\widehat{T}Q^{-1}\widehat{T}^{\dagger}\right)\widehat{T}=\widehat{h}^{\dagger}\widehat{h}Q^{-1}\widehat{T}^{\dagger}\widehat{T}$$

par la formule $(*)$. Les propositions 6.7 et 7.3 montrent donc que le noyau de

$$\widehat{h}\left(\widehat{\mathcal{D}(T)}\right)+T^{*}(\mathcal{D}(T^{*}))\hookrightarrow\mathcal{D}(T)^{\dagger}$$

est égal à celui de $\mathcal{H}\hookrightarrow\mathcal{D}(T)^{\dagger}$:

$$\widehat{h}^{\dagger}\widehat{h}Q^{-1}\widehat{h}^{\dagger}\widehat{h}+\widehat{h}^{\dagger}\widehat{h}Q^{-1}\widehat{T}^{\dagger}\widehat{T}=\widehat{h}^{\dagger}\widehat{h}Q^{-1}\left(\widehat{h}^{\dagger}\widehat{h}+\widehat{T}^{\dagger}\widehat{T}\right)=\widehat{h}^{\dagger}\widehat{h}Q^{-1}Q=\widehat{h}^{\dagger}\widehat{h}\ .$$

Pour calculer le noyau de

$$\mathcal{H}\cap\widehat{T}^{\dagger}(\mathcal{G})=\mathcal{H}\cap T^{\dagger}(\mathcal{G})\hookrightarrow\mathcal{H}+T^{\dagger}(\mathcal{G})=\mathcal{D}(T)^{\dagger}_{\beta}$$

– cf. proposition 7.3.i – nous allons utiliser la proposition 6.9, mais attention en considérant la semi-dualité $\left\langle\mathcal{D}(T)^{\dagger}_{\beta}\middle|\,\mathcal{D}(T)^{\dagger}_{\beta}\right\rangle$. Les noyaux de $\mathcal{H}$, $\widehat{T}^{\dagger}(\mathcal{G})$ et $\mathcal{H}\cap\widehat{T}^{\dagger}(\mathcal{G})$ sont alors respectivement $\widehat{h}^{\dagger}\widehat{h}Q^{-1}$, $\widehat{T}^{\dagger}\widehat{T}Q^{-1}$ et $\widehat{h}^{\dagger}\widehat{h}Q^{-1}\widehat{T}^{\dagger}\widehat{T}Q^{-1}$, d'où le résultat.

Démonstration de (ii). Par définition et en utilisant la proposition 2.9.ii, on a

$$D(T^{*})=\widehat{T}^{\dagger-1}\left(\widehat{h}^{\dagger}(\mathcal{H})\right)=\widehat{T}\left(\mathrm{Ker}\,\widehat{h}\right)^{\perp\mathcal{G}}\ ,$$

ce qui montre que $\widehat{T}$ applique $\mathrm{Ker}\,\widehat{h}$ surjectivement sur $D(T^{*})^{\perp\mathcal{G}}$. Mais

$$\mathrm{Ker}\,\widehat{h}=\mathrm{Ker}\,\widehat{h}^{\dagger}\widehat{h}=\mathrm{Ker}\,Q\left(\mathrm{Id}_{\widehat{\mathcal{D}(T)}}-Q^{-1}\widehat{T}^{\dagger}\widehat{T}\right)=\mathrm{Ker}\left(\mathrm{Id}_{\widehat{\mathcal{D}(T)}}-Q^{-1}\widehat{T}^{\dagger}\widehat{T}\right)\ ,$$

donc $Q^{-1}\widehat{T}^{\dagger}\widehat{T}$ est l'identité sur $\operatorname{Ker}\widehat{h}$. On en déduit que $\widehat{T}$ est injective sur $\operatorname{Ker}\widehat{h}$, donc une bijection de $\operatorname{Ker}\widehat{h}$ sur $D\left(T^*\right)^{\perp\mathcal{G}}$. Le résultat en découle évidemment.

Démonstration de (iii). La première formule est immédiate, puisque $\mathcal{D}\left(\overline{T}\right) = \widehat{h}\left(\widehat{\mathcal{D}\left(T\right)}\right)$. La seconde n'est qu'une reformulation de la proposition.

Démonstration de (iv). On a évidemment $\overline{T}^* = T^*$, car $\overline{T}^{\dagger} = \widehat{T}^{\dagger}$ et $T^{\dagger}$ prennent les mêmes valeurs sur les mêmes éléments de $\mathcal{G}$. Comme $\mathcal{D}\left(T^*\right)$ est dense dans $\mathcal{G}$, on peut considérer T^{**} . On a alors

$$\mathcal{D}\left(\overline{T}\right) + T^*\left(\mathcal{D}\left(T^*\right)\right) = \mathcal{H} = \mathcal{D}\left(T^{**}\right) + T^*\left(\mathcal{D}\left(T^*\right)\right)$$

par (iii) , et (i) appliqué à T^* . On en déduit $\mathcal{D}\left(T\right) = \mathcal{D}\left(T^{**}\right)$ par comparaison des noyaux. Pour tout $\theta \in \mathcal{D}\left(\overline{T}\right)$ et $\gamma \in \mathcal{D}\left(T^*\right)$, il vient alors

$$\left(\overline{T}\theta\middle|\,\gamma\right)_{\mathcal{G}} = \left(\theta\middle|\,T^*\theta\right)_{\mathcal{H}} = \left(T^{**}\theta\middle|\,\gamma\right)_{\mathcal{G}} \ ,$$

donc $T^{**} = \overline{T}$. La dernière formule est alors évidente. □

7.5 Opérations sur les opérateurs non-bornés

DEFINITION Si S et T sont des opérateurs dans $\mathcal{H}$ à valeurs dans $\mathcal{G}$, on définit l'opérateur *somme* $S+T$ par

$$S+T : D(S+T) := D(S) \cap D(T) \longrightarrow \mathcal{G} : \xi \longmapsto S\xi + T\xi \ .$$

Si S est un opérateur dans $\mathcal{G}$ à valeurs dans un espace de Hilbert $\mathcal{K}$, l'opérateur *produit* ST est définit par

$$ST : D(ST) := \overset{-1}{T}(D(S)) \longrightarrow \mathcal{K} : \xi \longmapsto S(T\xi) \ .$$

Si T est injectif, on définit l'opérateur *inverse* $\overset{-1}{T}$ dans $\mathcal{G}$ à valeurs dans $\mathcal{H}$ par

$$\overset{-1}{T} : D\left(\overset{-1}{T}\right) := T(D(T)) \longrightarrow \mathcal{H} : T\xi \longmapsto \xi \ .$$

Mais attention, on dit que T est *inversible* , si T est une bijection de $D(T)$ sur $\mathcal{G}$ et $\overset{-1}{T} \in \mathcal{L}(\mathcal{G},\mathcal{H})$.

THEOREME *Soient T un opérateur dans $\mathcal{H}$ à valeurs dans $\mathcal{G}$ et S,U des opérateurs entre espaces de Hilbert tels que les formules qui suivent aient un sens.*

(i) *On a*

$$S+T = T+S \quad , \quad (S+T)+U = S+(T+U)$$

et

$$(ST)U = S(TU) \quad , \quad (S+T)U = SU+TU \ ,$$

mais seulement

$$S(T+U) \supset ST+SU \ .$$

(ii) *Si S est borné, alors*

$$S(T+U) = ST+SU \ .$$

(iii) *Si S est borné et T fermé, alors $S+T$ et TS sont fermés.*

(iv) *Si T est injectif et fermé, alors $\overset{-1}{T}$ est injectif et fermé et*

$$\mathcal{D}\left(\overset{-1}{T}\right) = T(\mathcal{D}(T)) \ .$$

Nous supposons maintenant que S et T sont de domaine dense.

(v) *Si $S \subset T$, alors $T^* \subset S^*$.*

(vi) *Si $S+T$ est de domaine dense, alors $(S+T)^* \supset S^*+T^*$. Si S est borné, alors $(S+T)^* = S^*+T^*$.*

(vii) *Si ST est de domaine dense, alors* $(ST)^* \supset T^*S^*$. *Si S est borné, alors* $(ST)^* = T^*S^*$.

(viii) *On a*

$$\operatorname{Im} T^{\perp} = \operatorname{Ker} T^* \ .$$

(ix) *Si T est fermé, injectif et d'image dense, alors il en est de même de* $\overset{-1}{T}$ *et* T^* *et on a*

$$\mathcal{D}\left(\left[\overset{-1}{T}\right]^*\right) = T^*\left(\mathcal{D}\left(T^*\right)\right) \quad et \quad \left[T^*\right]^{-1} = \left[\overset{-1}{T}\right]^* \ .$$

Démonstration de (i). Les formules pontuelles sont triviales du moment qu'elles ont un sens. Le seul problème est celui des domaines de définition, ce qu'il n'est pas difficile de vérifier.

Démonstration de (ii). Idem.

Démonstration de (iii). Il suffit d'utiliser le théorème 7.1.ii. Soit $(\xi_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset D(S+T) = D(T)$ telle que $\xi := \lim_k \xi_k$ et $\gamma := \lim_k (S+T)\xi_k$ existent. On en déduit $S\xi = \lim_k S\xi_k$, puisque S est continu, puis que la suite $(T\xi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge et que

$$\gamma - S\xi = \lim_k (S+T)\xi_k - \lim_k S\xi_k = \lim_k T\xi_k \ .$$

Ceci montre que $\xi \in D(T)$ et $T\xi = \gamma - S\xi$, puisque T est fermé, donc

$$\xi \in D(S+T) \quad \text{et} \quad \psi = (S+T)\xi \ ,$$

i.e. $S+T$ est fermé.

Si maintenant $(\xi_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset D(TS)$ est telle que $\xi := \lim_k \xi_k$ et $\gamma := \lim_k TS\xi_k$ existent, on a $S\xi = \lim_k S\xi_k$, puisque S est continu. Mais comme $(S\xi_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset D(T)$ et que T est fermé, on obtient $S\xi \in D(T)$ et

$$TS\xi = \lim_k TS\xi_k = \gamma \ ,$$

ce qui prouve que TS est fermé.

Démonstration de (iv). C'est immédiat, puisque

$$\operatorname{Gr} \overset{-1}{T} = \%\left(\operatorname{Gr} T\right)$$

et

$$\% : \mathcal{H} \times \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G} \times \mathcal{H} : (\xi,\gamma) \longmapsto (\gamma,\xi)$$

est unitaire.

Démonstration de (v). Cela découle de la proposition 7.4.

Démonstration de (vi). Pour la première partie, il suffit d'utiliser la proposition 7.4. Si $S \in \mathcal{L}(\mathcal{H},\mathcal{G})$, on a $T+S = T+S_{|\mathcal{D}(T)}$, donc $(T+S)^\dagger = T^\dagger + \left(S_{|\mathcal{D}(T)}\right)^\dagger$, d'où le résultat, puisque $\overline{S_{|\mathcal{D}(T)}} = S$, $\left(S_{|\mathcal{D}(T)}\right)^* = \left(\overline{S_{|\mathcal{D}(T)}}\right)^* = S^*$ et $D(S^*) = \mathcal{G}$.

Démonstration de (vii). Pour la première partie, il suffit d'utiliser la proposition 7.4. Si $S \in \mathcal{L}(\mathcal{G},\mathcal{K})$, on a $(ST)^\dagger = T^\dagger S^*$, donc pour tout $\varkappa \in \mathcal{K}$, on a $\varkappa \in D([ST]^*)$ si, et seulement si, $T^\dagger S^*\varkappa \in \mathcal{H}$, i.e. si $S^*\varkappa \in D(T^*)$; mais ceci signifie que $\varkappa \in D(T^*S^*)$.

Démonstration de (viii). C'est immédiat, puisque $\gamma \in (\operatorname{Im} T)^{\perp}$ si, et seulement si, pour tout $\varphi \in F$, on a

$$0 = (T\varphi|\,\gamma)_{\mathcal{G}} = \left\langle \varphi|\, T^{\dagger}\gamma \right\rangle \ ,$$

i.e. $T^{\dagger}\gamma = 0$, ce qui signifie que $\gamma \in D(T^*)$ et $T^*\gamma = 0$.

Démonstration de (ix). Rappelons que T est de domaine dense, et d'image dense, donc aussi $\overset{-1}{T}$ et cet opérateur est fermé par (iv) . Pour tout $\gamma \in T(\mathcal{D}(T))$, on a

$$\|\gamma\|^2_{T(\mathcal{D}(T))} = \left\|\overset{-1}{T}\gamma\right\|^2_{\mathcal{D}(T)} = \left\|\overset{-1}{T}\gamma\right\|^2_{\mathcal{H}} + \|\gamma\|^2_{\mathcal{G}} = \|\gamma\|^2_{\mathcal{D}\left(\overset{-1}{T}\right)} \ ,$$

d'où la première formule. L'adjoint T^* est injectif et d'image dense par (viii) appliqué à T et T^* . Puisque le théorème 7.6.iii appliqué à $T = \overline{T}$ et $\left(\overset{-1}{T}\right)^*$ entraîne

$$\mathcal{D}(T) + T^*(\mathcal{D}(T^*)) = \mathcal{H} = \mathcal{D}\left(\left[\overset{-1}{T}\right]^*\right) + \overset{-1}{T}\left(\mathcal{D}\left(\overset{-1}{T}\right)\right) =$$

$$= \mathcal{D}\left(\left[\overset{-1}{T}\right]^*\right) + \overset{-1}{T}(T(\mathcal{D}(T))) = \mathcal{D}\left(\left[\overset{-1}{T}\right]^*\right) + \mathcal{D}(T) \ ,$$

par comparaison des noyaux on obtient

$$\mathcal{D}\left(\left[\overset{-1}{T}\right]^*\right) = T^*(\mathcal{D}(T^*)) = \mathcal{D}\left([T^*]^{-1}\right) \ .$$

Pour tout $\gamma \in \mathcal{D}\left(\overset{-1}{T}\right)$ et $\vartheta \in \mathcal{D}(T^*)$, on a $T^*\vartheta \in \mathcal{D}\left(\left[\overset{-1}{T}\right]^*\right)$, donc

$$(\gamma|\,\vartheta)_{\mathcal{G}} = \left(T\overset{-1}{T}\gamma\middle|\,\vartheta\right)_{\mathcal{G}} = \left(\overset{-1}{T}\gamma\middle|\,T^*\vartheta\right)_{\mathcal{H}} = \left(\gamma\middle|\,\left[\overset{-1}{T}\right]^* T^*\vartheta\right)_{\mathcal{G}} \ ;$$

ainsi $\left[\overset{-1}{T}\right]^* T^* = \mathrm{Id}$ sur $\mathcal{D}(T^*)$, ce qui finit de prouver la seconde formule. □

REMARQUE 1 Même si S et T sont des opérateurs fermés de domaine dense, il se peut que $S+T$ et ST ne le soient pas. On peut par exemple avoir $D(T^2) = \{0\}$, où T est un opérateur fermé symétrique (cf. remarque 7.6.2) de domaine dense. Dans ce cas on a

$$D(T(T-T)) = D(T) \quad \text{et} \quad D\left(T^2 - T^2\right) = D\left(T^2\right) = \{0\} \ ,$$

ce qui montre quer l'inclusion $S(T+U) \supset ST + SU$ peut être stricte. De même

$$D((T-T)^*) = \mathcal{H} \quad \text{et} \quad D(T^* - T^*) = D(T^*)$$

et si T est un opérateur borné avec $\operatorname{Im} T \subset D(S)$, alors

$$D((ST)^*) = \mathcal{H} \quad \text{et} \quad D(T^*S^*) = D(S^*) \ .$$

PROPOSITION *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) *T est inversible.*

(ii) *Il existe* $S \in \mathcal{L}(\mathcal{G}, \mathcal{H})$ *tel que* $ST \subset \mathrm{Id}_{\mathcal{H}}$ *et* $TS = \mathrm{Id}_{\mathcal{G}}$.

(iii) T *est fermé et* T *est une bijection de* $D(T)$ *sur* $\mathcal{G}$.

Dans ce cas $\overset{-1}{T} = S$.

Il est immédiat que (i) entraîne (ii). Si (ii) est satisfait, la bijectivité de T est immédiate et on a $\overset{-1}{T} = S \in \mathcal{L}(\mathcal{G}, \mathcal{H})$, donc T est fermé par la remarque 2.14.1 et (iv) de la proposition ci-dessus. La dernière implication découle du scolie 7.1, puisque $\overset{-1}{T}$ est fermé à nouveau par (iv) et partout défini. □

7.6 Opérateurs formellement normaux

Nous considérerons en plus
un espace localement convexe séparé E
et
un sous-espace hilbertien $\mathcal{G} \hookrightarrow E^{\dagger}$ de noyau $g : E \longrightarrow \mathcal{G}$.

DEFINITION 1 Nous dirons que T est *adjoignable* (par rapport à $G \hookrightarrow E^{\dagger}$) s'il existe une application linéaire continue $T^{\bullet} : E \longrightarrow \mathcal{H}$ telle que l'on ait

$$h^{\dagger}T^{\bullet} = T^{\dagger}g \ . \qquad (*)$$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G} & \xrightarrow{T^{\dagger}} & F^{\dagger} \\ g \uparrow & & \uparrow h^{\dagger} \\ E & \xrightarrow{T^{\bullet}} & \mathcal{H} \end{array}$$

Il est clair, puisque $h^{\dagger}$ est injective, que $T^{\bullet}$ est univoquement déterminée.

REMARQUE 1 L'existence de l'application linéaire $T^{\bullet}$ est équivalente à l'inclusion

$$T^{\dagger}g(E) \subset \mathcal{H} \ .$$

Dans ce cas, comme $h^{\dagger}T^{\bullet} = T^{\dagger}g : E \longrightarrow F^{\dagger}$ est continue, le graphe de $T^{\bullet}$ est fermé dans $E \times \mathcal{H}$. L'application linéaire $T^{\bullet}$ est donc automatiquement continue par le théorème de Ptak 2.14.i si E est tonnelé.

THEOREME *Si T est adjoignable, alors $T^{\bullet}$ l'est aussi et $(T^{\bullet})^{\bullet} = T$. Les applications linéaires T et $T^{\bullet}$ sont fermables et on a*

$$\overline{T} \subset (T^{\bullet})^{*} \quad et \quad \overline{T^{\bullet}} \subset T^{*} \ .$$

La première partie est évidente puisque $(*)$ entraîne

$$(T^{\bullet})^{\dagger} h = g^{\dagger}T \ . \qquad (**)$$

D'autre part $T^{\dagger}g(E) = h^{\dagger}T^{\bullet}(E) \subset \mathcal{H}$, donc $g(E) \subset \mathcal{D}(T^{*})$, ce qui montre que $\mathcal{D}(T^{*})$ est dense dans $\mathcal{G}$, et par suite que T est fermable par le théoreme 7.4.ii. La formule $(**)$ montre alors que $\overline{T} \subset (T^{\bullet})^{*}$. □

DEFINITION 2 Si T est à valeurs dans $\mathcal{H}$, on dit que T est *formellement auto-adjointe* si

$$h^{\dagger}T = T^{\dagger}h \quad , \text{i.e. } T = T^{\bullet} \ .$$

REMARQUE 2 Pour qu'un opérateur T dans $\mathcal{H}$ soit formellement auto-adjoint, il faut et il suffit que l'on ait $T \subset T^*$, ou bien

$$(T\xi|\,\eta) = (\xi|\,T\eta) \quad \text{pour tout } \xi, \eta \in D(T) \ .$$

C'est la définition classique et on dit que T est *symétrique* .

COROLLAIRE *Si T est formellement auto-adjointe et S est un prolongement symétrique fermé de $\overline{T}$, alors*

$$\overline{T} = T^{**} \subset S \subset S^* \subset T^* = T^{***} = \overline{T}^* \ .$$

D'autre part $\mathcal{D}\left(\overline{T}\right) \sqsubset \mathcal{D}\left(T^*\right)$ et

$$\mathcal{H} = \mathcal{D}\left(\overline{T}\right) + T^*\left(\mathcal{D}\left(T^*\right)\right) = \mathcal{D}\left(T^*\right) + \overline{T}\left(\mathcal{D}\left(\overline{T}\right)\right) \ .$$

C'est immédiat par le théorème 7.4. D'autre part $\overline{T} \subset T^*$ entraîne l'égalité des produits scalaires sur $\mathcal{D}\left(\overline{T}\right)$. □

L'un des problèmes fondamentaux de la théorie des opérateurs symétriques est de déterminer tous les prolongements S de T , qui sont auto-adjoints, i.e. tels que $S = S^*$, s'il en existe !

Plus généralement nous poserons la

DEFINITION 3 Si T est à valeurs dans $\mathcal{H}$, nous dirons que T est *formellement normale* si T est adjoignable par rapport à $\mathcal{H} \hookrightarrow F^\dagger$ et

$$T^\dagger T = T^{\bullet\dagger} T^\bullet \ .$$

PROPOSITION *Supposons que T soit adjoignable par rapport à $\mathcal{H} \hookrightarrow F^\dagger$. Pour que T soit formellement normale, il faut et il suffit que*

$$\mathcal{D}\left(\overline{T}\right) \sqsubset \mathcal{D}\left(T^*\right) \ .$$

Pour tout $\varphi, \psi \in F$, on a

$$\left\langle \varphi \middle|\, T^\dagger T\psi \right\rangle = (T\varphi|\,T\psi) = \left(\overline{T}h\varphi\middle|\,\overline{T}h\psi\right)$$

et

$$\left\langle \varphi \middle|\, T^{\bullet\dagger} T^\bullet\psi \right\rangle = (T^\bullet\varphi|\,T^\bullet\psi) = (T^*h\varphi|\,T^*h\psi) \ ,$$

puisque $T^\bullet\varphi = T^\dagger h\varphi = T^*h\varphi$. Ainsi T est formellement normale si, et seulement si,

$$(h\varphi|\,h\psi)_{\mathcal{D}\left(\overline{T}\right)} = (h\varphi|\,h\psi)_{\mathcal{D}(T^*)} \quad \text{pour tout } \varphi, \psi \in F \ ,$$

d'où notre assertion. □

7.7 Opérateurs normaux

DEFINITION Si T à valeurs dans $\mathcal{H}$, nous dirons que T est *essentiellement normale* , respectivement *essentiellement auto-adjointe* , si $\mathcal{D}\left(\overline{T}\right) = \mathcal{D}(T^*)$, respectivement $\overline{T} = T^*$. Lorsque T est un opérateur fermé dans $\mathcal{H}$, on dit que T est *normal* , respectivement *auto-adjoint* .

Un opérateur auto-adjoint T est dit *autoadjoint positif* , si $(\xi | T\xi) \geqslant 0$ pour tout $\xi \in \mathcal{D}(T)$.

Il est clair que T est essentiellement auto-adjointe si, et seulement si, T est essentiellement normale et formellement auto-adjointe.

LEMME *Soit T un opérateur fermé. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) T *est normal, i.e.* $\mathcal{D}(T) = \mathcal{D}(T^*)$.

(ii) $D(T) = D(T^*)$ *et* $\|T\varphi\| = \|T^*\varphi\|$ *pour tout* $\varphi \in D(T)$.

(iii) $T(\mathcal{D}(T)) = T^*(\mathcal{D}(T^*))$.

(iv) $\mathcal{H} = \mathcal{D}(T) + T(\mathcal{D}(T))$.

L'assertion (ii) n'est qu'une reformulation de (i). Le reste découle immédiatement du théorème 7.4, puisqu'on a la formule

$$\mathcal{D}(T) + T^*(\mathcal{D}(T^*)) = \mathcal{H} = \mathcal{D}(T^*) + T(\mathcal{D}(T)) \ . \quad \square$$

PROPOSITION

(i) Un opérateur normal ne possède pas d'extension normale stricte.

(ii) Si T est injectif, d'image dense et normal, respectivement auto-adjoint, alors $\overset{-1}{T}$ est normal, respectivement auto-adjoint.

(iii) Si T est auto-adjoint et S est un opérateur borné auto-adjoint, alors $T+S$ est auto-adjoint.

Démonstration de (i). Si S et T sont des opérateurs normaux avec $S \subset T$, alors $T^* \subset S^*$ par la théorème 7.5.v. On a alors

$$D(S) \subset D(T) = D(T^*) \subset D(S^*) = D(S) \ ,$$

donc $S = T$.

Démonstration de (ii). A l'aide du théorème 7.5, (iv) et (ix), et de la proposition ci-dessus, on a

$$\mathcal{D}\left(\overset{-1}{T}\right) = T(\mathcal{D}(T)) = T^*(\mathcal{D}(T^*)) = \mathcal{D}\left([T^*]^{-1}\right) = \mathcal{D}([\overset{-1}{T}]^*))$$

si T est normal. Si T est auto-adjoint, alors T est symétrique, donc aussi $\overset{-1}{T}$ (cf. remarque 7.3.2), ce qui montre que $\overset{-1}{T}$ est auto-adjoint.

Démonstration de (iii). C'est immédiate à l'aide de la théorème 7.5.vi. □

THEOREME *On suppose que T est formellement normale.*

(i) On a

$$\operatorname{Ker}\left(\operatorname{Id}+T^{\bullet\dagger}T^{*}\right)=D\left(\overline{T}\right)^{\perp\mathcal{D}(T^{*})} .$$

(ii) Pour que T soit essentiellement normale, il faut et il suffit que que

$$\operatorname{Id}+T^{\bullet\dagger}T^{*}:\mathcal{D}\left(T^{*}\right)\longrightarrow F^{\dagger}$$

soit injective.

Démonstration de (i). Il suffit de constater que $\vartheta\in D\left(\overline{T}\right)^{\perp\mathcal{D}(T^{*})}$ est caractérisé par

$$0=\left(h\varphi|\,\vartheta\right)_{T^{*}}=\left(h\varphi|\,\vartheta\right)+\left(T^{*}h\varphi|\,T^{*}\vartheta\right)=\left(h\varphi|\,\vartheta\right)+\left(T^{\bullet}h\varphi|\,T^{*}\vartheta\right)=$$

$$=\left\langle\varphi|\left(\operatorname{Id}+T^{\bullet\dagger}T^{*}\right)\vartheta\right\rangle$$

pour tout $\varphi\in F$, i.e. $\vartheta\in\operatorname{Ker}\left(\operatorname{Id}+T^{\bullet\dagger}T^{*}\right)$.

Démonstration de (ii). C'est immédiat par la proposition 7.6 et (i). □

COROLLAIRE *On suppose que T est formellement auto-adjointe. Pour que T soit essentiellement auto-adjointe, il faut et il suffit que*

$$T^{*}\pm i\cdot\operatorname{Id}:\mathcal{D}\left(T^{*}\right)\longrightarrow\mathcal{H}$$

soient injectives, i.e. $\operatorname{Im}\left(T\pm i\cdot\operatorname{Id}\right)$ *dense dans* $\mathcal{H}$.

On a toujours

$$\operatorname{Ker}T^{*}=\operatorname{Ker}T^{\dagger} ,$$

car si $\xi\in\mathcal{H}$ et $T^{\dagger}\xi=0$, on a évidemment $\xi\in D\left(T^{*}\right)$. Il vient alors

$$\operatorname{Ker}\left(T^{\dagger}\pm i\cdot\operatorname{Id}\right)=\operatorname{Ker}\left(T\mp i\cdot\operatorname{Id}\right)^{\dagger}=\operatorname{Ker}\left(T\mp i\cdot\operatorname{Id}\right)^{*}=\operatorname{Ker}\left(T^{*}\pm i\cdot\operatorname{Id}\right) .$$

Puisque T est formellement auto-adjointe, i.e. $T^{\bullet}=T$, on a

$$T^{\bullet\dagger}=T^{\dagger}=T^{*}\quad\text{sur }\mathcal{D}\left(^{*}\right) ,$$

donc

$$\left(T^{\dagger}\mp i\cdot\operatorname{Id}\right)\left(T^{*}\pm i\cdot\operatorname{Id}\right)=T^{\dagger}T^{*}\pm i\cdot T^{\dagger}\mp i\cdot T^{*}+\operatorname{Id}=T^{\bullet\dagger}T^{*}+\operatorname{Id}\quad\text{sur }\mathcal{D}\left(T^{*}\right) .$$

On en déduit immédiatement le corollaire. □

EXEMPLE (Les opérateurs de multiplication)

Si μ est une intégrale de Radon sur un espace topologique séparé et α est une fonction μ-mesurable, on définit l'opérateur de multiplication M_{α} par α dans $\mathbf{L}^{2}\left(\mu\right)$ sur

$$D\left(\alpha\right):=\left\{\xi\in\mathbf{L}^{2}\left(\mu\right)\;\middle|\;\alpha\cdot\xi\in\mathbf{L}^{2}\left(\mu\right)\right\}$$

par

$$\xi \longmapsto \alpha \cdot \xi \ .$$

Nous étudirons ces opérateurs sous une forme encore plus générale dans le chapitre 8. Nous verrons en particulier que ce sont des opérateurs normaux.

EXERCICE Trouver un exemple montrant que l'assertion (iii) de la proposition est fausse pour les opérateurs normaux sans hypothèses supplémentaires.

7.8 L'algèbre stellaire associée à un opérateur fermé

Soient T un opérateur fermé dans $\mathcal{H}$ à valeurs dans $\mathcal{G}$ et Q l'application de Riesz de $\mathcal{D}(T)$ sur $\mathcal{D}(T)^{\dagger}_{\beta}$. On considère les opérateurs

$$A := Q^{-1}{}_{|\mathcal{H}} : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{D}(T) \hookrightarrow \mathcal{H}$$

et

$$B := TQ^{-1}{}_{|\mathcal{H}} : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{D}(T) \longrightarrow \mathcal{G} \ .$$

THEOREME

(i) A est le noyau de $\mathcal{D}(T) \hookrightarrow \mathcal{H}$ et c'est un opérateur auto-adjoint positif de norme $\leqslant 1$. L'opérateur B est aussi de norme $\leqslant 1$.

(ii) On a

$$Q = \mathrm{Id} + T^{\dagger}T \quad , \quad A = (\mathrm{Id} + T^*T)^{-1} \quad , \quad B = T\,(\mathrm{Id} + T^*T)^{-1} \ ,$$

et

$$\mathcal{D}(T) = A(\mathcal{H}) + B(\mathcal{H}) \quad , \text{ i.e. } \quad A^2 + B^*B = A \ .$$

(iii) Les sous-espaces hilbertiens $\mathcal{D}(T^*T)$ et $A(\mathcal{H})$ sont équivalents et denses dans $\mathcal{D}(T)$ et

$$T = \overline{BA^{-1}} \ .$$

(iv) L'opérateur T^*T est de domaine dense et auto-adjoint positif.

(v) Si T est à valeurs dans $\mathcal{H}$, alors T est normal si, et seulement si, $T^*T = TT^*$.

Démonstration de (i). La première assertion découle du théorème 7.3. Puisque $\mathcal{H} = \mathcal{D}(T) + T^*(\mathcal{D}(T^*))$ par le théorème 7.4.iii, il suffit d'appliquer le théorème 6.7, i et ii.

Démonstration de (ii). La première formule découle aussi du théorème 7.4. En outre

$$D(T^*T) = \{\xi \in \mathcal{D}(T) \mid T\xi \in D(T^*)\} = \left\{\xi \in \mathcal{D}(T) \;\middle|\; T^{\dagger}T\xi \in \mathcal{H}\right\} = Q^{-1}(\mathcal{H}) = A(\mathcal{H}) \ ,$$

ce qui montre que $A = (\mathrm{Id} + T^*T)^{-1}$. La troisième formule en découle. Pour tout $\xi, \eta \in \mathcal{H}$, on a alors

$$\left(\xi \middle| \left(A^2 + B^*B\right)\eta\right)_{\mathcal{H}} = (A\xi|\, A\eta)_{\mathcal{H}} + (B\xi|\, B\eta)_{\mathcal{G}} = (A\xi|\, A\eta)_{\mathcal{H}} + (TA\xi|\, TA\eta)_{\mathcal{G}} =$$

$$= (A\xi|\, A\eta)_{\mathcal{H}} + (T^*TA\xi|\, A\eta)_{\mathcal{H}} = ((\mathrm{Id} + T^*T)\,A\xi|\, A\eta)_{\mathcal{H}} = (\xi|\, A\eta)_{\mathcal{H}} \ ,$$

ce qui prouve la quatrième formule en utilisant le théorème de l'image 6.4 et la proposition 6.7.

Démonstration de (iii). L'exemple 6.11.2 montre, puisque $A(\mathcal{H}) = D(T^*T)$, que les sous-espaces hilbertiens $A(\mathcal{H})$ et $\mathcal{D}(T^*T)$ sont équivalents. Comme A est le noyau de $\mathcal{D}(T) \hookrightarrow \mathcal{H}$, le sous-espace vectoriel $A(\mathcal{H})$ est dense dans $\mathcal{D}(T)$ par la proposition 6.3.i ; la formule $T = \overline{BA^{-1}}$ en découle par la proposition 7.2.ii.

Démonstration de (iv). Comme l'opérateur A est auto-adjoint, la proposition 7.7 montre que T^*T est aussi auto-adjoint. Il est évidemment positif.

Démonstration de (v). Si T est à valeurs dans $\mathcal{H}$, il est clair que T est normal si, et seulement si, les noyaux $(\mathrm{Id} + T^*T)^{-1}$ et $(\mathrm{Id} + TT^*)^{-1}$ sont égaux, ce qui est évidemment équivalent à $T^*T = TT^*$. □

DEFINITION Si T est un opérateur fermé dans $\mathcal{H}$, on désigne par $\mathcal{A}(T)$ la sous-algèbre unifère fermée de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ engendrée par A , B et B^* . On dit que c'est l' *algèbre stellaire* de T .

COROLLAIRE *Si T est normal, alors A , B et B^* commutent deux à deux, i.e. $\mathcal{A}(T)$ est commutative.*

En particulier B est normal. Si T est autoadjoint, il en est de même de B.

On a $T(\mathrm{Id} + T^*T) \supset T + TT^*T = (\mathrm{Id} + TT^*)T$ par le théorème 7.5.i, donc l'égalité puisque ces opérateurs ont même domaine. Comme $A = (\mathrm{Id} + T^*T)^{-1}$ par (ii) , le lemme 7.7 montre que

$$AT = AT(\mathrm{Id} + T^*T)A = A(\mathrm{Id} + TT^*)TA = A(\mathrm{Id} + T^*T)TA \subset TA \ ,$$

en ayant utilisé (v). On prouve de la même manière que $AT^* \subset T^*A$. Sachant que A est autoadjoint par (i), la proposition 7.5, vii et v, montre que

$$T^*A = T^*A^* = (AT)^* \supset (TA)^* = B^* \ ,$$

donc que $B^* = T^*A$ puisque B^* est partout défini. Finalement on a les formules

$$B^*B = T^*ATA \subset T^*TA^2 \ ,$$

$$BB^* = TAT^*A \subset TT^*A^2 = T^*TA^2 \ ,$$

$$AB = ATA \subset TA^2 = BA$$

et

$$AB^* = AT^*A \subset T^*A^2 = B^*A \ .$$

Ces opérateurs étant partout définis, on a les égalités, ce qui finit de prouver que $\mathcal{A}(T)$ est commutative. Finalement si T est autoadjoint, alors

$$B^* = T^*A = TA = B \ . \quad \square$$

REMARQUE 1 Le théorème spectral 8.4 montrera que la réciproque est vraie. La démonstration directe n'est pas difficile (exercice).

REMARQUE 2 Classiquement on définit un opérateur normal par la condition (v) du théorème.

7.9 Opérateurs différentiels

Dans ce numéro X est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Soit

$$L : \mathcal{D}(X) \longrightarrow \mathbf{L}^2(X) : \varphi \longmapsto \sum_{|\alpha| \leqslant m} c_\alpha \cdot \partial^\alpha \varphi \ ,$$

un *opérateur différentiel* à coefficients $c_\alpha \in \mathbf{L}^2_{\mathrm{loc}}(X)$. C'est une application linéaire continue.

En effet pour $\alpha \in \mathbb{N}^n$ et $c \in \mathbf{L}^2_{\mathrm{loc}}(X)$ les applications

$$\partial^\alpha : \mathcal{D}(X) \longrightarrow \mathcal{D}(X) : \varphi \longmapsto \partial^\alpha \varphi$$

et

$$M_c : \mathcal{D}(X) \longrightarrow \mathbf{L}^2(X) : \psi \longmapsto c \cdot \psi$$

sont continues. La première assertion a été démontrée en 4.4; la seconde est immédiate, puisque pour tout $K \in \mathfrak{K}(X)$ et $\psi \in \mathcal{D}(X, K)$, on a

$$\|c \cdot \psi\|_2 \leqslant \|c\|_{\infty,K} \cdot \lambda(K) \cdot \|\psi\|_\infty = \|c\|_{\infty,K} \cdot \lambda(K) \cdot p_{K,0}(\psi) \ .$$

L'adjoint formel $L^\dagger$ est alors donné par

$$\left\langle \varphi \middle| L^\dagger \xi \right\rangle = (L\varphi | \xi) = \left(\sum_{|\alpha| \leqslant m} c_\alpha \cdot \partial^\alpha \varphi \middle| \xi \right) = \sum_{|\alpha| \leqslant m} \int \overline{c_\alpha \cdot \partial^\alpha \varphi} \cdot \xi \, d\lambda_X =$$

$$= \sum_{|\alpha| \leqslant m} \langle \partial^\alpha \varphi | \overline{c_\alpha} \cdot \xi \rangle = \left\langle \varphi \middle| \sum_{|\alpha| \leqslant m} \partial^\alpha (\overline{c_\alpha} \cdot \xi) \right\rangle \ ,$$

i.e.

$$L^\dagger : \mathbf{L}^2(X) \longrightarrow \mathcal{D}(X)' : \xi \longmapsto \sum_{|\alpha| \leqslant m} \partial^\alpha (\overline{c_\alpha} \cdot \xi) \ .$$

PROPOSITION *Si, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(X)$, on a $L^\dagger \varphi \in \mathbf{L}^2(X)$, alors L est fermable.*

Puisque $\mathcal{D}(X)$ est tonnelé, cela découle, grâce à la remarque 7.6.1, du théorème 7.6 avec $F = E = \mathcal{D}(X)$ et $\mathcal{H} = \mathcal{G} = \mathbf{L}^2(X)$. Mais remarquons que la continuité peut être démontrée directement : pour $c \in \mathbf{L}^2_{\mathrm{loc}}(X)$, les applications

$$M_c : \mathbf{L}^2(X) \longrightarrow \mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(X) \hookrightarrow \mathcal{D}(X)' : \xi \longmapsto c \cdot \xi$$

et

$$\partial^\alpha : \mathcal{D}(X)' \longrightarrow \mathcal{D}(X)' : \mu \longmapsto \partial^\alpha \mu$$

sont évidemment continues. □

Nous considérerons en particulier les opérateurs dans $\mathbf{L}^2(X)$ définis sur $\mathcal{D}(X)$ qui suivent :

EXEMPLE 1 (Les opérateurs de position et d'impulsion)

$$Q_j : \varphi \longmapsto \mathrm{pr}_j \cdot \varphi \quad \text{et} \quad P_j : \varphi \longmapsto \partial\!\!\!/_j \varphi$$

Ces opérateurs sont formellement auto-adjoints, donc fermables. En outre

$$D\left(Q_j^*\right) = \left\{\gamma \in \mathbf{L}^2(X) \;\middle|\; \mathrm{pr}_j \cdot \gamma \in \mathbf{L}^2(X)\right\}$$

et

$$D\left(P_j^*\right) = \left\{\gamma \in \mathbf{L}^2(X) \;\middle|\; \partial\!\!\!/_j \gamma \in \mathbf{L}^2(X)\right\} \; .$$

Remarquons si X est borné que Q_j^* est partout défini, donc borné. Ceci n'est jamais le cas de P_j^* .

EXEMPLE 2 Les opérateurs

$$A_{j,\pm} := P_j \pm i \cdot Q_j$$

sont aussi fermables, car

$$\left(A_{j,\pm}\right)^{\dagger}{}_{|\mathcal{D}(X)} = A_{j,\mp} \; .$$

EXEMPLE 3 (Opérateurs de Schrödinger)
Ce sont les opérateurs de la forme

$$\Delta\!\!\!\!/ + V \; ,$$

de potentiel $V \in \mathbf{L}^2_{\mathrm{loc}}(X)$. Il sont fermables car

$$\left(\Delta\!\!\!\!/ + V\right)^{\dagger}{}_{|\mathcal{D}(X)} = \Delta\!\!\!\!/ + \overline{V} \; .$$

En outre

$$D\left(\left(\Delta\!\!\!\!/ + V\right)^*\right) = \left\{\gamma \in \mathbf{L}^2(X) \;\middle|\; \left(\Delta\!\!\!\!/ + \overline{V}\right)\gamma \in \mathbf{L}^2(X)\right\} \; .$$

EXEMPLE 4 *Les opérateurs différentiels à coefficients constants sont fermables.*

En effet

$$L^{\dagger}\varphi = \sum_{|\alpha| \leqslant m} \partial\!\!\!/^{\alpha}\left(\overline{c_\alpha} \cdot \varphi\right) = \sum_{|\alpha| \leqslant m} \overline{c_\alpha} \cdot \partial\!\!\!/^{\alpha}\varphi \; . \quad \square$$

EXEMPLE 5 *Si $c_\alpha \in \mathcal{C}^{(|\alpha|)}(X)$ pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$ avec $|\alpha| \leqslant m$, ou plus généralement, si $\partial^{\beta} c_\alpha \in \mathbf{L}^2_{\mathrm{loc}}(X)$ pour tout $\beta \leqslant \alpha$ et $|\alpha| \leqslant m$, alors L est fermable.*

En effet dans le premier cas, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(X)$, on a $\overline{c_\alpha} \cdot \varphi \in \mathcal{C}^{(|\alpha|)}(X)$, donc $\partial\!\!\!/^{\alpha}\left(\overline{c_\alpha} \cdot \varphi\right) \in \mathcal{K}(X)$, et par suite $L^{\dagger}\varphi \in \mathcal{K}(X) \subset \mathbf{L}^2(X)$. En appliquant la formule de Leibniz classique, on voit que $L^{\dagger}{}_{|\mathcal{D}(X)}$ est un opérateur différentiel.

Dans le second cas, on considère $\overline{c_\alpha}$ comme une distribution, et on applique la formule de Leibniz (cf. proposition 4.5) :

$$\partial\!\!\!/^{\alpha}\left(\varphi \cdot \overline{c_\alpha}\right) = \sum_{\beta \leqslant \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \cdot \partial\!\!\!/^{\alpha-\beta}\varphi \cdot \partial\!\!\!/^{\beta}\overline{c_\alpha} \in \mathbf{L}^2(X) \; . \quad \square$$

REMARQUE 1 Le calcul ci-dessus peut se faire sans aucune hypothèse. On a

$$L^{\dagger}\varphi = \sum_{|\alpha|\leqslant m,\beta\leqslant\alpha} \binom{\alpha}{\beta} \cdot \not{\partial}^{\beta}\varphi \cdot \not{\partial}^{\alpha-\beta}\overline{c_{\alpha}} = \sum_{|\beta|\leqslant m} \not{\partial}^{\beta}\varphi \cdot \left[\sum_{|\alpha|\leqslant m,\alpha\geqslant\beta} \binom{\alpha}{\beta} \cdot \not{\partial}^{\alpha-\beta}\overline{c_{\alpha}} \right]$$

avec $\not{\partial}^{\alpha-\beta}\overline{c_{\alpha}} \in \mathcal{D}(X)'$ en général. Il suffit donc qu'il y ait des annulations judicieuses, c'est-à-dire que

$$\sum_{|\alpha|\leqslant m,\alpha\geqslant\beta} \binom{\alpha}{\beta} \cdot \not{\partial}^{\alpha-\beta}\overline{c_{\alpha}} \in \mathbf{L}^2_{\mathrm{loc}}(X) \quad \text{pour tout } \beta \in \mathbb{N}^n \text{ avec } |\beta| \leqslant m \ ,$$

pour que L soit fermable.

REMARQUE 2 Si L est formellement auto-adjoint, on peut se demander si, pour tout $\xi \in D(L^*)$, on a encore

$$L^*\xi = \sum_{|\alpha|\leqslant m} c_{\alpha} \cdot \not{\partial}^{\alpha}\xi \ .$$

Malheureusement, le second membre n'a en général pas de sens, car il faudrait à priori savoir que la distribution $\partial^{\alpha}\xi$ est multipliable par c_{α} (exercice).

Rappelons que

$$D(L^*) = \left\{ \xi \in \mathbf{L}^2(X) \ \middle|\ L^{\dagger}\xi \in \mathbf{L}^2(X) \right\}$$

et que $\mathcal{D}\left(\overline{L}\right)$ est un sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{D}(L^*)$. Si L est d'ordre m , l'un des problèmes de la théorie est de trouver des conditions sur L telles que

$$D(L^*) = \mathcal{H}^{(m)}(X) \ .$$

Dans ce cas

$$\mathcal{D}(L^*) \equiv \mathcal{H}^{(m)}(X) \quad \text{et} \quad \mathcal{D}\left(\overline{L}\right) \equiv \mathcal{H}^{(m)}_0(X)$$

d'après le corollaire 6.8. Rappelons (cf. proposition 4.11.i) que $\mathcal{H}^{(m)}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{H}^{(m)}_0(\mathbb{R}^n)$.

EXEMPLE 6 (Les opérateurs différentiels classiques dans un ouvert de $\mathbb{R}^n$)

Considérons l'opérateur

$$\mathrm{gr\not{a}d} : \mathcal{D}(X) \longrightarrow \mathbf{L}^2(X,\mathbb{C}^n) = \mathbf{L}^2(X)^n : \varphi \longmapsto (\not{\partial}_j\varphi)_{j=1,\dots,n} \ .$$

Un calcul immédiat montre que son adjoint formel est

$$\mathrm{gr\not{a}d}^{\dagger} = \mathrm{d\not{i}v} : \mathbf{L}^2(X,\mathbb{C}^n) \longrightarrow \mathcal{D}(X)' : \gamma \longmapsto \sum_{j=1}^{n} \not{\partial}_j\gamma_j \ .$$

De même l'adjoint formel de

$$\mathrm{d\not{i}v} : \mathcal{D}(X,\mathbb{C}^n) = \mathcal{D}(X)^n \longrightarrow \mathbf{L}^2(X) : \psi \longmapsto \sum_{j=1}^{n} \not{\partial}_j\psi_j$$

est

$$\mathrm{d\not{i}v}^{\dagger} = \mathrm{gr\not{a}d} : \mathbf{L}^2(X) \longrightarrow \mathcal{D}(X,\mathbb{C}^n)' = \left(\mathcal{D}(X)'\right)^n : \xi \longmapsto (\not{\partial}_j\xi)_{j=1,\dots,n} \ .$$

On peut en fait définir

$$\operatorname{gr\not{a}d} : \mathcal{D}(X) \longrightarrow \mathcal{D}(X, \mathbb{C}^n) \quad \text{et} \quad \operatorname{d\not{\imath}v} : \mathcal{D}(X, \mathbb{C}^n) \longrightarrow \mathcal{D}(X)$$

et on a

$$\operatorname{d\not{\imath}v}^\dagger = \operatorname{gr\not{a}d} : \mathcal{D}(X)' \longrightarrow \mathcal{D}(X, \mathbb{C}^n)' : \xi \longmapsto (\not{\partial}_j \xi)_{j=1,\ldots,n} \ ,$$

$$\operatorname{gr\not{a}d}^\dagger = \operatorname{d\not{\imath}v} : \mathcal{D}(X, \mathbb{C}^n)' \longrightarrow \mathcal{D}(X)' : \gamma \longmapsto \sum_{j=1}^n \not{\partial}_j \gamma_j \ ,$$

ainsi que

$$\operatorname{d\not{\imath}v}(\operatorname{gr\not{a}d}) = \not{\Delta} : \xi \longmapsto \not{\Delta}\xi : \mathcal{D}(X)' \longrightarrow \mathcal{D}(X)' \ .$$

Ceci montre que $\operatorname{d\not{\imath}v}^*$ est un prolongement fermé de $\operatorname{gr\not{a}d}$, qui est donc un opérateur fermable et que

$$\mathcal{D}(\operatorname{d\not{\imath}v}^*) = \mathcal{H}^{(1)}(X) \quad \text{et} \quad \mathcal{D}\left(\overline{\operatorname{gr\not{a}d}}\right) = \mathcal{H}_0^{(1)}(X) \ .$$

On pose

$$\mathcal{H}^{(-1)}(X) := \mathcal{H}_0^{(1)}(X)^\dagger$$

et on a

$$\mathcal{H}^{(-1)}(X) = \mathbf{L}^2(X) + \operatorname{d\not{\imath}v}\left(\mathbf{L}^2(X, \mathbb{C}^n)\right) \equiv \mathbf{L}^2(X) + \sum_{j=1}^n \partial_j \left(\mathbf{L}^2(X)\right) \ .$$

Soit

$$\mathcal{H}(X, \operatorname{div}) := \mathcal{D}(\operatorname{gr\not{a}d}^*) = \left\{ \gamma \in \mathbf{L}^2(X, \mathbb{C}^n) \ \middle| \ \sum_{j=1}^n \not{\partial}_j \gamma_j \in \mathbf{L}^2(X) \right\} \ ,$$

muni de la norme $\gamma \longmapsto \|\gamma\|_2^2 + \left\| \sum_{j=1}^n \not{\partial}_j \gamma_j \right\|_2^2$, et désignons par $\mathcal{H}_0(X, \operatorname{div})$ l'adhérence de $\mathcal{D}(X, \mathbb{C}^n)$ dans $\mathcal{H}(X, \operatorname{div})$. On a alors

$$\mathcal{D}\left(\overline{\operatorname{d\not{\imath}v}}\right) = \mathcal{H}_0(X, \operatorname{div}) \ .$$

En outre

$$\begin{aligned} \mathbf{L}^2(X) &= \mathcal{H}^{(1)}(X) + \overline{\operatorname{d\not{\imath}v}}\left(\mathcal{H}_0(X, \operatorname{div})\right) = \\ &= \mathcal{H}_0^{(1)}(X) + \operatorname{gr\not{a}d}^*\left(\mathcal{H}(X, \operatorname{div})\right) \ . \end{aligned}$$

On a des formules analogues pour $\mathcal{H}_0(X, \operatorname{div})^\dagger$ et $\mathbf{L}^2(X, \mathbb{C}^n)$.

Comme $\operatorname{gr\not{a}d}^\dagger \overline{\operatorname{gr\not{a}d}}$ coïncide avec $\not{\Delta}$ sur $\mathcal{H}_0^{(1)}(X)$, le théorème 7.8.ii montre que

$$\operatorname{Id} + \not{\Delta} : \mathcal{H}_0^{(1)}(X) \longrightarrow \mathcal{H}^{(-1)}(X)$$

est l'application de Riesz Q , donc que l'équation distributionnelle

$$(\operatorname{Id} + \not{\Delta})\, \xi = \mu$$

possède pour tout $\mu \in \mathcal{H}^{(-1)}(X)$ une unique solution $\xi \in \mathcal{H}_0^{(1)}(X)$.

L'opérateur auto-adjoint positif

$$\not{\Delta}_D := \mathrm{gr\not{a}d}^* \overline{\mathrm{gr\not{a}d}}$$

est défini sur

$$\left\{ \xi \in \mathcal{H}_0^{(1)}(X) \;\middle|\; \Delta\xi \in \mathbf{L}^2(X) \right\} ,$$

et s'appelle *opérateur de Dirichlet* . L'opérateur

$$G := \left(\mathrm{Id} + \not{\Delta}_D\right)^{-1} : \mathbf{L}^2(X) \longrightarrow \mathcal{H}_0^{(1)}(X) \hookrightarrow \mathbf{L}^2(X)$$

est le noyau de $\mathcal{H}_0^{(1)}(X) \hookrightarrow \mathbf{L}^2(X)$, donc est borné. On dit que c'est l' *opérateur de Green* de l'ouvert X .

L'opérateur auto-adjoint positif

$$\not{\Delta}_N := \overline{\mathrm{d\not{i}v}}\, \mathrm{d\not{i}v}^*$$

est défini sur

$$\left\{ \xi \in \mathcal{H}^{(1)}(X) \;\middle|\; \mathrm{grad}\, \xi \in \mathcal{H}_0(X, \mathrm{div}) \right\} ,$$

et s'appelle *opérateur de Neumann* .

Lorsque X est une sous-variété compacte avec bord de $\mathbb{R}^n$ de dimension n , dont le bord $\partial X = X \smallsetminus X^\circ$ est une sous-variété indéfiniment dérivable ayant X d'un même côté, on peut caractériser $\mathcal{H}_0^{(1)}(X)$ et $\mathcal{H}_0(X, \mathrm{div})$. Le théorème de trace (cf. Aubin[1], théorème 9.5.1) affirme que l'opérateur de restriction

$$f_{|X} \longmapsto f_{|\partial X} : \mathcal{C}^{(\infty)}(\mathbb{R}^n)_{|X} \longrightarrow \mathcal{C}^{(\infty)}(\partial X)$$

possède un unique prolongement continu surjectif

$$\xi \longmapsto \xi_{|\partial X} : \mathcal{H}^{(1)}(X) \longrightarrow \mathcal{H}^{\left(\frac{1}{2}\right)}(\partial X)$$

dont le noyau est $\mathcal{H}_0^{(1)}(X)$. On a donc

$$\mathcal{H}_0^{(1)}(X) = \left\{ \xi \in \mathcal{H}^{(1)}(X) \;\middle|\; \xi_{|\partial X} = 0 \right\} .$$

Pour toutes fonctions $f \in \mathcal{C}^{(\infty)}(\mathbb{R}^n)$ et $v \in \mathcal{C}^{(\infty)}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n)$, on a la formule d'intégration par partie (cf. Analyse, proposition 17.7) :

$$\int \mathrm{grad}\, f_{|X} \bullet v_{|X}\, d\lambda_X + \int f_{|X} \cdot \mathrm{div}\, v_{|X}\, d\lambda_X = \int f_{|\partial X} \cdot v_{|\partial X} \bullet \mathfrak{n}\, d\lambda_{\partial X} .$$

On peut montrer (cf. Aubin [1] , théorème 12.1.5) que l'opérateur

$$v_{|X} \longmapsto v_{|\partial X} \bullet \mathfrak{n} : \mathcal{C}^{(\infty)}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n)_{|X} \longrightarrow \mathcal{C}^{(\infty)}(\partial X)$$

possède lui aussi un prolongement continu surjectif

$$\gamma \longmapsto \gamma_{|\partial X} \bullet \mathfrak{n} : \mathcal{H}(X, \mathrm{div}) \longrightarrow \mathcal{H}^{(-1/2)}(\partial X)$$

dont le noyau est $\mathcal{H}_0(X, \mathrm{div})$. On a donc

$$\mathcal{H}_0(X, \mathrm{div}) = \left\{ \gamma \in \mathcal{H}(X, \mathrm{div}) \;\middle|\; \gamma_{|\partial X} \bullet \mathfrak{n} = 0 \right\} .$$

[1] J.P. Aubin, Analyse fonctionnelle appliquée, Tomes 1 et 2, Presses Universitaires de France, 1987

Grâce aux inégalités de Sobolev (cf. Brezis[2], théorème IX.25 et IX.26), on peut montrer que

$$D\left(\not\Delta_D\right) = \left\{\xi \in \mathcal{H}^{(2)}(X) \;\middle|\; \xi_{|\partial X} = 0\right\} \quad \text{et} \quad D\left(\not\Delta_N\right) = \left\{\xi \in \mathcal{H}^{(2)}(X) \;\middle|\; \partial_{\mathfrak{n}}\xi_{|\partial X} = 0\right\}$$

en ayant évidemment posé $\not\partial_{\mathfrak{n}}\xi_{|\partial X} := \mathrm{gr}\!\not{a}\mathrm{d}\,\xi_{|\partial X} \bullet \mathfrak{n}$.

EXEMPLE 7 Plus généralement, en considérant les opérateurs

$$T : \mathcal{D}(X) \longrightarrow \mathbf{L}^2\left(X, \mathbb{C}^A\right) : \varphi \longmapsto \left(\not\partial^\alpha \varphi\right)$$

et

$$S : \mathcal{D}\left(X, \mathbb{C}^A\right) \longrightarrow \mathbf{L}^2(X) : \psi \longmapsto \sum_{\alpha \in A} \not\partial^\alpha \psi_\alpha \ ,$$

avec $A = \left\{\alpha \in \mathbb{N}^n \;\middle|\; 0 < |\alpha| \leqslant m\right\}$, on voit immédiatement que $T = S^{\dagger}{}_{|\mathcal{D}(X)}$,

$$\mathcal{D}(S^*) = \mathcal{H}^{(m)}(X) \quad , \quad T \subset S^* \ ,$$

et que $\mathcal{H}_0^{(m)}(X) = \mathcal{D}\left(\overline{T}\right)$. Son semi-dual dans $\mathcal{D}(X)'$ est noté $\mathcal{H}^{(-m)}(X)$ et on a

$$\mathcal{H}^{(-m)}(X) = \mathbf{L}^2(X) + \sum_{\alpha \in A} \partial^\alpha \left(\mathbf{L}^2(X)\right) \ .$$

L'opérateur différentiel $\mathrm{Id} + \sum_{\alpha \in A} \not\partial^{2\alpha}$ est une isométrie de $\mathcal{H}_0^{(m)}(X)$ sur $\mathcal{H}^{(-m)}(X)$.

EXEMPLE 8 (Cas d'une seule variable)
Soit J un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. On peut montrer (exercice) que

$$\mathcal{D}(P^*) = \mathcal{H}^{(1)}(J) \subset \mathcal{AC}(J) \cap \mathcal{C}^0\left(\overline{J}\right)$$

et

$$\mathcal{D}\left(\overline{P}\right) = \mathcal{H}_0^{(1)}(J) = \left\{\varphi \in \mathcal{H}^{(1)}(J) \;\middle|\; \varphi(\inf J) = \varphi(\sup J) = 0\right\} \ .$$

Ceci montre que $\mathcal{H}_0^{(1)}(J)$ est bien ce à quoi l'on s'attendait ! Remarquons que $\mathcal{D}(J)$ est dense dans $\mathbf{L}^2(J)$ et aussi dans $\mathcal{D}\left(\overline{P}\right)$; c'est donc un domaine essentielle de $\overline{P}$, mais $\mathcal{D}(J)$ n'est évidemment pas dense dans $\mathcal{D}(P^*)$.

On peut montrer (exercice) que P ne possède sur $\mathbb{R}_+^*$ aucun prolongement auto-adjoint.

Grâce au théorème 7.6, i, iii et iv, on a les formules

$$\mathcal{H}^{(-1)}(J) = \mathbf{L}^2(J) + \not\partial\left(\mathbf{L}^2(J)\right)$$

et

$$\mathbf{L}^2(J) = \mathcal{H}^{(1)}(J) + \not\partial\left(\mathcal{H}_0^{(1)}(J)\right) = \mathcal{H}_0^{(1)}(J) + \not\partial\left(\mathcal{H}^{(1)}(J)\right) \ .$$

L'injection canonique $\mathcal{H}^{(1)}(J) \hookrightarrow \mathcal{C}^0\left(\overline{J}\right)$ est continue par le corollaire 4.8.i, ce qui montre qu'il existe une constante $c < \infty$ telle que

$$\|\varphi\|_\infty^2 \leqslant c \cdot \left(\|\varphi\|_2^2 + \|\not\partial\varphi\|_2^2\right) \quad \text{pour tout } \varphi \in \mathcal{H}^{(1)}(J) \ .$$

[2] H. Brezis, Analyse fonctionnelle, Théorie et applications, Masson, 1983.

L'inégalité de Sobolev est une amélioration de cette inégalité (exercice). Ceci prouve que, pour tout $x \in J$, on a $\delta_x \in \mathcal{H}^{(-1)}(J)$ avec

$$\langle \varphi | \delta_x \rangle_{\mathcal{H}_0^{(1)}} = \overline{\varphi(x)} \quad \text{pour tout } \varphi \in \mathcal{H}_0^{(1)}(J) \ .$$

On peut aussi utiliser la première égalité ci-dessus, car en choisissant $\chi \in \mathcal{D}(J)$ avec $\chi(x) = 1$, on a

$$\partial(\chi \cdot h_x) = h_x \cdot \partial\chi + \chi \cdot \partial h_x = h_x \cdot \partial\chi + \delta_x \ ,$$

donc

$$\delta_x = -h_x \cdot \partial\chi + \partial(\chi \cdot h_x) \in \mathbf{L}^2(J) + \not{\partial}\left(\mathbf{L}^2(J)\right) = \mathcal{H}^{(-1)}(J) \ .$$

Pour tout $\eta \in \mathbf{L}^2(J)$ l'application

$$\eta \cdot \delta : y \longmapsto \eta(y) \cdot \delta_y : J \longrightarrow \mathcal{H}^{(-1)}(J)$$

est λ-intégrable dans $\mathcal{H}^{(-1)}(J)$ avec

$$\int \eta(y) \cdot \delta_y \, dy = \eta \ .$$

En effet, pour tout $\varphi \in \mathcal{H}_0^{(1)}(J)$, il vient $\langle \varphi | \eta \cdot \delta \rangle_{\mathcal{H}_0^{(1)}} = \overline{\varphi} \cdot \eta \in \mathbf{L}^1(J)$, ainsi que

$$\int \left| \langle \varphi | \eta \cdot \delta \rangle_{\mathcal{H}_0^{(1)}} \right| d\lambda = \int |\overline{\varphi} \cdot \eta| \ d\lambda \leqslant \|\varphi\|_2 \cdot \|\eta\|_2 \leqslant \|\eta\|_2 \cdot \|\varphi\|_{\mathcal{H}_0^{(1)}} \ ,$$

d'où le résultat par le théorème 2.12.i. □

Puisque l'application de Riesz réciproque

$$\overset{-1}{Q} = (\mathrm{Id} + \not{\Delta})^{-1} : \mathcal{H}^{(-1)}(X) \longrightarrow \mathcal{H}_0^{(1)}(X)$$

est continue, utilisant le lemme 2.12.iii on voit que l'application

$$\eta \cdot \overset{-1}{Q}\delta : y \longmapsto \eta(y) \cdot \overset{-1}{Q}\delta_y : J \longrightarrow \mathcal{H}_0^{(1)}(J)$$

est λ_J-intégrable dans $\mathcal{H}_0^{(1)}(J)$, considéré comme semi-dual de $\mathcal{H}^{(-1)}(J)$. Comme l'opérateur de Green $G = (\mathrm{Id} + \not{\Delta}_D)^{-1}$ est la restriction de $\overset{-1}{Q}$ à $\mathbf{L}^2(J)$, et on a

$$G\eta = \overset{-1}{Q}\eta = \int \eta(y) \cdot \overset{-1}{Q}\delta_y \, dy \quad \text{dans } \mathcal{H}_0^{(1)}(J) \ ,$$

et $G\eta$ est l'unique solution $\xi \in \mathcal{H}_0^{(1)}(J)$ de l'équation différentielle

$$\xi + \not{\partial}^2\xi = \eta \ .$$

Pour tout $x \in J$, on a alors

$$G\eta(x) = \left\langle \delta_x \middle| R^{-1}\eta \right\rangle_{\mathcal{H}^{(-1)}} = \int \left\langle \delta_x \middle| R^{-1}\delta_y \right\rangle_{\mathcal{H}^{(-1)}} \cdot \eta(y) \ dy \ .$$

Définissant le noyau $\varkappa$ par

$$\varkappa : J^2 \longrightarrow \mathbb{C} : (x, y) \longmapsto \left\langle \delta_x \middle| R^{-1}\delta_y \right\rangle_{\mathcal{H}^{(-1)}} = R^{-1}\delta_y(x) \ ,$$

l'unique solution $\varphi \in \mathcal{H}_0^{(1)}(J)$ de

$$\varphi + \partial\!\!\!/^2 \varphi = \eta$$

est donnée par

$$\varphi(x) = \int \varkappa(x, y) \cdot \eta(y)\, dy \quad \text{pour tout } x \in J \;.$$

On dit que $\varkappa$ est le *noyau de Green* de l'intervalle J . Comme $\varkappa(\cdot, y)$ est l'unique solution dans $\mathcal{H}_0^{(1)}(J)$ de l'équation

$$\varphi + \partial\!\!\!/^2 \varphi = \delta_y \;,$$

on dit que c'est la *solution élémentaire* en y .

On peut évidemment calculer ce noyau (exercice). On obtient

$$\varkappa(x, y) = \pi \cdot e^{-2\pi \cdot |x-y|} \quad \text{dans le cas de } \mathbb{R} \;,$$

et

$$\varkappa(x, y) = \pi \cdot \left(e^{-2\pi \cdot |x-y|} - e^{-2\pi \cdot (x+y)}\right) \quad \text{dans le cas de } \mathbb{R}_+^* \;.$$

7.10 Le spectre d'un opérateur

DEFINITION Le *spectre* $\mathrm{Sp}\,T$ de T est l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{K}$ tels que $T - \lambda \cdot \mathrm{Id}$ ne soit pas inversible. On dit que $\lambda \in \mathbb{K}$ est une *valeur propre* de T si $T - \lambda \cdot \mathrm{Id}$ n'est pas injectif, i.e. si $\mathrm{Ker}\,(T - \lambda \cdot \mathrm{Id}) \neq \{0\}$. Un vecteur

$$\xi \in \mathrm{Ker}\,(T - \lambda \cdot \mathrm{Id}) \smallsetminus \{0\} \subset D\,(T)$$

est dit un *vecteur propre* . L'ensemble des valeurs propres de T est désigné par $\mathrm{Sp}_p\,T$ et on dit que c'est le *spectre ponctuel* de T .

DEFINITION 1 Comme dans le cas d'un opérateur continu (cf. 5.5), on distingue encore le *spectre continu* $\mathrm{Sp}_c\,T$ et le *spectre résiduel* $\mathrm{Sp}_r\,T$, qui sont définis comme l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{K}$ tels que $T - \lambda \cdot \mathrm{Id}$ soit injectif, mais pas surjectif, et tels que l'image de $T - \lambda \cdot \mathrm{Id}$ soit dense respectivement non-dense.

Si $z \in \mathbb{K} \smallsetminus \mathrm{Sp}\,T$, on pose $R\,(z, T) := (T - z \cdot \mathrm{Id})^{-1}$ et on dit que l'application

$$R\,(\cdot, T) : z \longmapsto (T - z \cdot \mathrm{Id})^{-1} : \mathbb{K} \smallsetminus \mathrm{Sp}\,T \longrightarrow \mathcal{L}\,(\mathcal{H})$$

est la *résolvente* de T .

COROLLAIRE *Les ensembles* $\mathrm{Sp}_p\,T$, $\mathrm{Sp}_c\,T$ *et* $\mathrm{Sp}_r\,T$ *sont deux à deux disjoints et*

$$\mathrm{Sp}\,T = \mathrm{Sp}_p\,T \cup \mathrm{Sp}_c\,T \cup \mathrm{Sp}_r\,T \ .$$

C'est immédiat, puisque si $T - \lambda \cdot \mathrm{Id}$ est bijectif, alors $T - \lambda \cdot \mathrm{Id}$ est fermé par la théorème 7.5.iii, donc $(T - \lambda \cdot \mathrm{Id})^{-1}$ est continu. □

Les opérateurs qui ne sont pas fermés ont un spectre égal à $\mathbb{K}$. En effet on la

PROPOSITION *S'il existe* $z \in \mathbb{K} \smallsetminus \mathrm{Sp}\,T$ *, alors* T *est un opérateur fermé. Si en plus* T *est de domaine dense, alors* T^k *l'est aussi pour tout* $k \in \mathbb{N}^*$ *.*

Le théorème 7.5.iv montre que $T - z \cdot \mathrm{Id}$ est fermé, donc aussi T par (iii) de la même proposition.

Démontrons la seconde assertion par récurrence, le cas $k = 1$ étant vrai par hypothèse. Le domaine de T^{k+1} est le même que celui de $(T - z \cdot \mathrm{Id})^{k+1}$, donc est égal à

$$(T - z \cdot \mathrm{Id})^{-1} \left(D\left(T^k\right)\right) = R\,(z, T) \left(D\left(T^k\right)\right) \ .$$

Mais comme $D\left(T^k\right)$ est dense dans $\mathcal{H}$ par l'hypothèse de récurrence et que $R\,(z, T)$ est continu, $D\left(T^{k+1}\right) = R\,(z, T) \left(D\left(T^k\right)\right)$ est dense dans $R\,(z, T)\,(\mathcal{H}) = D\,(T)$. Ceci montre que $D\left(T^{k+1}\right)$ est dense dans $\mathcal{H}$. □

THEOREME *Soit* T *un opérateure dans* $\mathcal{H}$ *. Alors* $\mathrm{Sp}\,T$ *est une partie fermée de* $\mathbb{K}$ *et la résolvente* $R\,(\cdot, T)$ *est une fonction analytique dans* $\mathbb{K} \smallsetminus \mathrm{Sp}\,T$ *. Pour tout* $z, w \in \mathbb{K} \smallsetminus \mathrm{Sp}\,T$ *, on a*

$$R\,(z, T) - R\,(w, T) = (z - w) \cdot R\,(z, T)\, R\,(w, T) \ .$$

Si $z \in \mathbb{K} \setminus \operatorname{Sp} T$ alors, pour tout $w \in \mathbb{K}$ tel que $|w| \cdot \|R(z,T)\| < 1$, l'opérateur borné $S := \operatorname{Id} - w \cdot R(z,T)$ est inversible par le théorèm 5.2. On a alors

$$R(z,T)\, S^{-1} = S^{-1} S R(z,T)\, S^{-1} = S^{-1} R(z,T)\, S S^{-1} = S^{-1} R(z,T) \ ,$$

donc, en utilisant les formules du théorème et de la proposition 7.5,

$$S^{-1} R(z,T)\, [T - (z+w) \cdot \operatorname{Id}] \subset S^{-1} [\operatorname{Id} - w \cdot R(z,T)] = \operatorname{Id} =$$

$$= [\operatorname{Id} - w \cdot R(z,T)]\, S^{-1} = [T - (z+w) \cdot \operatorname{Id}]\, R(z,T)\, S^{-1} \ ;$$

ceci montre que $R(z,T)\, S^{-1}$ est l'inverse de $T - (z+w) \cdot \operatorname{Id}$, et par suite que $z + w \in \mathbb{K} \setminus \operatorname{Sp} T$. Ainsi $\operatorname{Sp} T$ est fermé et $R(\cdot, T)$ est analytique, puisque

$$R(z+w,T) = R(z,T)\, [\operatorname{Id} - w \cdot R(z,T)]^{-1} = \sum_{k \in \mathbb{N}} R(z,T)^{k+1} \cdot w^k \ .$$

Pour démontrer la dernière formule, remarquons tout d'abord que

$$(T - z \cdot \operatorname{Id})\, (T - w \cdot \operatorname{Id}) = (T - w \cdot \operatorname{Id})\, (T - z \cdot \operatorname{Id}) \ .$$

On en déduit que $R(z,T)\, R(w,T)$ et $R(w,T)\, R(z,T)$ sont l'inverse de cet opérateur, donc égaux. Il vient alors

$$R(z,T) = (T - w \cdot \operatorname{Id})\, R(w,T)\, R(z,T) = (T - w \cdot \operatorname{Id})\, R(z,T)\, R(w,T)$$

et

$$R(w,T) = (T - z \cdot \operatorname{Id})\, R(z,T)\, R(w,T) \ ,$$

d'où le résultat par soustraction. $\square$

7.11 Liaison entre le spectre d'un opérateur et de son adjoint

Attention, dans ce qui suit l'ensemble $\overline{A}$ est l'ensemble complexe conjugué de $A \subset \mathbb{C}$, et non son adhérence !

PROPOSITION *Soit T un opérateur fermé de domaine dense dans $\mathcal{H}$. Alors on les formules :*

$$\operatorname{Sp} T^* = \overline{\operatorname{Sp} T} \ .$$

$$\overline{\operatorname{Sp}_r T} \subset \operatorname{Sp}_p T^*$$

$$\overline{\operatorname{Sp}_p T} \subset \operatorname{Sp}_p T^* \cup \operatorname{Sp}_r T^*$$

et

$$\overline{\operatorname{Sp}_c T} = \operatorname{Sp}_c T^* \ .$$

Si $T - z \cdot \mathrm{Id}$ est inversible, la théorème 7.5.ix montre que $(T - z \cdot \mathrm{Id})^* = T^* - \overline{z} \cdot \mathrm{Id}$ est injectif et que

$$(T^* - \overline{z} \cdot \mathrm{Id})^{-1} = \left[(T - z \cdot \mathrm{Id})^{-1}\right]^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H}) \ ,$$

donc que $T^* - \overline{z} \cdot \mathrm{Id}$ est inversible. Comme $T = T^{**}$ (théorème 7.4.iv), on a aussi la réciproque, ce qui prouve la première formule.

Si $\lambda \in \operatorname{Sp}_r T$, alors

$$\{0\} \neq \operatorname{Im}(T - \lambda \cdot \mathrm{Id})^{\perp} = \operatorname{Ker}\left(T^* - \overline{\lambda} \cdot \mathrm{Id}\right)$$

par la théorème 7.5.viii, donc $\lambda \in \operatorname{Sp}_p T^*$.

Si $\lambda \in \operatorname{Sp}_p T$, pour la même raison on a

$$\operatorname{Im}\left(T^* - \overline{\lambda} \cdot \mathrm{Id}\right)^{\perp} = \operatorname{Ker}(T^{**} - \lambda \cdot \mathrm{Id}) = \operatorname{Ker}(T - \lambda \cdot \mathrm{Id}) \neq \{0\} \ ,$$

donc

$$\overline{\lambda} \in \operatorname{Sp} T^* \setminus \operatorname{Sp}_c T^* = \operatorname{Sp}_p T^* \cup \operatorname{Sp}_r T^*$$

par le corollaire 7.10.

Quant à la dernière formule, $\lambda \notin \operatorname{Sp}_c T$ signifie que

$$\lambda \in \complement(\operatorname{Sp} T) \cup \operatorname{Sp}_p T \cup \operatorname{Sp}_r T \ ,$$

donc entraîne par les formules précédentes et le corollaire 7.10 que

$$\overline{\lambda} \in \complement(\operatorname{Sp} T^*) \cup \operatorname{Sp}_p T^* \cup \operatorname{Sp}_r T^* = \complement(\operatorname{Sp}_c T^*) \ .$$

Puisque $T = T^{**}$ on obtient aussi l'autre implication. □

COROLLAIRE *Soit T un opérateur normal. Alors* *(i) Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on a*

$$\operatorname{Ker}(T - \lambda \cdot \mathrm{Id}) = \operatorname{Ker}\left(T^* - \overline{\lambda} \cdot \mathrm{Id}\right) .$$

En particulier

$$\lambda \in \mathrm{Sp}_p\, T \quad \Longleftrightarrow \quad \overline{\lambda} \in \mathrm{Sp}_p\, T^*$$

et

$$\mathrm{Sp}_r\, T = \emptyset .$$

(ii) Pour tout $\lambda, \theta \in \mathrm{Sp}_p\, T$ avec $\lambda \neq \theta$, on a

$$\operatorname{Ker}(T - \lambda \cdot \mathrm{Id}) \perp \operatorname{Ker}(T - \theta \cdot \mathrm{Id})$$

dans $\mathcal{H}$, comme dans $\mathcal{D}(T)$.

Démonstration de (i). Si T est normal, on montre facilement que $T - \lambda \cdot \mathrm{Id}$ est normal, par exemple en utilisant les théorèmes 7.8.v et 7.5. Le lemme 7.7.ii montre alors que, pour tout $\xi \in D(T) = D(T^*)$, on a

$$\|(T - \lambda \cdot \mathrm{Id})\,\xi\| = \left\|\left(T^* - \overline{\lambda} \cdot \mathrm{Id}\right)\xi\right\| ,$$

d'où la première formule. L'équivalence est alors triviale et

$$\mathrm{Sp}_r\, T \subset \overline{\mathrm{Sp}_p\, T^*} = \mathrm{Sp}_p\, T ,$$

ce qui n'est possible que si $\mathrm{Sp}_r\, T = \emptyset$.

Démonstration de (ii). Pour tout $\xi \in \operatorname{Ker}(T - \lambda \cdot \mathrm{Id})$ et $\eta \in \operatorname{Ker}(T - \theta \cdot \mathrm{Id})$, on a

$$\theta \cdot (\xi|\,\eta)_{\mathcal{H}} = (\xi|\,T\eta)_{\mathcal{H}} = (T^*\xi|\,\eta)_{\mathcal{H}} = \left(\overline{\lambda} \cdot \xi|\,\eta\right)_{\mathcal{H}} = \lambda \cdot (\xi|\,\eta)_{\mathcal{H}} ,$$

donc $(\xi|\,\eta)_{\mathcal{H}} = 0$. En outre

$$(T\xi|\,T\eta)_{\mathcal{H}} = \overline{\lambda} \cdot \theta \cdot (\xi|\,\eta)_{\mathcal{H}} = 0 ,$$

donc

$$(\xi|\,\eta)_T = (\xi|\,\eta)_{\mathcal{H}} + (T\xi|\,T\eta)_{\mathcal{H}} = 0 . \quad \square$$