# Chapitre 6

# ALGÈBRES DE BANACH

# ET

# SPECTRES

Version du 5 juillet 2004

## 6.1 Algèbres normées

**DEFINITION 1** Si $F$ est un espace vectoriel, respectivement un espace localement convexe, on pose

$$L(F) := L(F,F) \quad \text{et} \quad \mathcal{L}(F) := \mathcal{L}(F,F) \ .$$

Si $F$ est un espace normé, soit $\mathcal{L}(F)$ l'espace (normé) des opérateurs bornés dans $F$ .

Rappelons que, pour $T \in L(F)$ , on a $\|T\| := \sup_{\varphi \in F, \|\varphi\| \leqslant 1} \|T\varphi\|$ et que $T \in \mathcal{L}(F)$ si, et seulement si, $\|T\| < \infty$ (cf. définition 3.2.1)..

**PROPOSITION** *Soit $F$ un espace normé. Pour tout $S, T \in \mathcal{L}(F)$ , on a*

$$\|ST\| \leqslant \|S\| \cdot \|T\| \ .$$

C'est immédiat (cf. 3.2). □

**DEFINITION 2** On dit qu'une $\mathbb{K}$-algèbre $\mathcal{A}$ munie d'une norme $\|\cdot\|$ telle que

$$\|ab\| \leqslant \|a\| \cdot \|b\| \quad \text{pour tout } a, b \in \mathcal{A} \ ,$$

est une *algèbre normée* . On dit que c'est une *algèbre de Banach* si elle est complète et *unifère* si elle possède une unité $e$ telle que $\|e\| = 1$ .

**EXEMPLE 1** Si $F$ est un espace normé, alors $\mathcal{L}(F)$ est une algèbre normée unifère. C'est une algèbre de Banach si $F$ est un espace de Banach.

Cela découle de la proposition ci-dessus et de la proposition 3.2. □

**EXEMPLE 2** Soit $X$ un ensemble. Muni de la multiplication ponctuelle l'espace $\ell^\infty(X)$ est une algèbre de Banach unifère. Si $X$ est un espace topologique, alors $\mathcal{C}^b(X)$ et $\mathcal{C}^0(X)$ sont aussi des (sous-) algèbre de Banach. $\mathcal{C}^b(X)$ est unifère ; il en est de même de $\mathcal{C}^0(X)$ si, et seulement si, $X$ est compact.

**EXEMPLE 3** Nous avons vu en 4.12, exercice 2, que $\mathbf{L}^1(\mathbb{R}^n)$ est une algèbre de Banach pour le produit de convolution. Elle n'est pas unifère.

**EXERCICE** On peut montrer que $\ell^1(\mathbb{Z})$ , muni du produit de convolution défini pour tout $f, g \in \ell^1(\mathbb{Z})$ par

$$f * g\,(k) := \sum_{l \in \mathbb{Z}} f\,(k - l) \cdot g\,(l) \quad \text{pour tout } k \in \mathbb{Z}\ ,$$

est une algèbre de Banach unifère.

## 6.2 Inversibilité dans une algèbre de Banach

Etant donné un opérateur borné $T$ dans un espace de Banach $F$ , nous allons essayer de résoudre une équation du type

$$(\mathrm{Id} - T)\,\varphi = \psi \ ,$$

$\psi \in F$ étant donné. On peut la mettre sous la forme

$$T\varphi + \psi = \varphi \ ,$$

ce qui montre que $\varphi \in F$ est solution de cette équation si, et seulement si, $\varphi$ est un point fixe de l'application

$$\Phi : \varphi \longmapsto T\varphi + \psi \ .$$

Si l'on essaye d'utiliser la méthode des approximations successives définie par $\varphi_0 := \psi$ et $\varphi_{k+1} := \Phi\varphi_k = T\varphi_k + \psi$ , on voit immédiatement par récurrence que

$$\varphi_k = \sum_{l=0}^{k} T^l \psi \ .$$

Cela revient à considérer la série géométrique

$$\sum_{l=0}^{\infty} T^l$$

dans $\mathcal{L}(F)$ , dite *série de Neumann* .

**LEMME** *Soient $\mathcal{A}$ une algèbre normée et $a \in \mathcal{A}$ . La suite $\left(\left\|a^k\right\|^{\frac{1}{k}}\right)_{k\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\inf_{k\in\mathbb{N}^*} \left\|a^k\right\|^{\frac{1}{k}}$ .*

Si $a$ est *nilpotent* , i.e. $a^n = 0$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$ , le lemme est évident. Nous pouvons donc supposer que $\left\|a^k\right\| > 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ . L'entier $m \in \mathbb{N}^*$ étant fixé, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ , il existe $p(k), q(k) \in \mathbb{N}$ univoquement déterminés tels que

$$k = p(k) \cdot m + q(k) \quad \text{et} \quad 0 \leqslant q(k) < m \ .$$

Il vient alors

$$\left\|a^k\right\| \leqslant \left\|a^m\right\|^{p(k)} \cdot \left\|a\right\|^{q(k)} \ ,$$

donc

$$\left\|a^k\right\|^{\frac{1}{k}} \leqslant \left\|a^m\right\|^{\frac{p(k)}{k}} \cdot \left\|a\right\|^{\frac{q(k)}{k}} \ .$$

Ainsi

$$\limsup_k \left\|a^k\right\|^{\frac{1}{k}} \leqslant \left\|a^m\right\|^{\frac{1}{m}} \ ,$$

puisque

$$\lim_k \frac{q(k)}{k} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_k \frac{p(k)}{k} = \lim_k \left(\frac{1}{m} - \frac{q(k)}{m \cdot k}\right) = \frac{1}{m} \ .$$

On en déduit

$$\limsup_k \left\|a^k\right\|^{\frac{1}{k}} \leqslant \inf_m \|a^m\|^{\frac{1}{m}} \leqslant \liminf_k \left\|a^k\right\|^{\frac{1}{k}} \leqslant \limsup_k \left\|a^k\right\|^{\frac{1}{k}} ,$$

d'où le résultat. □

**DEFINITION** Pour tout $a \in \mathcal{A}$ , on dit que $\rho(a) := \inf_{k\in\mathbb{N}^*} \left\|a^k\right\|^{\frac{1}{k}}$ est le *rayon spectral de* $a$ . On dit que $a$ est *quasi-nilpotent* si $\rho(a) = 0$ .

On a toujours

$$\rho(a) \leqslant \|a\| .$$

**THEOREME** *Soient $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach et $a \in \mathcal{A}$ . Si $\rho(a) < 1$ , alors la série de Neumann $\sum_{l=1}^{\infty} a^l$ est absolument convergente, donc convergente.*

*Si $\mathcal{A}$ est unifère, alors $\sum_{l=0}^{\infty} a^l$ est l'inverse de $e - a$ dans $\mathcal{A}$ et on a*

$$\left\|(e-a)^{-1}\right\| \leqslant \sum_{l=0}^{\infty} \left\|a^l\right\| .$$

*Si $\|a\| < 1$ , alors*

$$\left\|(e-a)^{-1}\right\| \leqslant \frac{1}{1-\|a\|} .$$

La première partie découle immédiatement du critère de la racine et du critère de Weierstraß (théorème 2.5.ii).

Quant à la seconde, on a

$$(e-a)\cdot\sum_{l=0}^{k} a^l = \left(\sum_{l=0}^{k} a^l\right)\cdot(e-a) = e - a^{k+1}$$

et $\lim_k \left\|a^k\right\| = 0$ , puisque la série $\sum_{l=0}^{\infty} a^l$ est absolument convergente, donc $\lim_k a^k = 0$ . Finalement on a

$$\left\|(e-a)^{-1}\right\| = \left\|\sum_{l=0}^{\infty} a^l\right\| \leqslant \sum_{l=0}^{\infty} \left\|a^l\right\| \leqslant \sum_{l=0}^{\infty} \|a\|^l = \frac{1}{1-\|a\|} ,$$

si $\|a\| < 1$ . □

**REMARQUE** Nous avons remarqué que la condition $\rho(a) < 1$ entraîne $\lim_k \left\|a^k\right\| = 0$ . Dire que $a$ est quasi-nilpotent est une condition évidemment plus forte, puisqu'on a

$$\rho(a) = \lim_k \left\|a^k\right\|^{\frac{1}{k}} = 0 .$$

Voici un exemple d'un tel opérateur.

**EXEMPLE (Opérateur intégral de Volterra)** Soient $[a,b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\varkappa$ une fonction continue définie sur le triangle fermé inférieur

$$D := \left\{ (x,y) \in [a,b]^2 \;\middle|\; y \leqslant x \right\} .$$

En prolongeant $\varkappa$ par 0 sur $[a,b]^2$ , nous savons que ce noyau satisfait aux conditions (a)-(d) de 3.3, cas général (cf. exercice 3.3.2), donc défini un opérateur borné $K$ dans $\mathcal{C}([a,b])$ . Montrons par récurrence que, pour tout $\varphi \in \mathcal{C}([a,b])$ , $k \in \mathbb{N}$ et $x \in [a,b]$ , on a

$$\left|K^k\varphi(x)\right| \leqslant \|\varkappa\|_\infty^k \cdot \|\varphi\|_\infty \cdot \frac{(x-a)^k}{k!} \ .$$

Cette inégalité est évidente pour $k=0$ et on a

$$\left|K^{k+1}\varphi(x)\right| = \left|\int_a^x \varkappa(x,y)\cdot K^k\varphi(y)\ dy\right| \leqslant \|\varkappa\|_\infty^{k+1}\cdot\|\varphi\|_\infty\cdot\int_a^x \frac{(y-a)^k}{k!}\,dy =$$

$$= \|\varkappa\|_\infty^{k+1}\cdot\|\varphi\|_\infty\cdot\frac{(x-a)^{k+1}}{(k+1)!} \ ,$$

ce qu'il fallait démontrer. Ainsi

$$\left\|K^k\right\| \leqslant \frac{1}{k!}\cdot\|\varkappa\|_\infty^k\cdot(b-a)^k \ ,$$

et par suite

$$\rho(K) = \inf_k \left\|K^k\right\|^{\frac{1}{k}} = \inf_k \frac{\|\varkappa\|_\infty\cdot(b-a)}{(k!)^{\frac{1}{k}}} = 0 \ .$$

Ceci montre que $K$ est quasi-nilpotent.

Pour tout $\psi \in \mathcal{C}([a,b])$ , l'équation

$$\varphi(x) = \int_a^x \varkappa(x,y)\cdot\varphi(y)\ dy + \psi(x) \quad \text{pour } x \in [a,b]$$

s'appelle l'*équation intégrale de Volterra* . Le théorème montre donc que cette équation possède une unique solution $\varphi$ donnée par la formule

$$\varphi = (\mathrm{Id} - K)^{-1}\psi = \left(\sum_{l=0}^\infty K^l\right)\psi = \sum_{l=0}^\infty K^l\psi\,;$$

la dernière série converge dans $\mathcal{C}([a,b])$ , c'est-à-dire uniformément sur $[a,b]$ .

Comme $(\mathrm{Id} - K)^{-1}$ est un opérateur borné, la solution $\varphi$ dépend continûment de $\psi$ .

## 6.3 Le spectre dans une algèbre de Banach unifère

**PROPOSITION** *Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach unifère. Le groupe $\mathbb{G}(\mathcal{A})$ des éléments inversibles de $\mathcal{A}$ est ouvert et l'application*

$$a \longmapsto a^{-1} : \mathbb{G}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathcal{A}$$

*est continue.*

Soit $b \in \mathbb{G}(\mathcal{A})$ . Pour tout $a \in \mathcal{A}$ , on a alors

$$a = b - (b-a) = b\left[e - b^{-1}(b-a)\right] \ .$$

Si $\|a-b\| < \frac{1}{\|b^{-1}\|}$ , alors $e - b^{-1}(b-a) \in \mathbb{G}(\mathcal{A})$ par le théorème 6.2, donc $a \in \mathbb{G}(\mathcal{A})$ et on a

$$a^{-1} = \left(\sum_{l=0}^{\infty}\left[b^{-1}(b-a)\right]^l\right) b^{-1} = b^{-1} + \sum_{l=1}^{\infty}\left[b^{-1}(b-a)\right]^l b^{-1} \ .$$

Ceci montre que la boule ouverte de centre $b$ et de rayon $\frac{1}{\|b^{-1}\|}$ est contenue dans $\mathbb{G}(\mathcal{A})$ . Cet ensemble est donc ouvert et on a

$$\left\|a^{-1} - b^{-1}\right\| \leqslant \left\|\sum_{l=1}^{\infty}\left[b^{-1}(b-a)\right]^l b^{-1}\right\| \leqslant \sum_{l=1}^{\infty}\left\|b^{-1}\right\|^{l+1} \cdot \|b-a\|^l = \frac{\left\|b^{-1}\right\|^2 \cdot \|b-a\|}{1 - \|b^{-1}\| \cdot \|b-a\|} \ ,$$

ce qui prouve la continuité de $a \longmapsto a^{-1}$ en $b$ . □

**REMARQUE 1** Ce théorème est utilisé en pratique de la manière suivante :

Soit $a \in \mathcal{A}$ . Si l'on sait que $a$ est inversible, mais si le calcul de son inverse n'est pas possible directement, on essaye de trouver une suite $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ d'éléments bien connus qui converge vers $a$ . Alors, pour tout $k$ assez grand, l'élément $a_k$ est inversible et

$$a^{-1} = \lim_k a_k^{-1} \ .$$

**DEFINITION 1** Soient $F$ un espace de Banach et $(c_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset F$ . On dit que

$$\sum_{l=0}^{\infty} w^l \cdot c_l = \sum_{l=0}^{\infty} c_l \cdot w^l$$

est une *série (formelle) entière* dans $F$ . Si $Z$ est un ouvert de $\mathbb{K}$ , on dit qu'une fonction $f : Z \longrightarrow F$ est *analytique* dans $Z$ si $f$ est développable en une série entière convergente au voisinage de chaque point $z \in Z$ , i.e. s'il existe $r > 0$ et $(c_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset F$ tels que

$$f(z+w) = \sum_{l=0}^{\infty} c_l \cdot w^l \quad \text{si } |w| < r \ .$$

On trouvera dans le livre de J. Dieudonné [6], chapitre IX, toutes les informations nécessaires sur la théorie des fonctions analytiques à valeurs dans un espace de Banach.

**DEFINITION 2** Soient $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach unifère et $a \in \mathcal{A}$ . On dit que $\lambda \in \mathbb{K}$ est une *valeur spectrale* de $a$ (par rapport à $\mathcal{A}$ ) si $a - \lambda \cdot e$ n'est pas inversible dans $\mathcal{A}$ . On désigne par $\operatorname{Sp} a$ (ou $\operatorname{Sp}_{\mathcal{A}} a$ ) l'ensemble des valeurs spectrales de $a$ et on dit que c'est le *spectre* de $a$ (dans $\mathcal{A}$ ).

**REMARQUE 2** Pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$ , on a

$$\operatorname{Sp}(a + \alpha \cdot e) = \operatorname{Sp} a + \alpha \ .$$

En effet $\lambda \in \operatorname{Sp}(a + \alpha \cdot e)$ est équivalent à ce que $a + \alpha \cdot e - \lambda \cdot e = a - (\lambda - \alpha) \cdot e$ ne soit pas inversible, donc à $\lambda - \alpha \in \operatorname{Sp} a$ , i.e. $\lambda \in \operatorname{Sp} a + \alpha$ . $\square$

**THEOREME** *Soient $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach unifère et $a \in \mathcal{A}$ . Alors* $\operatorname{Sp} a$ *est fermé, l'application*

$$R : \mathbb{K} \smallsetminus \operatorname{Sp} a \longrightarrow \mathcal{A} : z \longmapsto (a - z \cdot e)^{-1} \ ,$$

*dite* résolvente *de $a$ , est analytique et* $\operatorname{Sp} a$ *est contenu dans le disque de centre* 0 *et de rayon* $\rho(a)$ *. En particulier* $\operatorname{Sp} a$ *est compact.*

*Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ , alors* $\operatorname{Sp} a \neq \emptyset$ *et*

$$\rho(a) = \max\nolimits_{\lambda \in \operatorname{Sp} a} |\lambda| \ .$$

Soit $z \notin \operatorname{Sp} a$ . Pour tout $w \in \mathbb{K}$ tel que $|w| < \frac{1}{\|R(z)\|}$ , l'élément

$$a - (z + w) \cdot e = (a - z \cdot e)\,[e - w \cdot R(z)]$$

est inversible par le théorème 6.2 et on a

$$R(z + w) = [e - w \cdot R(z)]^{-1} (a - z \cdot e)^{-1} = \left(\sum_{l=0}^{\infty} [w \cdot R(z)]^l\right) R(z) = \sum_{l=0}^{\infty} R(z)^{l+1} \cdot w^l \ ,$$

ce qui montre que $\mathbb{K} \smallsetminus \operatorname{Sp} a$ est ouvert et prouve l'analyticité de $R$ . Si $|z| > \rho(a)$ , i.e. $\rho\left(\frac{1}{z} \cdot a\right) < 1$ , le théorème 6.2 montre que $a - z \cdot e = -z \cdot \left(e - \frac{1}{z} \cdot a\right)$ est inversible.

Si maintenant $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et $|z| > \|a\|$ , on a

$$R(z) = -\frac{1}{z} \cdot \left(e - \frac{1}{z} \cdot a\right)^{-1} = -\frac{1}{z} \cdot \sum_{l=0}^{\infty} a^l \cdot \frac{1}{z^l} \ , \qquad (*)$$

donc

$$\|R(z)\| \leqslant \frac{1}{|z|} \cdot \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{\|a\|}{|z|}\right)^l = \frac{1}{|z|} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\|a\|}{|z|}} \ .$$

Ceci montre que $R$ tend vers 0 à l'infini. Si $\operatorname{Sp} a = \emptyset$ , la fonction $R$ est analytique et bornée sur $\mathbb{C}$ , donc constante par le théorème de Liouville (Dieudonné [6], théorème 9.11.1). La fonction $R$ est donc identiquement nulle, ce qui est absurde, puisqu'on a

$$e = aR(0) = 0 \ .$$

D'autre part la fonction

$$Q : z \longmapsto R\left(\frac{1}{z}\right) : \mathbb{C} \smallsetminus \frac{1}{\operatorname{Sp} a} \longrightarrow \mathcal{A} \ ,$$

en ayant posé $Q(0) = R(\infty) = 0$ , est analytique et son développement en 0 est

$$Q(z) = -\sum_{l=0}^{\infty} a^l \cdot z^{l+1}$$

par la formule $(*)$ . D'après la formule d'Hadamard, le rayon de convergence de cette série est

$$\frac{1}{\limsup_k \|a^k\|^{\frac{1}{k}}} = \frac{1}{\rho(a)} .$$

Mais en appliquant le théorème 9.9.4 de Dieudonné [6], on obtient

$$\frac{1}{\rho(a)} \geqslant d\left(0, \frac{1}{\operatorname{Sp} a}\right) = \inf_{\lambda \in \operatorname{Sp} a} \left|0 - \frac{1}{\lambda}\right| = \frac{1}{\sup_{\lambda \in \operatorname{Sp} a} |\lambda|} \geqslant \frac{1}{\rho(a)} ,$$

donc

$$\rho(a) = \sup_{\lambda \in \operatorname{Sp} a} |\lambda| = \max_{\lambda \in \operatorname{Sp} a} |\lambda| ,$$

puisque $\operatorname{Sp} a$ est compact. □

**COROLLAIRE (Gelfand-Mazur)** *Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et $\mathcal{A}$ est un corps, alors $\mathcal{A} = \mathbb{C} \cdot e \simeq \mathbb{C}$ .*

Soit $a \in \mathcal{A}$ . Il existe donc $\lambda \in \operatorname{Sp} a$ , i.e. $a - \lambda \cdot e$ n'est pas inversible. Comme $\mathcal{A}$ est un corps, on doit avoir $a - \lambda \cdot e = 0$ , donc $a = \lambda \cdot e \in \mathbb{C} \cdot e$ . L'application $\lambda \longmapsto \lambda \cdot e : \mathbb{C} \longrightarrow \mathcal{A}$ est donc bijective et c'est évidemment une isométrie. □

**EXEMPLE 1** Soit $X$ un espace compact. Montrer que, pour tout $f \in \mathcal{C}(X)$ , on a $\operatorname{Sp} f = f(X)$ .

Il suffit de remarquer que, pour $z \in \mathbb{K}$ , la fonction $f - z \cdot 1$ est inversible, si, et seulement si, $f - z \cdot 1 \neq 0$ partout, i.e. $z \notin f(X)$ . □

**EXEMPLE 2** Soit $\mathcal{A}$ une algèbre unifère. Pour tout $a, b \in \mathcal{A}$ , on a

$$\operatorname{Sp}(ab) \setminus \{0\} = \operatorname{Sp}(ba) \setminus \{0\} .$$

Par symétrie, il suffit de prouver l'inclusion $\operatorname{Sp}(ab) \setminus \{0\} \subset \operatorname{Sp}(ba) \setminus \{0\}$ , c'est-à-dire que si pour $z \in \mathbb{C}^*$ , l'élément $ba - z \cdot e$ est inversible, il en est de même de $ab - z \cdot e$ . Posons $c := (ba - z \cdot e)^{-1}$ . On a alors

$$(ab - z \cdot e)(acb - e) = a(bac)b - ab - z \cdot acb + z \cdot e = a([ba - z \cdot e]c)b - ab + z \cdot e = z \cdot e$$

et de même

$$(acb - e)(ab - z \cdot e) = z \cdot e ,$$

ce qui prouve notre assertion. □

## 6.4 Transformation de Gelfand

**DEFINITION 1** Soit $\mathcal{A}$ une algèbre commutative. On dit qu'une forme linéaire

$$\chi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{K}$$

est un *caractère* (de $\mathcal{A}$ ) si

$$\langle \chi | ab \rangle = \langle \chi | a \rangle \cdot \langle \chi | b \rangle \quad \text{pour tout } a, b \in \mathcal{A} \ .$$

L'ensemble $\mathrm{Sp}\,\mathcal{A} \subset \mathcal{A}^*$ des caractères $\neq 0$ de $\mathcal{A}$ s'appelle le *spectre de* $\mathcal{A}$ .

Un caractère est donc un vecteur bra $\langle \chi|$ . Puisque nous considérons essentiellement la semi-dualité $\langle \mathcal{A} | \mathcal{A}^{\circledast} \rangle$ , nous utiliserons aussi les vecteurs ket $|\chi\rangle$ , qui sont des caractères semi-linéaires. Ainsi suivant les cas nous aurons $\mathrm{Sp}\,\mathcal{A} = \langle \mathrm{Sp}\,\mathcal{A}| \subset \mathcal{A}'$ ou bien $\mathrm{Sp}\,\mathcal{A} = |\mathrm{Sp}\,\mathcal{A}\rangle \subset \mathcal{A}^{\dagger}$ (cf. exemple 3.4.2).

**REMARQUE 1** Si $\mathcal{A}$ est unifère et si $\langle \chi | e \rangle = 0$ , on a

$$\langle \chi | a \rangle = \langle \chi | ae \rangle = \langle \chi | a \rangle \cdot \langle \chi | e \rangle = 0 \ ,$$

donc $\chi = 0$ . Par suite si $\chi \in \mathrm{Sp}\,\mathcal{A}$ , on a

$$\langle \chi | e \rangle = \langle \chi | ee \rangle = \langle \chi | e \rangle \cdot \langle \chi | e \rangle \ ,$$

donc

$$\langle \chi | e \rangle = 1 \ .$$

**DEFINITION 2** Soit $\mathcal{A}$ une algèbre commutative unifère. On dit qu'un sous-espace vectoriel $\mathfrak{I}$ de $\mathcal{A}$ est un *idéal* si $\mathcal{A}\mathfrak{I} \subset \mathfrak{I}$ . Il est dit *maximal* si $e \notin \mathfrak{I}$ , i.e. $\mathfrak{I} \neq \mathcal{A}$ , et si pour tout idéal $\mathfrak{J}$ tel que $e \notin \mathfrak{J} \supset \mathfrak{I}$ , on a $\mathfrak{I} = \mathfrak{J}$ .

**REMARQUE 2** Si $\chi$ est un caractère, alors $\mathrm{Ker}\,\chi$ est un idéal maximal.

En effet $\mathrm{Ker}\,\chi$ est un idéal, puisque

$$\langle \chi | ab \rangle = \langle \chi | a \rangle \cdot \langle \chi | b \rangle = 0 \quad \text{pour tout } a \in \mathcal{A} \text{ et } b \in \mathrm{Ker}\,\chi \ .$$

On a évidemment $e \notin \mathrm{Ker}\,\chi$ . Ce noyau étant de codimension 1 , c'est un idéal maximal. □

**REMARQUE 3** Si $\mathfrak{I}$ est un idéal, alors $\mathcal{A}/\mathfrak{I}$ est une algèbre. Si $\mathfrak{I}$ est maximal, alors $\mathcal{A}/\mathfrak{I}$ est un corps.

Rappelons que la multiplication dans $\mathcal{A}/\mathfrak{I}$ est définie par $[a]\,[b] := [ab]$ , ceci ne dépendant évidemment pas du choix des représentants. Montrons la seconde assertion. Si $[c] \in \mathcal{A}/\mathfrak{I} \smallsetminus \{0\}$ , on a $c \notin \mathfrak{I}$ , donc $\mathcal{A}c + \mathfrak{I}$ est un idéal contenant et différent de $\mathfrak{I}$ ; cet idéal est donc égal à $\mathcal{A}$ , d'où l'on tire $e = ac + b$ pour certains $a \in \mathcal{A}$ et $b \in \mathfrak{I}$ . Ainsi $[e] = [a]\,[c]$ , ce qui montre que $[c]$ est inversible. □

**THEOREME (de Gelfand)** *Soient $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach complexe commutative unifère et $a \in \mathcal{A}$ . Pour que $a$ soit inversible, il faut et il suffit que, pour tout caractère $\chi$ de $\mathcal{A}$ on ait $\langle \chi | a \rangle \neq 0$ .*

Si $a$ est inversible, on a

$$\langle \chi | a \rangle \cdot \left\langle \chi \left| a^{-1} \right. \right\rangle = \left\langle \chi \left| aa^{-1} \right. \right\rangle = \langle \chi | e \rangle = 1 \ ,$$

donc $\langle \chi | a \rangle \neq 0$ .

Réciproquement si $a$ n'est pas inversible, alors $\mathcal{A}a$ est un idéal et $e \notin \mathcal{A}a$ . D'après le théorème de Krull il existe un idéal maximal $\mathfrak{J}$ de $\mathcal{A}$ contenant $\mathcal{A}a$ . Remarquons que ce théorème est une application simple du principe de maximalité de Hausdorff. Par la continuité du produit dans $\mathcal{A}$ (cf. proposition 2.4), l'adhérence $\overline{\mathfrak{J}}$ de $\mathfrak{J}$ est un idéal de $\mathcal{A}$ . Mais comme $\mathfrak{J}$ est disjoint de l'ouvert $\mathbb{G}(\mathcal{A})$ (cf. proposition 6.3), il en est de même de $\overline{\mathfrak{J}}$ , donc $\mathfrak{J} = \overline{\mathfrak{J}}$ par maximalité. Montrons maintenant que $\mathcal{A}/\mathfrak{J}$ est une algèbre de Banach. Pour tout $u, v \in \mathcal{A}$ , on a

$$\|[u]\,[v]\| = \inf_{c\in\mathfrak{J}} \|uv + c\| \leqslant \inf_{c,d\in\mathfrak{J}} \|(u+c)\,(v+d)\| \leqslant$$

$$\leqslant \inf_{c\in\mathfrak{J}} \|u+c\| \cdot \inf_{d\in\mathfrak{J}} \|v+d\| = \|[u]\| \cdot \|[v]\| \ .$$

C'est aussi un corps par la remarque 2, donc $\mathcal{A}/\mathfrak{J} \approx \mathbb{C}$ par le théorème de Gelfand-Mazur. Il est alors clair que l'application canonique

$$\langle \chi | : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}/\mathfrak{J} \xrightarrow{\approx} \mathbb{C}$$

est un homomorphisme d'algèbre, donc un caractère (linéaire) de $\mathcal{A}$ , tel que $\langle \chi | a \rangle = 0$ , puisque $a \in \mathfrak{J}$ . □

**EXERCICE** Une des plus belles applications de ce résultat, en fait banal, est le **théorème de Wiener** :

Soit $f : \mathbb{U} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue dont la série de Fourier est absolument convergente. Si $f \neq 0$ partout sur $\mathbb{U}$ , alors la série de Fourier de $\frac{1}{f}$ est aussi absolument convergente.

**COROLLAIRE** *On a*

$$\operatorname{Sp} a = \{ \langle \chi | a \rangle \mid \chi \in \operatorname{Sp} \mathcal{A} \} = \langle \operatorname{Sp} \mathcal{A} | a \rangle \ .$$

*En particulier chaque caractère est de norme* 1 *et* $\operatorname{Sp} \mathcal{A}$ *comme sous-espace topologique de* $\mathcal{A}^\dagger$ *est compact.*

En effet on a $\lambda \in \operatorname{Sp} a$ si, et seulement si, il existe un caractère $\chi$ tel que $\langle \chi | a - \lambda \cdot e \rangle = 0$ , i.e $\lambda = \langle \chi | a \rangle$ .

Comme $\operatorname{Sp} a \subset B(0, \rho(a))$ , on a

$$|\langle \chi | a \rangle| \leqslant \rho(a) \leqslant \|a\| \ , \qquad (*)$$

donc $\|\chi\| = 1$ , puisque $\langle \chi | e \rangle = 1$ . Ainsi $\operatorname{Sp} \mathcal{A}$ est contenu dans la boule unité $\mathbb{B}_{\mathcal{A}^\dagger}$ de $\mathcal{A}^\dagger$ , qui est faiblement compacte par le corollaire 3.11. Directement pour tout $\chi \in \operatorname{Sp} \mathcal{A}$ , on a

$$|\langle \chi | a \rangle| \leqslant \|\chi\| \cdot \|a\| \leqslant \|a\| \ ,$$

donc

$$\operatorname{Sp} \mathcal{A} \subset \prod_{a\in\mathcal{A}} B(0, \|a\|) \subset \mathbb{C}^{\mathcal{A}} : \chi \longmapsto \langle \chi |_{|\mathcal{A}} \ ,$$

et $\prod_{a\in\mathcal{A}} B(0, \|a\|)$ est compact par le théorème de Tychonoff.

Il nous reste à voir que $\langle \operatorname{Sp} \mathcal{A}|$ est fermé pour la topologie de la convergence ponctuelle dans $\mathbb{C}^{\mathcal{A}}$ , ce qui est évident puisque

$$\operatorname{Sp} \mathcal{A} = \bigcap_{a,b \in \mathcal{A}} \{ \langle \chi | \in \mathcal{A}^* \mid \langle \chi | ab \rangle - \langle \chi | a \rangle \cdot \langle \chi | b \rangle = 0 \} \cap \{ \langle \chi | \in \mathcal{A}' \mid \langle \chi | e \rangle - 1 = 0 \}$$

et

$$\mathcal{A}^* = \bigcap_{a,b \in \mathcal{A}, \alpha \in \mathbb{C}} \left\{ f \in \mathbb{C}^{\mathcal{A}} \;\middle|\; f(\mu\alpha \cdot a + b) - \alpha \cdot f(a) - f(b) = 0 \right\}$$

est fermé dans $\mathbb{C}^{\mathcal{A}}$ . □

**DEFINITION 3** Si $\mathcal{A}$ est une algèbre commutative et $a \in \mathcal{A}$ , on dit que la fonction

$$\mathcal{G}a := |a\rangle_{|\operatorname{Sp} \mathcal{A}} : \operatorname{Sp} \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{C} : \chi \longmapsto \langle \chi | a \rangle$$

est la *transformée de Gelfand* de $a$ .

Les résultats ci-dessus peuvent alors s'exprimer sous la forme suivante :

**SCOLIE** *Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach complexe commutative unifère. La transformation de Gelfand*

$$\mathcal{G} : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{C}(\operatorname{Sp} \mathcal{A}) : a \longmapsto \mathcal{G}a = |a\rangle_{|\operatorname{Sp} \mathcal{A}}$$

*est un homomorphisme d'algèbre unifère et $\|\mathcal{G}\| = 1$ . Plus précisément, pour tout $a \in \mathcal{A}$ , on a*

$$\operatorname{Sp} a = \mathcal{G}a(\operatorname{Sp} \mathcal{A}) \quad \text{et} \quad \|\mathcal{G}a\|_\infty = \rho(a) \ ;$$

*$a$ est inversible dans $\mathcal{A}$ si, et seulement si, il en est de même de $\mathcal{G}a$ dans $\mathcal{C}(\operatorname{Sp} \mathcal{A})$ .*

Il est clair que $\mathcal{G}$ est un morphisme, car pour tout $a, b \in \mathcal{A}$ et $\chi \in \operatorname{Sp} \mathcal{A}$ , on a

$$\mathcal{G}(ab)(\chi) = \langle \chi | ab \rangle = \langle \chi | a \rangle \cdot \langle \chi | b \rangle = \mathcal{G}a(\chi) \cdot \mathcal{G}b(\chi) = (\mathcal{G}a \cdot \mathcal{G}b)(\chi) \ .$$

Les formules découlent du corollaire ci-dessus et du théorème 6.3, car

$$\mathcal{G}a(\operatorname{Sp} \mathcal{A}) = \langle \operatorname{Sp} \mathcal{A} | a \rangle = \operatorname{Sp} a$$

et

$$\|\mathcal{G}a\|_\infty = \max |\langle \operatorname{Sp} \mathcal{A} | a \rangle| = \max |\operatorname{Sp} a| = \rho(a) \ .$$

Finalement on a

$$\|\mathcal{G}\| = \sup_{a \in \mathcal{A}, \|a\| \leqslant 1} \|\mathcal{G}a\|_\infty \leqslant 1 \ ,$$

puisque $\rho(a) \leqslant \|a\|$ et $\mathcal{G}e = 1$ . □

Pour les deux remarques qui suivent nous supposons que $\mathcal{A}$ est une algèbre de Banach complexe commutative unifère.

**REMARQUE 4** Pour que la transformation de Gelfand soit injective, il faut et il suffit que, que $\mathcal{A}$ ne possède pas d'éléments quasi-nilpotents non-nuls.

En effet l'injectivité est équivalente à ce que $\rho(a) = \|\mathcal{G}a\|_\infty = 0$ entraîne $a = 0$ . □

**REMARQUE 5** La transformation de Gelfand est une isométrie si, et seulement si, pour tout $a \in \mathcal{A}$ , on a $\|a^2\| = \|a\|^2$ .

Si $a \in \mathcal{A}$ satisfait à $\|a^2\| = \|a\|^2$ , alors

$$\rho(a) = \lim_k \left\|a^{2^k}\right\|^{\frac{1}{2^k}} = \|a\| \ .$$

Ceci montre en outre que la condition est suffisante, car

$$\|\mathcal{G}a\|_\infty = \rho(a) = \|a\| \ .$$

La condition est nécessaire, puisque

$$\left\|a^2\right\| = \left\|\mathcal{G}\left(a^2\right)\right\|_\infty = \left\|(\mathcal{G}a)^2\right\|_\infty = \|\mathcal{G}a\|_\infty^2 = \rho(a)^2 = \|a\|^2 \ .$$

## 6.5 Théorème de Gelfand-Neumark

**DEFINITION 1** Soit $\mathcal{A}$ une algèbre. Une application

$$a \longmapsto a^* : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$$

telle que, pour tout $a, b \in \mathcal{A}$ et $\alpha \in \mathbb{K}$ , on ait

$$(a^*)^* = a \quad , \quad (a + \alpha \cdot b)^* = a^* + \bar{\alpha} \cdot b^* \quad \text{et} \quad (ab)^* = b^* a^* \ ,$$

s'appelle une *involution* et on dit que $\mathcal{A}$ est *involutive* . Si $\mathcal{A}$ est normée, on exige en plus que

$$\|a^*\| = \|a\| \ .$$

On dit que $a \in \mathcal{A}$ est *auto-adjoint* si $a^* = a$ et *normal* si $a^* a = a a^*$ . Nous désignerons par $\mathcal{A}_{aa}$ l'ensemble des éléments auto-adjoints de $\mathcal{A}$ .

Si $\mathcal{A}$ est unifère, on a $e^* = e$ . $\mathcal{A}_{aa}$ est un sous-espace vectoriel réel de $\mathcal{A}$ et si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ on a la décomposition

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_{aa} + i \cdot \mathcal{A}_{aa}$$

puisque, pour tout $a \in \mathcal{A}$ , $\frac{a+a^*}{2}$ et $\frac{a-a^*}{2i}$ sont auto-adjoints et

$$a = \frac{a + a^*}{2} + i \cdot \frac{a - a^*}{2i} \ .$$

**EXEMPLE 1** Soit $X$ un espace compact. Alors $\mathcal{C}(X)$ , muni de l'involution $f \longmapsto \overline{f}$ , est une algèbre de Banach involutive unifère telle que

$$\left\|\overline{f} f\right\|_\infty = \|f\|_\infty^2 \quad \text{pour tout } f \in \mathcal{C}(X) \ .$$

**EXEMPLE 2** Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert. Alors $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ , muni de l'involution $T \longmapsto T^*$ , est une algèbre de Banach involutive unifère telle que

$$\|T^* T\| = \|T\|^2 \quad \text{pour tout } T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}) \ .$$

Puisque $T^* T$ est auto-adjoint, par la proposition 3.17.i on a en effet

$$\|T^* T\| = \sup\nolimits_{\xi \in \mathcal{H}, \|\xi\| \leqslant 1} |(\xi | T^* T \xi)| = \sup\nolimits_{\xi \in \mathcal{H}, \|\xi\| \leqslant 1} \|T\xi\|^2 = \|T\|^2 \ . \quad \square$$

Ceci nous conduit à poser la

**DEFINITION 2** Une algèbre de Banach complexe involutive (unifère) telle que l'on ait

$$\|a^* a\| = \|a\|^2 \quad \text{pour tout } a \in \mathcal{A}$$

est dite *stellaire* . On dit aussi que c'est une *$C^*$-algèbre* .

**PROPOSITION** *Soient $\mathcal{A}$ une algèbre stellaire unifère et $a$ un élément auto-adjoint. Alors*

$$\rho(a) = \|a\| \quad \textit{et} \quad \operatorname{Sp} a \subset \mathbb{R} \ .$$

On a

$$\left\|a^2\right\| = \|a^*a\| = \|a\|^2 \ ,$$

donc $\rho(a) = \|a\|$ par la remarque 6.4.5.

Soit maintenant $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha + i \cdot \beta \in \operatorname{Sp} a$ . Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ , on a évidemment $\alpha + i \cdot (\beta + \lambda) \in \operatorname{Sp}(a + i \cdot \lambda \cdot e)$ par la remarque 6.3.2, donc

$$\alpha^2 + (\beta+\lambda)^2 = |\alpha + i \cdot (\beta+\lambda)|^2 \leqslant \|a + i \cdot \lambda \cdot e\|^2 = \|(a + i \cdot \lambda \cdot e)^* (a + i \cdot \lambda \cdot e)\| =$$

$$= \left\|a^*a + \lambda^2 \cdot e\right\| \leqslant \|a\|^2 + \lambda^2 \ ,$$

d'où l'on tire

$$2\beta\lambda \leqslant \|a\|^2 - \alpha^2 - \beta^2 \ ,$$

ce qui n'est possible que si $\beta = 0$ . □

**DEFINITION 3** Si $\mathcal{A}$ est une algèbre involutive commutative, on dit qu'un caractère $\chi \in \operatorname{Sp} \mathcal{A}$ est *hermitien* si

$$\langle \chi | \, a^* \rangle = \overline{\langle \chi | \, a \rangle} \quad \text{pour tout } a \in \mathcal{A} \ .$$

**THEOREME (de Gelfand-Neumark)** *Soit $\mathcal{A}$ une algèbre stellaire unifère et commutative. Alors tout caractère de $\mathcal{A}$ est hermitien et la transformation de Gelfand $\mathcal{G} : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{C}(\operatorname{Sp} \mathcal{A})$ est un isomorphisme d'algèbre stellaire.*

Si $a \in \mathcal{A}$ est auto-adjoint et $\chi \in \operatorname{Sp} \mathcal{A}$ , alors

$$\langle \chi | \, a \rangle \in \operatorname{Sp} a \subset \mathbb{R}$$

par le scolie 6.4. Si maintenant $a$ est quelconque, on a

$$\left\langle \chi \left| \frac{a + a^*}{2} \right.\right\rangle , \left\langle \chi \left| \frac{a - a^*}{2i} \right.\right\rangle \in \mathbb{R} \ ,$$

puisque $\frac{a+a^*}{2}$ et $\frac{a-a^*}{2i}$ sont auto-adjoints. Il vient alors

$$\langle \chi | \, a^* \rangle = \left\langle \chi \left| \frac{a + a^*}{2} \right.\right\rangle - i \cdot \left\langle \chi \left| \frac{a - a^*}{2i} \right.\right\rangle = \overline{\left\langle \chi \left| \frac{a + a^*}{2} \right.\right\rangle + i \cdot \left\langle \chi \left| \frac{a - a^*}{2i} \right.\right\rangle} = \overline{\langle \chi | \, a \rangle} \ ,$$

ce qui montre que $\chi$ est hermitien. On en déduit que $\mathcal{G}$ est involutive, puisque

$$\mathcal{G}a^*(\chi) = \langle \chi | \, a^* \rangle = \overline{\langle \chi | \, a \rangle} = \overline{\mathcal{G}a(\chi)} = \overline{\mathcal{G}a}(\chi) \ ,$$

donc

$$\|a\|^2 = \|a^*a\| = \rho(a^*a) = \|\mathcal{G}(a^*a)\|_\infty = \left\|\overline{\mathcal{G}a} \cdot \mathcal{G}a\right\|_\infty = \|\mathcal{G}a\|_\infty^2 \ ,$$

par la proposition ci-dessus et le scolie 6.4. Ceci prouve que $\mathcal{G}$ est une isométrie de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{C}(\operatorname{Sp} \mathcal{A})$ . Ainsi $\mathcal{G}(\mathcal{A})$ est une sous-algèbre involutive complète, donc fermée de $\mathcal{C}(\operatorname{Sp} \mathcal{A})$ . Elle contient les constantes, puisque $\mathcal{G}e = 1$ ; elle sépare les points de $\operatorname{Sp} \mathcal{A}$ , car si $\chi_1 \neq \chi_2$ , par définition de l'égalité de deux formes linéaires, il existe $a \in \mathcal{A}$ tel que $\langle \chi_1 | \, a \rangle \neq \langle \chi_2 | \, a \rangle$ , i.e. $\mathcal{G}a(\chi_1) \neq \mathcal{G}a(\chi_2)$ . Le théorème de Stone-Weierstraß montre alors que $\mathcal{G}(\mathcal{A})$ est dense, donc égale à $\mathcal{C}(\operatorname{Sp} \mathcal{A})$ . □

## 6.6 Le spectre dans une sous-algèbre stellaire

**DEFINITION** Si $\mathcal{B}$ est une algèbre de Banach complexe involutive unifère, nous dirons que $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ est une *sous-algèbre stellaire unifère* de $\mathcal{B}$ si $\mathcal{A}$ est une sous-algèbre stellaire pour la structure induite et si elle contient l'élément unité de $\mathcal{B}$ .

Si $\mathcal{B}$ est une algèbre stellaire unifère, alors $\mathcal{A}$ est une sous-algèbre stellaire de $\mathcal{B}$ si, et seulement si, $\mathcal{A}$ est une sous-algèbre involutive fermée contenant l'unité de $\mathcal{B}$ .

**PROPOSITION** *Si $\mathcal{A}$ est une sous-algèbre stellaire unifère de $\mathcal{B}$ , alors tout $a \in \mathcal{A}$ qui est inversible dans $\mathcal{B}$ est inversible dans $\mathcal{A}$ . En d'autres termes on a*

$$\mathrm{Sp}_{\mathcal{A}}\, a = \mathrm{Sp}_{\mathcal{B}}\, a \ .$$

Soit $a \in \mathcal{A}$ un élément auto-adjoint inversible dans $\mathcal{B}$ . On a $\mathrm{Sp}_{\mathcal{A}}\, a \subset \mathbb{R}$ par la proposition 6.6, donc

$$0 \notin \mathrm{Sp}\, a + i \cdot \lambda = \mathrm{Sp}\,(a + i \cdot \lambda \cdot e) \quad \text{pour tout } \lambda \in \mathbb{R}^*$$

par la remarque 6.3.2. Ainsi $a + i \cdot \lambda \cdot e$ est inversible dans $\mathcal{A}$ . Son inverse $(a + i \cdot \lambda \cdot e)^{-1} \in \mathcal{A}$ est aussi son inverse dans $\mathcal{B}$ et la proposition 6.3 appliquée à $\mathcal{B}$ montre, puisque $a = \lim_{\lambda \to 0}(a + i \cdot \lambda \cdot e)$ , que

$$a^{-1} = \lim_{\lambda \to 0}(a + i \cdot \lambda \cdot e)^{-1} \quad \text{dans } \mathcal{B} \ .$$

Mais $\mathcal{A}$ est fermée dans $\mathcal{B}$, donc

$$a^{-1} = \lim_{\lambda \to 0}(a + i \cdot \lambda \cdot e)^{-1} \in \mathcal{A} \ .$$

Si maintenant $a \in \mathcal{A}$ est un élément quelconque inversible dans $\mathcal{B}$ , alors $a^*$ est aussi inversible dans $\mathcal{B}$ et son inverse est $(a^{-1})^*$ . L'élément auto-adjoint $a^*a$ , dont l'inverse est $a^{-1}(a^{-1})^*$ dans $\mathcal{B}$ , est inversible dans $\mathcal{A}$ par ce qui précède, i.e. $(a^*a)^{-1} \in \mathcal{A}$ . On en déduit que

$$a^{-1} = \left[aa^{-1}\left(a^{-1}\right)^*\right]^* = \left[a\,(a^*a)^{-1}\right]^* \in \mathcal{A} \ . \quad \square$$

**COROLLAIRE** *Soient $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert, $\mathcal{A}$ une sous-algèbre stellaire unifère de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ et $T \in \mathcal{A}$ . Alors le spectre $\mathrm{Sp}\, T$ de $T$ (dans $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ ) est égal au spectre $\mathrm{Sp}_{\mathcal{A}}\, a$ de $T$ dans $\mathcal{A}$ .*

**THEOREME** *Soient $\mathcal{B}$ une algèbre de Banach complexe involutive unifère, $\mathcal{A}$ une algèbre stellaire unifère et $\Theta : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A}$ un morphisme d'algèbre involutive unifère. Alors*

$$\mathrm{Sp}_{\mathcal{A}}\, \Theta b \subset \mathrm{Sp}_{\mathcal{B}}\, b$$

*et $\Theta$ est continu de norme $1$ .*

Pour tout $b \in \mathcal{B}$ , si $b - \lambda \cdot e$ est inversible dans $\mathcal{B}$ , alors $\Theta b - \lambda \cdot e$ est inversible dans $\mathcal{A}$ , donc $\mathrm{Sp}_{\mathcal{A}}\, \Theta b \subset \mathrm{Sp}_{\mathcal{B}}\, b$ . Le théorème 6.3 montre alors que

$$\rho\,(\Theta b) \leqslant \rho\,(b) \leqslant \|b\| \ ,$$

donc

$$\|\Theta b\|^2 = \|(\Theta b)^* \Theta b\| = \rho(\Theta(b^* b)) \leqslant \|b^* b\| \leqslant \|b\|^2$$

par la proposition 6.6. Ainsi $\|\Theta\| \leqslant 1$ et comme $\Theta e = e$ , on obtient $\|\Theta\| = 1$ . □

## 6.7 Calcul fonctionnel continu

**Dans les derniers paragraphes de ce chapitre,**
**$\mathcal{B}$ est une algèbre stellaire unifère,**
**$\mathcal{A}$ une sous-algèbre stellaire unifère commutative de $\mathcal{B}$**
**et $\mathcal{G} : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{C}(\mathrm{Sp}\,\mathcal{A})$ désigne l'isomorphisme de Gelfand-Neumark.**

**DEFINITION 1** Nous désignerons par $\mathcal{B}_+$ l'ensemble des éléments dits *positifs* , i.e. qui sont auto-adjoints et dont le spectre est contenu dans $\mathbb{R}_+$ .

Nous étudierons cet ensemble plus en détail en 6.9. La proposition 6.7 montre que $\mathcal{A}_+ = \mathcal{B}_+ \cap \mathcal{A}$ et que $a \in \mathcal{A}$ est positif si, et seulement si, $\mathcal{G}a \subset \mathbb{R}_+$ .

**DEFINITION 2** L'homomorphisme injectif d'algèbre stellaire

$$\Phi : \mathcal{C}(\mathrm{Sp}\,\mathcal{A}) \longrightarrow \mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{B} : f \longmapsto \overset{-1}{\mathcal{G}} f$$

est dit l'*intégrale spectrale* ou le *calcul fonctionnel (continu)* associée à l'algèbre $\mathcal{A}$ .

Toute opération liée à la structure d'algèbre stellaire unifère de $\mathcal{C}(\mathrm{Sp}\,\mathcal{A})$ peut donc être interprétée dans $\mathcal{A}$ comme dans $\mathcal{B}$ grâce à $\Phi$ .

**LEMME** *Pour tout $f \in \mathcal{C}(\mathrm{Sp}\,\mathcal{A})$ , on a*

$$\mathrm{Sp}_{\mathcal{B}}\,\Phi f = \mathrm{Sp}_{\mathcal{A}}\,\Phi f = f(\mathrm{Sp}\,\mathcal{A}) \ .$$

En effet la première égalité découle de la proposition 6.7, tandis que grâce à l'exemple 6.3.1, on obtient

$$\mathrm{Sp}_{\mathcal{A}}\,\Phi f = \mathrm{Sp}_{\mathcal{C}(\mathrm{Sp}\,\mathcal{A})}\,f = f(\mathrm{Sp}\,\mathcal{A}) \ . \quad \square$$

**DEFINITION 3** Nous désignerons par $\mathcal{A}(t)$ la sous-algèbre stellaire unifère engendrée par un élément $t \in \mathcal{B}$ , i.e. la plus petite sous-algèbre involutive fermé unifère contenant $t$ .

**REMARQUE 1** Pour que $\mathcal{A}(t)$ soit commutative, il faut et il suffit que $t$ soit normal ; dans ce cas, elle ne contient que des éléments normaux. Tout $t \in \mathcal{A}$ est normal et $\mathcal{A}(t) \subset \mathcal{A}$ .

En effet $\mathcal{A}(t)$ est la fermeture de la sous-algèbre $\mathcal{P}(t, t^*)$ des polynômes (non-commutatifs) en $t$ et $t^*$ . Le résultat est alors immédiat. Tout $t \in \mathcal{A}$ est normal , puisque $\mathcal{A}$ est commutative. $\square$

**THEOREME** *Soient $t \in \mathcal{B}$ un élément normal et $\mathcal{G} : \mathcal{A}(t) \longrightarrow \mathcal{C}(\mathrm{Sp}(\mathcal{A}(t)))$ l'isomorphisme de Gelfand-Neumark associé.*

*L'application*

$$\mathcal{G}t : \mathrm{Sp}\,\mathcal{A}(t) \longrightarrow \mathrm{Sp}\,t : \chi \longmapsto \langle \chi | \, t \rangle$$

*est alors un homéomorphisme et*

$$a \longmapsto \mathcal{G}a \circ (\mathcal{G}t)^{-1} : \mathcal{A}(t) \longrightarrow \mathcal{C}(\operatorname{Sp} t)$$

*est un isomorphisme d'algèbres stellaires unifères.*

*L'isomorphisme réciproque*

$$\mathcal{C}(\operatorname{Sp} t) \longrightarrow \mathcal{A}(t) \hookrightarrow \mathcal{B} : f \longmapsto f(t) := \overset{-1}{\mathcal{G}}(f \circ \mathcal{G}t)$$

*est l'unique morphisme d'algèbre involutive unifère* $\Psi : \mathcal{C}(\operatorname{Sp} t) \longrightarrow \mathcal{B}$ *tel que*

$$\Psi(\mathrm{id}) = t \ ,$$

*où* id *désigne la fonction* $\operatorname{Sp} t \longrightarrow \mathbb{C} : \lambda \longmapsto \lambda$ *. C'est une isométrie et son image est* $\mathcal{A}(t)$ *.*

Montrons tout d'abord que $\mathcal{G}t$ est injective. Etant donné des caractères $\chi_1, \chi_2 \in \operatorname{Sp} \mathcal{A}(t)$ tels que $\langle \chi_1 | t \rangle = \langle \chi_2 | t \rangle$ , alors

$$\langle \chi_1 | t^* \rangle = \overline{\langle \chi_1 | t \rangle} = \overline{\langle \chi_2 | t \rangle} = \langle \chi_2 | t^* \rangle \ ,$$

donc $\chi_1$ et $\chi_2$ coïncident sur $\mathcal{P}(t, t^*)$ et par suite sur $\mathcal{A}(t)$ par continuité. Puisque $\mathcal{G}t$ est surjective par le scolie 6.4, et que $\operatorname{Sp} \mathcal{A}(t)$ est compact, c'est un homéomorphisme. On en déduit que l'application

$$g \longmapsto g \circ (\mathcal{G}t)^{-1} : \mathcal{C}(\operatorname{Sp} \mathcal{A}(t)) \longrightarrow \mathcal{C}(\operatorname{Sp} t)$$

est un isomorphisme d'algèbres stellaires, donc aussi

$$a \longmapsto \mathcal{G}a \longmapsto \mathcal{G}a \circ (\mathcal{G}t)^{-1} : \mathcal{A}(t) \longrightarrow \mathcal{C}(\operatorname{Sp} \mathcal{A}(t)) \longrightarrow \mathcal{C}(\operatorname{Sp} t) \ .$$

L'isomorphisme réciproque satisfait à la condition puisque

$$\mathrm{id}(t) = \overset{-1}{\mathcal{G}}(\mathrm{id} \circ \mathcal{G}t) = \overset{-1}{\mathcal{G}}(\mathcal{G}t) = t \ .$$

Quant à l'unicité, $\Psi$ est univoquement déterminé par hypothèse sur la sous-algèbre unifère involutive des fonctions continues sur $\operatorname{Sp} t$ engendrée par id . Mais id sépare les points de $\operatorname{Sp} t$ ; cette sous-algèbre est donc dense dans $\mathcal{C}(\operatorname{Sp} t)$ par le théorème de Stone-Weierstraß. Le théorème 6.7 montrant que $\Psi$ est continu, on en déduit que $\Psi$ est aussi univoquement déterminé sur $\mathcal{C}(\operatorname{Sp} t)$ . □

**DEFINITION 4** On dit que le morphisme d'algèbre involutive unifère

$$f \longmapsto f(t) : \mathcal{C}(\operatorname{Sp} t) \longrightarrow \mathcal{B}$$

est l'*intégrale spectrale* ou le *calcul fonctionnel (continu)* associée à l'élément normal $t$ .

Il est donc univoquement déterminé par

$$1(t) = e \quad \text{et} \quad \mathrm{id}(t) = t \ .$$

**EXEMPLE 1** Si $a, b \in \mathcal{B}$ sont des éléments positifs qui commutent, alors $ab$ est positif.

En effet l'algèbre stellaire unifère $\mathcal{A} := \mathcal{A}(a, b)$ engendrée par $a$ et $b$ , qui est la fermeture de la sous-algèbre des polynômes (commutatifs) en $a$ et $b$ est commutative. Puisque $\mathcal{G}a$ et $\mathcal{G}b$ sont des fonctions positives continues sur $\operatorname{Sp} \mathcal{A}(a, b)$ , il en est de même de $\mathcal{G}(ab) = \mathcal{G}a \cdot \mathcal{G}b$ .
□

Pour une application non-triviale voir l'exemple 6.9.

**EXEMPLE 2** Soit $t \in \mathcal{B}$ un élément auto-adjoint. Les éléments positifs $|t|$ , $t^+$ et $t^- \in \mathcal{A}(t)$ sont les seuls tels que

$$t = t^+ - t^- \quad , \quad t^+t^- = t^-t^+ = 0 \quad \text{et} \quad |t| = t^+ + t^- \ .$$

En outre

$$\left\|t^+\right\| , \left\|t^-\right\| \leqslant \left\| \, |t| \, \right\| = \|t\| \ .$$

En effet les fonctions continues positives $|\mathrm{id}|$ , $\mathrm{id}^+$ et $\mathrm{id}^-$ sur $\mathrm{Sp}\, t$ sont univoquement déterminées par les conditions

$$\mathrm{id} = \mathrm{id}^+ - \mathrm{id}^- \quad , \quad \mathrm{id}^+ \cdot \mathrm{id}^- = 0 \quad \text{et} \quad |\mathrm{id}| = \mathrm{id}^+ + \mathrm{id}^-$$

et on a

$$\left\|\mathrm{id}^+\right\|_\infty , \left\|\mathrm{id}^-\right\|_\infty \leqslant \left\| \, |\mathrm{id}| \, \right\|_\infty = \|\mathrm{id}\|_\infty \ . \quad \square$$

**EXEMPLE 3** Si $t \in \mathcal{B}$ est positif, pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$ , on peut définir $t^\alpha \in \mathcal{A}_+(t)$ et on a

$$t^\alpha t^\beta = t^{\alpha+\beta} \quad , \quad (t^\alpha)^\beta = t^{\alpha \cdot \beta} \ .$$

En particulier $\sqrt{t} := t^{\frac{1}{2}}$ est l'unique $r \in \mathcal{B}_+$ tel que $t = r^2$ .

En outre si $t \in \mathcal{B}$ est auto-adjoint, il existe des éléments uniques $u, v \in \mathcal{B}_+$ tels que

$$t = u^2 - v^2 \quad \text{et} \quad uv = vu = 0 \ .$$

En effet la fonctions $\mathrm{id}^\alpha$ est continue positives sur $\mathrm{Sp}\, t \subset \mathbb{R}_+$ . Les formules sont évidentes puisque $\mathrm{id}^\alpha \cdot \mathrm{id}^\beta = \mathrm{id}^{\alpha+\beta}$ et $(\mathrm{id}^\alpha)^\beta = \mathrm{id}^{\cdot\beta}$ . En particulier $\left(\sqrt{t}\right)^2 = t$ . D'autre part si $r \in \mathcal{B}_+$ est tel que $t = r^2$ , on a $\mathcal{A}(t) \subset \mathcal{A} := \mathcal{A}(r)$ et

$$(\mathcal{G}r)^2 = \mathcal{G}t = \left(\mathcal{G}\sqrt{t}\right)^2 \ ,$$

donc $\mathcal{G}r = \mathcal{G}\sqrt{t}$ , puisque ce sont des fonctions positives, et par suite $r = \sqrt{t}$ .

Finalement on a évidemment

$$t = \left(\sqrt{t^+}\right)^2 - \left(\sqrt{t^-}\right)^2 \quad \text{et} \quad \sqrt{t^+}\sqrt{t^-} = 0 \ .$$

Quant à l'unicité on considère l'algèbre stellaire unifère commutative $\mathcal{A}$ engendrée par $u$ et $v$ . On a alors

$$(\mathcal{G}u)^2 - (\mathcal{G}v)^2 = \mathcal{G}t = \left(\mathcal{G}\sqrt{t^+}\right)^2 - \left(\mathcal{G}\sqrt{t^-}\right)^2 \quad \text{et} \quad \mathcal{G}\sqrt{t^+} \cdot \mathcal{G}\sqrt{t^-} = 0 \ ,$$

donc $\mathcal{G}u = \mathcal{G}\sqrt{t^+}$ et $\mathcal{G}v = \mathcal{G}\sqrt{t^-}$ et par suite $u = \sqrt{t^+}$ et $v = \sqrt{t^-}$ . $\square$

**EXEMPLE 4** Si $t \in \mathcal{B}$ est normal, on a

$$|t| = \sqrt{t^* t} \in \mathcal{A}(t) \ .$$

En effet

$$|\mathrm{id}| = \sqrt{\overline{\mathrm{id}} \cdot \mathrm{id}} \ . \quad \square$$

**EXEMPLE 5** On a évidemment

$$e^t = \left(\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{\mathrm{id}^k}{k!}\right)(t) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{t^k}{k!} \ .$$

**EXEMPLE 6** Si $\Omega$ est une partie simplement connexe de $\mathbb{C}^*$ et $\operatorname{Sp} t \subset \Omega$ , on peut définir une branche du logarithme $\ln : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ . On a donc $\ln t \in \mathcal{A}(t)$ et

$$e^{\ln t} = t \ .$$

En posant

$$t^\alpha := e^{\alpha \cdot \ln t} \ ,$$

on a les formules

$$t^\alpha t^\beta = t^{\alpha+\beta} \quad , \quad (t^\alpha)^\beta = t^{\alpha\cdot\beta}$$

pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ .

C'est immédiat. $\square$

**PROPOSITION** *Soient $t \in \mathcal{A}$ , $\mathcal{G}_t : \mathcal{A}(t) \longrightarrow \mathcal{C}(\operatorname{Sp} t)$ et $\mathcal{G} : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{C}(\operatorname{Sp} \mathcal{A})$ les isomorphismes de Gelfand-Neumark associés.*

*(i) Soient $\mathcal{C}$ une algèbre stellaire unifère et $\Theta : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{C}$ un morphisme d'algèbre stellaire unifère. Alors $\Theta t$ est normal dans $\mathcal{C}$ , $\operatorname{Sp}_{\mathcal{C}} \Theta t \subset \operatorname{Sp}_{\mathcal{B}} t$ et si $f \in \mathcal{C}(\operatorname{Sp}_{\mathcal{B}} t)$ , on a*

$$\Theta(f(t)) = f_{|\operatorname{Sp}_{\mathcal{C}} \Theta t}(\Theta t) \ .$$

*(ii) Pour tout $f \in \mathcal{C}(\operatorname{Sp} t)$ , on a*

$$\mathcal{G}(f(t)) = f \circ \mathcal{G}t \ .$$

*(iii) Si $f \in \mathcal{C}(\operatorname{Sp} t)$ , alors*

$$f(\operatorname{Sp} t) = \operatorname{Sp} f(t)$$

*et, pour tout $g \in \mathcal{C}(\operatorname{Sp} f(t))$ , on a*

$$(g \circ f)(t) = g(f(t)) \ .$$

*(iv) L'application de restriction*

$$r : \operatorname{Sp} \mathcal{A} \longrightarrow \operatorname{Sp} \mathcal{A}(t) : \chi \longmapsto \chi_{|\mathcal{A}(t)}$$

*est surjective et, pour tout $f \in \mathcal{C}(\operatorname{Sp} t)$ , on a*

$$\mathcal{G}(f(t)) = f \circ \mathcal{G}_t t \circ r \ ,$$

*i.e.*

$$\Phi(f \circ \mathcal{G}_t t \circ r) = f(t) \ .$$

**Démonstration de (i)** Puisque $t \in \mathcal{A}$ et que $\mathcal{A}$ est commutuative, $t$ est normal. On a alors

$$(\Theta t)^* \Theta t = \Theta(t^* t) = \Theta(t t^*) = \theta t (\Theta t)^* \ ,$$

ce qui montre que $\Theta t$ est normal. L'inclusion des spectre a été démontrée dans le théorème 6.7. Puisque

$$\Theta(1(t)) = \Theta e = e = 1_{|\operatorname{Sp}_{\mathcal{C}} \Theta t}(\Theta t) \quad \text{et} \quad \Theta(\mathrm{id}(t)) = \Theta t = \mathrm{id}_{|\operatorname{Sp}_{\mathcal{C}} \Theta t}(\Theta t) \ ,$$

les deux morphismes d'algèbre stellaire

$$f \longmapsto \Theta(f(t)) \quad \text{et} \quad f \longmapsto f_{|\operatorname{Sp}_{\mathcal{C}} \Theta t}(\Theta t)$$

sont donc égaux sur l'algèbre stellaire unifère engendrée par id , qui par Stone-Weierstraß est égale à $\mathcal{C}(\operatorname{Sp}_{\mathcal{B}} t)$ .

**Démonstration de (ii)** Considérons le morphisme d'algèbre stellaire unifère

$$\mathcal{G} : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{C}(\operatorname{Sp}\mathcal{A}) : t \longmapsto \mathcal{G}t \ .$$

Pour tout $f \in \mathcal{C}(\operatorname{Sp} t)$ , il vient $\operatorname{Sp}_{\mathcal{C}(\operatorname{Sp}\mathcal{A})} \mathcal{G}t = \mathcal{G}t(\operatorname{Sp}\mathcal{A}) = \operatorname{Sp} t$ , donc

$$\mathcal{G}(f(t)) = f_{|\operatorname{Sp}_{\mathcal{C}(\operatorname{Sp}\mathcal{A})}\mathcal{G}t}(\mathcal{G}t) = f(\mathcal{G}t) = f \circ \mathcal{G}t$$

par (i) et l'unicité du calcul fonctionnel associé à $\mathcal{G}t \in \mathcal{C}(\operatorname{Sp}\mathcal{A})$ , puisque

$$1 \circ \mathcal{G}t = e \quad \text{et} \quad \operatorname{id} \circ \mathcal{G}t = \mathcal{G}t \ .$$

**Démonstration de (iii)** La première partie découle du lemme. Quant à la seconde on a

$$(1 \circ f)(t) = 1(t) = e \quad \text{et} \quad (\operatorname{id} \circ f)(t) = f(t) \ ,$$

d'où le résultat par l'unicité du calcul fonctionnel associé à $f(t)$ .

**Démonstration de (iv)** Pour tout $a \in \mathcal{A}(t) \subset \mathcal{A}$ , on a

$$\mathcal{G}_t a(r(\chi)) = \langle r(\chi) | a \rangle_{\mathcal{A}(t)^\dagger} = \langle \chi | a \rangle_{\mathcal{A}} = \mathcal{G}a(\chi) \ ,$$

donc $\mathcal{G}_t a \circ r = \mathcal{G}a$ . Mais $\mathcal{G}_t t(\operatorname{Sp}\mathcal{A}(t)) = \operatorname{Sp} t = \mathcal{G}t(\operatorname{Sp}\mathcal{A})$ , donc $r$ est surjective. Considérons le morphisme d'algèbre involutive unifère

$$\Psi : \mathcal{C}(\operatorname{Sp} t) \longrightarrow \mathcal{B} : f \longmapsto \Phi(f \circ \mathcal{G}_t t \circ r) \ .$$

On a

$$\Psi 1 = \Phi 1 = e \quad \text{et} \quad \Psi \operatorname{id} = \Phi(\operatorname{id} \circ \mathcal{G}_t t \circ r) = \Phi(\mathcal{G}t) = t \ ,$$

donc

$$\Phi(f \circ \mathcal{G}_t t \circ r) = f(t) \ ,$$

à nouveau par l'unicité du calcul fonctionnel associé à $t$ . □

## 6.8 Eléments positifs dans une algèbre stellaire

**LEMME** *Soit $t$ un élément auto-adjoint de $\mathcal{B}$ .*

*(i) Si $t \in \mathcal{B}_+$ et $\|t\| \leqslant 1$ , alors $\|e - t\| \leqslant 1$ .*

*(ii) Si $\|e - t\| \leqslant 1$ , alors $t \in \mathcal{B}_+$ .*

*(iii) Pour que $t \in \mathcal{B}_+$ , il faut et il suffit que l'on ait $\big\| \|t\| \cdot e - t \big\| \leqslant \|t\|$ .*

Il suffit de se placer dans $\mathcal{C}(\operatorname{Sp} t)$ où ces assertions sont immédiates (exercice). □

**COROLLAIRE**

*(i) L'ensemble $\mathcal{B}_+$ des éléments positifs de $\mathcal{B}$ est un cône convexe fermé saillant.*

*(ii) Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert. Pour que $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ soit positif dans cette algèbre stellaire unifère, il faut et il suffit que $T$ soit un opérateur auto-adjoint positif borné.*

**Démonstration de (i)** C'est un cône puisque, pour tout $b \in \mathcal{B}$ et $\alpha \in \mathbb{C}$ , on a $\operatorname{Sp}(\alpha \cdot b) = \alpha \cdot \operatorname{Sp} b$ . Pour montrer que $\mathcal{B}_+$ est convexe, il nous suffit, pour tout $s, t \in \mathcal{B}_+ \smallsetminus \{0\}$ , de prouver que $\frac{1}{2} \cdot (s + t) \in \mathcal{B}_+$ . Nous pouvons supposer, en divisant par $\max(\|s\|, \|t\|)$ , que $\|s\|, \|t\| \leqslant 1$ . On a alors $\|s - e\|, \|t - e\| \leqslant 1$ par $(i)$ , donc

$$\left\| \frac{1}{2} \cdot (s + t) - e \right\| = \frac{1}{2} \cdot \|s - e + t - e\| \leqslant \frac{1}{2} \cdot (\|s - e\| + \|t - e\|) \leqslant 1 ,$$

et par suite le résultat par (ii). La partie (iii) du lemme montre que $\mathcal{B}_+$ est fermé. Finalement si $t \in \mathcal{B}_+ \cap (-\mathcal{B}_+)$ , on a $\operatorname{Sp} t = \{0\}$ , donc

$$\|t\| = \rho(t) = 0$$

par la proposition 6.6.

**Démonstration de (ii)** Rappelons que la notion d'opérateur auto-adjoint positif a été définie en 3.17. Puisque $\|T\| \cdot \operatorname{Id} - T$ est auto-adjoint, grâce à la proposition 3.17.i on obtient

$$\| \|T\| \cdot \operatorname{Id} - T\| = \sup_{\xi \in \mathcal{H}, \|\xi\| \leqslant 1} |(\xi \mid \|T\| \cdot \xi - T\xi)| =$$

$$= \sup_{\xi \in \mathcal{H}, \|\xi\| \leqslant 1} [\, \|T\| \cdot (\xi | \xi) - (\xi | T\xi)] \leqslant \|T\| ,$$

puisque $0 \leqslant (\xi | T\xi) \leqslant \|T\| \cdot (\xi | \xi)$ . □

**EXEMPLE** Si $S, T$ sont des opérateurs auto-adjoints positifs bornés qui commutent, alors $ST$ est auto-adjoint positif borné.

C'est immédiat par l'exemple 6.8.1. □

Même en dimension finie ce résultat n'est pas trivial. On le prouve en général après avoir démontré le théorème de diagonalisation des matrices hermitiennes (auto-adjointes). Le résultat est évidemment faux si les matrices ne commutent pas comme le montre l'exemple suivant :

$$S := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad T := \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

sont hermitiennes positives, mais

$$ST = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

n'est même pas hermitienne.

**THEOREME** *Soit $t \in \mathcal{B}$ . Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

*(i)* $t \in \mathcal{B}_+$ .

*(ii) Il existe $r \in \mathcal{A}_+(t)$ tel que $t = r^2$ .*

*(iii) Il existe $b \in \mathcal{B}$ tel que $t = b^*b$ .*

*(iv) Il existe $a \in \mathcal{B}_{aa}$ tel que $t = a^2$ .*

**(iv) $\Rightarrow$ (i)** Utilisant le lemme 6.7.1, on a $\operatorname{Sp} t = (\operatorname{Sp} a)^2 \subset \mathbb{R}_+$ .

**(i) $\Rightarrow$ (ii)** Cela découle de l'exemple 6.7.3 en posant $r := \sqrt{t}$ .

**(ii) $\Rightarrow$ (iii)** C'est trivial.

**(iii) $\Rightarrow$ (iv)** Puisque $t = b^*b$ est auto-adjoint, grâce à l'exemple 6.7.3, on peut écrire $t = a^2 - c^2$ pour certains $a, c \in \mathcal{B}_+$ tels que $ac = ca = 0$ . Il vient alors

$$(bc)^*(bc) = cb^*bc = ca^2c - c^4 = -c^4 \in -\mathcal{B}_+$$

car (iv)$\Rightarrow$(i). En décomposant $bc = u + i \cdot v$ pour certains $u, v \in \mathcal{B}_{aa}$ , on obtient

$$(bc)(bc)^* = (u + i\cdot v)(u - i\cdot v) + (u - i\cdot v)(u + i\cdot v) - (bc)^*(bc) =$$

$$= 2u^2 + 2v^2 - (bc)^*(bc) \in \mathcal{B}_+ \ ,$$

puisque $\mathcal{B}_+$ est un cône convexe par le corollaire. Mais comme

$$\operatorname{Sp}[(bc)(bc)^*] \smallsetminus \{0\} = \operatorname{Sp}[(bc)^*(bc)] \smallsetminus \{0\}$$

par l'exemple 6.3.2, on a aussi $(bc)^*(bc) \in \mathcal{B}_+$ , donc

$$(bc)^*(bc) \in \mathcal{B}_+ \cap (-\mathcal{B}_+) = \{0\}$$

et par suite $c^4 = 0$ . On en déduit que $c = 0$ , en raisonnant dans $\mathcal{A} := \mathcal{A}(c)$ puisque $\mathcal{G}c \geqslant 0$ , et par suite que $t = a^2$ . $\square$

## 6.9 Cas d'un élément normal non-borné

Soit $t \in \mathcal{B}$ un élément normal. Puisque

$$e + t^*t = \left(1 + |\mathrm{id}|^2\right)(t) = \langle \mathrm{id} \rangle (t) \ ,$$

on voit que c'est un élément inversible dans $\mathcal{A}(t)$ , donc dans $\mathcal{B}$ . On pose

$$a := (e + t^*t)^{-1} = \langle t \rangle^{-1} \quad \text{et} \quad b := ta = t \langle t \rangle^{-1} \ .$$

On a

$$t = ba^{-1} \ ,$$

ainsi que

$$a^* = a \quad \text{et} \quad a = a^2 + b^*b \ , \tag{$*$}$$

et l'algèbre stellaire unifère $\mathcal{A}(t)$ est engendrée par $a$ et $b$ .

Les deux premières formules sont évidentes et

$$a^2 + b^*b = aa + at^*ta = a(e + t^*t)a = a \ . \quad \square$$

**DEFINITION** Soient $a, b \in \mathcal{B}$ . On désigne par $\mathcal{A}(a, b)$ la sous-algèbre stellaire unifère engendrée par $a$ et $b$ .

**LEMME** *Pour que $\mathcal{A}(a, b)$ soit commutative, il faut et il suffit que $a$ , $a^*$ , $b$ et $b^*$ commutent entre eux.*

C'est immédiat, puisque $\mathcal{A}(a, b)$ est la fermeture de la sous-algèbre des polynômes non-commutatifs en $a$ , $a^*$ , $b$ et $b^*$ . $\square$

**REMARQUE** On peut montrer qu'il suffit que $a$ et $b$ soient normaux et que $a$ commute avec $b$ (théorème de Fuglede).

Supposons maintenant que $\mathcal{A}$ est une algèbre stellaire unifère commutative engendrée par deux éléments $a, b$ satisfaisant à $(*)$ . Nous allons montrer comme en 6.8 que $\mathrm{Sp}\,\mathcal{A}$ est homéomorphe à une partie compact de la sphère de Riemann $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ .

Si $\langle \chi | a \rangle \neq 0$ pour tout $\chi \in \mathrm{Sp}\,\mathcal{A}$ , l'élément $a$ est inversible par le théorème de Gelfand 6.4, et en posant $t := ba^{-1} \in \mathcal{A}$ , on a évidemment $b = ta$ et il vient

$$e + t^*t = e + a^{-1}b^*ba^{-1} = a^{-2}\left(a^2 + b^*b\right) = a^{-2}a = a^{-1} \ ,$$

donc $a = (e + t^*t)^{-1}$ . On a évidemment $\mathcal{A} = \mathcal{A}(t)$ . Ceci correspond au cas borné.

S'il existe maintenant un $\chi \in \mathrm{Sp}\,\mathcal{A}$ tel que $\langle \chi | a \rangle = 0$ , alors $(*)$ montre que

$$0 = \langle \chi | a \rangle = \left\langle \chi | a^2 \right\rangle + \langle \chi | b^*b \rangle = |\langle \chi | b \rangle|^2 \ ,$$

donc $\langle \chi | b \rangle = 0$ . Comme en outre $\langle \chi | e \rangle = 1$ , un tel caractère est unique. Ceci correspond au cas non-borné.

Nous verrons plus tard (cf. théorème 7.8) que l'algèbre stellaire associée à un opérateur normal non-borné est de ce type.

Nous avons donc prouvé que $\{\mathcal{G}a = 0\}$ contient au plus un caractère noté $\chi_\infty$ . Posons

$$\theta := \frac{\mathcal{G}b}{\mathcal{G}a} : \{\mathcal{G}a \neq 0\} \longrightarrow \mathbb{C} \ .$$

On a

$$\overline{\mathcal{G}a} = \mathcal{G}a = (\mathcal{G}a)^2 + |\mathcal{G}b|^2$$

par $(*)$ , donc

$$\frac{1}{\mathcal{G}a} = 1 + \left|\frac{\mathcal{G}b}{\mathcal{G}a}\right|^2 = 1 + |\theta|^2 = \langle\theta\rangle \ , \qquad (**)$$

puisque $\mathcal{G}a$ est réelle, puis

$$\mathcal{G}a = \frac{1}{1+|\theta|^2} = \langle\theta\rangle^{-1} \quad \text{et} \quad \mathcal{G}b = \theta\cdot\mathcal{G}a = \frac{\theta}{1+|\theta|^2} = \theta\cdot\langle\theta\rangle^{-1} \qquad (***)$$

sur $\{\mathcal{G}a \neq 0\}$ .

L'application $\theta$ est évidemment continue et elle se prolonge par continuité à $\operatorname{Sp}\mathcal{A}$ et à valeurs dans $\overline{\mathbb{C}}$ en posant $\theta(\chi_\infty) = \infty$ . En effet la formule $(**)$ montre que $\theta$ tend vers $\infty$ , lorsque $\chi$ tend vers $\chi_\infty$ , puisque $\mathcal{G}a$ tend vers $0$ .

L'application $\theta$ est injective, car pour tous $\chi_1, \chi_2 \in \operatorname{Sp}\mathcal{A}$ tels que $\theta(\chi_1) = \theta(\chi_2)$ , les formules $(***)$ montrent que les caractères $\chi_1$ et $\chi_2$ coïncident sur $a$ et $b$ , donc sont égaux. Puisque $\operatorname{Sp}\mathcal{A}$ est compact, $\theta$ est un homéomorphisme de $\operatorname{Sp}\mathcal{A}$ sur son image $\Lambda := \theta(\operatorname{Sp}\mathcal{A})$ dans $\overline{\mathbb{C}}$ . Utilisant le théorème de Gelfand-Neumark, nous avons donc prouvé la première partie du

**THEOREME** *Soient $a, b \in \mathcal{B}$ satisfaisant à $(*)$ et tels $a$ , $b$ et $b^*$ commutent entre eux. On considère l'algèbre stellaire unifère commutative $\mathcal{A}(a,b)$ engendrée par $a$ et $b$ et l'isomorphisme de Gelfand-Neumark $\mathcal{G} : \mathcal{A}(a,b) \longrightarrow \mathcal{C}(\operatorname{Sp}\mathcal{A}(a,b))$ associé.*

*La fonction $\frac{\mathcal{G}b}{\mathcal{G}a}$ définie sur $\{\mathcal{G}a \neq 0\}$ se prolonge en un homéomorphisme $\theta$ de $\operatorname{Sp}\mathcal{A}(a,b)$ sur une partie compacte $\Lambda$ de $\overline{\mathbb{C}}$ et*

$$c \longmapsto \mathcal{G}c \circ \overset{-1}{\theta} : \mathcal{A}(a,b) \longrightarrow \mathcal{C}(\Lambda)$$

*est un isomorphisme d'algèbres stellaires.*

*L'isomorphisme réciproque*

$$\mathcal{C}(\Lambda) \longrightarrow \mathcal{A}(a,b) \hookrightarrow \mathcal{B} : f \longmapsto \overset{-1}{\mathcal{G}}(f\circ\theta)$$

*est l'unique morphisme d'algèbre involutive unifère $\Psi : \mathcal{C}(\Lambda) \longrightarrow \mathcal{B}$ tel que*

$$\Psi\langle\mathrm{id}\rangle^{-1} = \Psi\frac{1}{1+|\mathrm{id}|^2} = a \quad \text{et} \quad \Psi\left(\mathrm{id}\cdot\langle\mathrm{id}\rangle^{-1}\right) = \Psi\frac{\mathrm{id}}{1+|\mathrm{id}|^2} = b \ .$$

*Cette application est une isométrie et son image est $\mathcal{A}(a,b)$ .*

L'isomorphisme réciproque satisfait à la condition puisque les images de $a$ et $b$ dans $\mathcal{C}(\Lambda)$ sont respectivement

$$\mathcal{G}a\circ\theta^{-1} = \frac{1}{1+|\mathrm{id}|^2} \quad \text{et} \quad \mathcal{G}b\circ\theta^{-1} = \frac{\mathrm{id}}{1+|\mathrm{id}|^2}$$

par les formules $(***)$ . Finalement $\Psi$ est univoquement déterminé sur la sous-algèbre unifère involutive de $\mathcal{C}(\Lambda)$ engendrée par $\frac{1}{1+|\mathrm{id}|^2}$ et $\frac{\mathrm{id}}{1+|\mathrm{id}|^2}$ . Comme ces fonctions séparent les points de

$\Lambda$ , cette sous-algèbre est dense par le théorème de Stone-Weierstraß ; puisque $\Psi$ est continu par le théorème 6.7, $\Psi$ est aussi univoquement déterminé sur $\mathcal{C}(\Lambda)$ . $\square$