Chapitre 2

ESPACES LOCALEMENT CONVEXES

Version du 27 juin 2004

2.1 Semi-normes

DEFINITION 1 On dit qu'une fonction $p : F \longrightarrow \widetilde{\mathbb{R}}$ est une *fonctionnelle* et qu'elle est *sous-linéaire* si elle possède les deux propriétés suivantes :

(a) *positivement homogène*

$$p(\alpha \cdot \varphi) = \alpha \cdot p(\varphi) \quad \text{pour tout } \alpha \in \mathbb{R}_+ \text{ et } \varphi \in F \ ,$$

(b) *sous-additive*

$$p(\varphi + \psi) \leqslant p(\varphi) + p(\psi) \quad \text{pour tout } \varphi, \psi \in F \ .$$

Nous désignerons par $\mathcal{SL}(F)$ l'ensemble de toutes les fonctionnelles sous-linéaires sur F .

On dit que p est une *forme sous-linéaire* si c'est une fonctionnelles sous-linéaires sur F à valeurs dans $\mathbb{R}$ et que c'est une *semi-norme* si elle prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_+$ et si elle est

(c) *absolument homogène*

$$p(\alpha \cdot \varphi) = |\alpha| \cdot p(\varphi) \quad \text{pour tout } \alpha \in \mathbb{K} \text{ et } \varphi \in F \ ,$$

On dit que c'est un *norme* si en plus elle est

(d) *séparante*

$$p(\varphi) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \varphi = 0 \quad \text{pour tout } \varphi \in F \ .$$

Nous dirons qu'un espace vectoriel F muni d'une semi-norme p est un *espace semi-normé* . S'il faut préciser nous écrirons (F, p) . Rappelons que l'on dit *espace normé* s'il est muni d'une norme.

EXEMPLE 1 Pour toute forme linéaire $\mu : F \longrightarrow \mathbb{K}$, la fonction $\varphi \longmapsto |\mu(\varphi)|$ est une semi-norme sur F . Par exemple si X est un ensemble et $x \in X$, alors la forme linéaire d' *évaluation* en x

$$\varepsilon_x : \mathbb{K}^X \longrightarrow \mathbb{K} : \varphi \longmapsto \varphi(x)$$

définit une semi-norme sur $\mathbb{K}^X$

$$\mathbb{K}^X \longrightarrow \mathbb{R}_+ : \varphi \longmapsto |\varphi(x)| \ .$$

Si X est un espace topologique séparé et μ une intégrale de Radon sur X , alors

$$\mathbf{L}^1(\mu) \longrightarrow \mathbb{R}_+ : \varphi \longmapsto \left| \int \varphi \, d\mu \right|$$

est une semi-norme sur $\mathbf{L}^1(\mu)$, qui n'est pas une norme puisqu'il existe en général des fonctions μ-intégrables telles que $\int \varphi \, d\mu = 0$. Il ne faut pas confondre cette semi-norme avec la norme

$$\|\cdot\|_1 := \int |\cdot| \, d\mu \ .$$

EXEMPLE 2 Soit P un ensemble fini de formes sous-linéaires ou de semi-normes sur F et $(\alpha_p)_{p\in P} \subset \mathbb{R}_+$. Alors

$$\max P : \varphi \longmapsto \max_{p\in P} p(\varphi) \quad \text{et} \quad \sum_{p\in P} \alpha_p \cdot p : \varphi \longmapsto \sum_{p\in P} \alpha_p \cdot p(\varphi)$$

sont des formes sous-linéaires ou respectivement des semi-normes sur F .

EXEMPLE 3 Si P est une famille de fonctionnelles sous-linéaires sur F , alors

$$\sup P : \varphi \longmapsto \sup_{p\in P} p(\varphi)$$

est une fonctionnelle sous-linéaire. Ceci est également vrai pour les formes sous-linéaires ou les semi-normes, pour autant que $\sup P$ soit finie !

EXEMPLE 4 Soient (F,p) , (G,q) des espaces semi-normés et $s \in [1,\infty[$. Alors

$$p \times_s q : (\varphi,\gamma) \longmapsto (p(\varphi)^s + q(\gamma)^s)^{\frac{1}{s}} \quad \text{et} \quad p \times_\infty q : (\varphi,\gamma) \longmapsto \max(p(\varphi), q(\gamma))$$

sont des semi-normes sur $F \times G$.

La fonction

$$p + q : \varphi \longmapsto p_{|F\cap G}(\varphi) + q_{|F\cap G}(\varphi)$$

est une semi-norme sur $F \cap G$.

EXEMPLE 5 Soit X un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Pour tout $\varphi \in \mathcal{C}^{(\infty)}(X)$, toute partie compacte $K \subset X$, tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$ et tout $k \in \mathbb{N}$, on pose

$$p_{K,k}(\varphi) := \max_{\alpha\in\mathbb{N}^n, |\alpha|_1 \leqslant k} \|\partial^\alpha \varphi\|_{\infty,K}$$

et

$$q_{K,\alpha}(\varphi) := \|\partial^\alpha \varphi\|_{\infty,K} \ .$$

On vérifie immédiatement que ce sont des semi-normes sur $\mathcal{C}^{(\infty)}(X)$.

EXEMPLE 6 Pour simplifier l'écriture introduisons la fonction indéfiniment dérivable

$$\langle \mathrm{id} \rangle := 1 + |\mathrm{id}|^2 : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}_+^* : x \longmapsto 1 + |x|^2 \ .$$

Pour tout $\varphi \in \mathcal{C}^{(\infty)}(\mathbb{R}^n)$ et $k \in \mathbb{N}$ posons

$$p_k(\varphi) := \max_{\alpha\in\mathbb{N}^n, |\alpha|_1 \leqslant k} \left\| \langle \mathrm{id} \rangle^k \cdot \partial^\alpha \varphi \right\|_\infty \in \overline{\mathbb{R}}_+$$

et

$$q_k(\varphi) := \max_{\alpha\in\mathbb{N}^n, |\alpha|_1 \leqslant k} \left\| \langle \mathrm{id} \rangle^k \cdot \partial^\alpha \varphi \right\|_2 \in \overline{\mathbb{R}}_+ \ .$$

On vérifie immédiatement que ces fonctionnelles sont absolument homogènes et sous-additives. Il est alors clair que

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) := \left\{ \varphi \in \mathcal{C}^{(\infty)}(\mathbb{R}^n) \;\middle|\; p_k(\varphi) < \infty \text{ pour tout } k \in \mathbb{N} \right\}$$

et

$$\mathcal{S}^2(\mathbb{R}^n) := \left\{ \varphi \in \mathcal{C}^{(\infty)}(\mathbb{R}^n) \;\middle|\; q_k(\varphi) < \infty \text{ pour tout } k \in \mathbb{N} \right\}$$

sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{C}^{(\infty)}(\mathbb{R}^n)$ et que les restrictions correspondantes de p_k et q_k sont des normes.

L'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ étant très important dans les applications, on dit qu'une fonction $f \in \mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}^n)$ est *à décroissance rapide* si, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$\left\| \langle \mathrm{id} \rangle^k \cdot f \right\|_\infty < \infty \ .$$

On désigne par $\mathbf{L}^\infty_{\mathrm{rap}}(\mathbb{R}^n)$ l'ensemble de ces fonctions.

On dit qu'une fonction $f \in \mathcal{C}^{(\infty)}(\mathbb{R}^n)$ est *déclinante* si toutes ses dérivées sont à décroissance rapide, i.e. si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Nous montrerons en 2.3 que $\mathcal{S}^2(\mathbb{R}^n) = \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$! Nous dirons que c'est l' *espace de Schwartz* .

LEMME *Pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$, on a*

$$\langle x + y \rangle \leqslant \langle x \rangle \cdot (1 + |y|)^2 \leqslant 2 \cdot \langle x \rangle \cdot \langle y \rangle$$

et

$$\langle x \rangle \leqslant 2 \cdot \langle x + y \rangle \cdot \langle y \rangle \ .$$

En effet comme $1, |x| \leqslant 1 + |x|^2$, il vient

$$\langle x + y \rangle = 1 + |x + y|^2 \leqslant 1 + |x|^2 + 2\,|x| \cdot |y| + |y|^2 \leqslant$$

$$\leqslant 1 + |x|^2 + 2\left(1 + |x|^2\right) \cdot |y| + \left(1 + |x|^2\right) \cdot |y|^2 =$$

$$= \left(1 + |x|^2\right) \cdot \left(1 + 2\,|y| + |y|^2\right) = \langle x \rangle \cdot (1 + |y|)^2 \ .$$

D'autre part il est clair que $(1 + |y|)^2 \leqslant 2\left(1 + |y|^2\right) = 2\,\langle y \rangle$. Finalement

$$\langle x \rangle = \langle x + y - y \rangle \leqslant 2 \cdot \langle x + y \rangle \cdot \langle -y \rangle = 2 \cdot \langle x + y \rangle \cdot \langle y \rangle \ . \quad \square$$

On dit que $2 \cdot \langle \mathrm{id} \rangle$ est un *poids sous-multiplicatif* .

PROPOSITION *Soit $p : F \longrightarrow \widetilde{\mathbb{R}}$.*

(i) *Si p est une fonctionnelle sous-linéaire, on a*

$$p(\varphi) \geqslant -p(-\varphi) \quad \textit{pour tout } \varphi \in F \ .$$

(ii) *Si p est une forme sous-linéaire, on a*

$$|p(\psi) - p(\varphi)| \leqslant \max\left[p(\psi - \varphi), p(\varphi - \psi)\right] \quad \textit{pour tout } \varphi, \psi \in F \ .$$

(iii) *Si p est une semi-norme p , on a*

$$|p(\varphi) - p(\psi)| \leqslant p(\varphi - \psi) \quad \textit{pour tout } \varphi, \psi \in F \ .$$

En effet on a

$$0 = 0 \cdot p(0) = p(0) = p(\varphi - \varphi) \leqslant p(\varphi) + p(-\varphi) \ ,$$

donc (i). Si p est sous-linéaire, remarquons tout d'abord que

$$p(\psi) = p(\psi - \varphi + \varphi) \leqslant p(\psi - \varphi) + p(\varphi) \ ,$$

donc que

$$p(\psi) - p(\varphi) \leqslant p(\psi - \varphi) \ .$$

On en déduit alors que

$$|p(\psi) - p(\varphi)| = \max[p(\psi) - p(\varphi), p(\varphi) - p(\psi)] \leqslant \max[p(\psi - \varphi), p(\varphi - \psi)] \ ,$$

ce qui finit de prouver (ii). La dernière assertion est alors immédiate. □

DEFINITION 2 Si $(q_j)_{j\in J} \subset \mathcal{SL}(F)$, on pose

$$\bigwedge_{j\in J} q_j(\varphi) := \inf_{(\varphi_j)_{j\in J}\in F^{(J)},\sum_{j\in J}\varphi_j=\varphi} \sum_{j\in J} q_j(\varphi_j) \in \overline{\mathbb{R}} \quad \text{pour tout } \varphi \in F \ .$$

Si X est un ensemble, A une partie de X et $f : A \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$, on désigne par f^∞ la fonction sur X obtenue en prolongeant f par ∞ hors de A . On écrit $q_1 \wedge q_2$ à la place de $\bigwedge_{j\in\{1,2\}} q_j$.

THEOREME *Soient $p \in \mathcal{SL}(F)$ et $(q_j)_{j\in J} \subset \mathcal{SL}(F)$.*

(i) On a $p \leqslant q_j$ pour tout $j \in J$ si, et seulement si, $p \leqslant \bigwedge_{j\in J} q_j$.

(ii) Si $\bigwedge_{j\in J} q_j > -\infty$ sur F , alors $\bigwedge_{j\in J} q_j \in \mathcal{SL}(F)$. Si tous les q_j sont absolument homogènes, il en est de même de $\bigwedge_{j\in J} q_j$.

(iii) Soient C un sous-cône convexe de F et $r : C \longrightarrow \widetilde{\mathbb{R}}$ une fonctionnelle positivement homogène et sous-additive. Alors la fonctionnelle $r^\infty : F \longrightarrow \widetilde{\mathbb{R}}$ appartient à $\mathcal{SL}(F)$.

Démonstration de (i) Cette assertion est importante, puisqu'elle ramène un problème à plusieurs inégalités (même une infinité !) à un problème à une seule inégalité. Etant donné $\varphi \in F$ et $(\varphi_j)_{j\in J} \in F^{(J)}$ tels que $\sum_{j\in J}\varphi_j = \varphi$, si pour tout $j \in J$, on a $p \leqslant q_j$, alors

$$p(\varphi) = p\left(\sum_{j\in J}\varphi_j\right) \leqslant \sum_{j\in J} p(\varphi_j) \leqslant \sum_{j\in J} q_j(\varphi_j) \ ,$$

donc $p(\varphi) \leqslant \bigwedge_{j\in J} q_j(\varphi)$ en passant à l'infimum. Réciproquement étant donné $k \in J$, on a

$$p(\varphi) \leqslant \bigwedge_{j\in J} q_j(\varphi) \leqslant q_k(\varphi)$$

en considérant la famille $(\varphi_j)_{j\in J}$ définie par

$$\varphi_j := \begin{cases} \varphi & \text{si } j = k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \ .$$

Démonstration de (ii) Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ et $\varphi \in F$, on a tout d'abord

$$\bigwedge_{j\in J} q_j(\alpha\cdot\varphi) = \inf_{(\varphi_j)_{j\in J}\in F^{(J)},\sum_{j\in J}\varphi_j=\alpha\cdot\varphi} \sum_{j\in J} q_j(\varphi_j) =$$

$$= \alpha \cdot \inf_{\left(\varphi_j\right)_{j\in J} \in F^{(J)}, \sum_{j\in J} \frac{\varphi_j}{\alpha} = \varphi} \sum_{j\in J} q_j \left(\frac{\varphi_j}{\alpha}\right) = \alpha \cdot \bigwedge_{j\in J} q_j\left(\varphi\right) \ .$$

On en déduit que

$$-\infty < \bigwedge_{j\in J} q_j\left(0\right) = \bigwedge_{j\in J} q_j\left(2\cdot 0\right) = 2 \cdot \bigwedge_{j\in J} q_j\left(0\right) \leqslant 0 \ ,$$

donc $\bigwedge_{j\in J} q_j\left(0\right) = 0$. Si en plus chaque q_j est absolument homogène, il est clair que $\bigwedge_{j\in J} q_j$ l'est aussi. Finalement, pour tout $\varphi, \psi \in F$ et $\left(\varphi_j\right)_{j\in J}, \left(\psi_j\right)_{j\in J} \subset F^{(J)}$ tels que $\sum_{j\in J} \varphi_j = \varphi$ et $\sum_{j\in J} \psi_j = \psi$, il vient $\sum_{j\in J} \left(\varphi_j + \psi_j\right) = \varphi + \psi$, donc

$$\bigwedge_{j\in J} q_j\left(\varphi + \psi\right) \leqslant \sum_{j\in J} q_j\left(\varphi_j + \psi_j\right) \leqslant \sum_{j\in J} q_j\left(\varphi_j\right) + \sum_{j\in J} q_j\left(\psi_j\right)$$

et par suite

$$\bigwedge_{j\in J} q_j\left(\varphi + \psi\right) \leqslant \bigwedge_{j\in J} q_j\left(\varphi\right) + \bigwedge_{j\in J} q_j\left(\psi\right) \ ,$$

ce qui montre que $\bigwedge_{j\in J} q_j$ est sous-additive.

Démonstration de (iii) C'est immédiat. □

EXEMPLE 7 Soient F et G des sous-espaces vectoriels de H , p et q des semi-normes respectivement sur F et G . Alors $p^\infty \wedge q^\infty$ est une semi-norme sur $F+G$. Remarquons que, pour tout $\theta \in F+G$, on a

$$p^\infty \wedge q^\infty\left(\theta\right) = \inf\left\{p\left(\varphi\right) + q\left(\psi\right) \mid \varphi \in F \ , \ \psi \in G \text{ et } \varphi + \psi = \theta\right\} \ .$$

C'est immédiat, puisque $p^\infty \wedge q^\infty \geqslant 0$.

2.2 Espaces polynormés

DEFINITION 1 Soit p est une semi-norme sur F . Si $\varphi \in F$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$, on pose

$$B_p(\varphi, r) := \{\psi \in F \mid p(\psi - \varphi) \leqslant r\}$$

et

$$D_p(\varphi, r) := \{\psi \in F \mid p(\psi - \varphi) < r\} \ .$$

Soit $\mathcal{P}$ un ensemble de semi-normes sur F . Pour toute partie **finie** $P \subset \mathcal{P}$ et $r_P := (r_p)_{p \in P} \subset \mathbb{R}_+^*$, on dit que

$$B_P(\varphi, r_P) := \bigcap_{p \in P} B_p(\varphi, r_p) \quad \text{et} \quad D_P(\varphi, r_P) := \bigcap_{p \in P} D_p(\varphi, r_p)$$

sont respectivement une *boule fermée* et une *boule ouverte de centre* φ (par rapport à $\mathcal{P}$).

On dit qu'une partie $O \subset F$ est *ouverte* (par rapport à $\mathcal{P}$) si, pour tout $\varphi \in O$, il existe une boule fermée B de centre φ contenue dans O .

On peut remplacer "boule fermée" par "boule ouverte". Il suffit de remarquer que l'on a

$$B_P\left(\varphi, \frac{r_P}{2}\right) \subset D_p(\varphi, r_P) \subset B_p(\varphi, r_P) \ .$$

PROPOSITION *L'ensemble $\mathfrak{T}_{\mathcal{P}}$ des parties de F ouvertes par rapport à $\mathcal{P}$ est une topologie sur F .*

C'est facile (cf. cours d'Analyse [17], proposition 10.12). □

DEFINITION 2 On dit que $(F, \mathcal{P})$ est un *espace polynormé* et que $\mathfrak{T}_{\mathcal{P}}$ est la *topologie associée* , ou bien la *topologie définie* par $\mathcal{P}$.

Nous utiliserons les notions topologiques (cf. appendice 1). Elles sont calquées sur celles qui ont été développées dans le cours d'Analyse [17], chapitre 10, dans le cadre des espaces métriques.

REMARQUE 1 En écrivant $\psi = \varphi + (\psi - \varphi)$, on voit que

$$B_P(\varphi, r_P) = \varphi + B_P(0, r_P) = \varphi + \bigcap_{p \in P} \overset{-1}{p}([-r_p, r_p])$$

et

$$D_P(\varphi, r_P) = \varphi + D_P(0, r_P) = \varphi + \bigcap_{p \in P} \overset{-1}{p}(]-r_p, r_p[) \ .$$

Ceci montre en particulier qu'une translation

$$\diamond - \varphi : F \longrightarrow F : \psi \longmapsto \psi - \varphi$$

est continue, puisque pour tout ouvert O de F , on a $(\diamond - \varphi)^{-1}(O) = \varphi + O$ et cet ensemble est ouvert.

REMARQUE 2 En posant $q := \max_{p \in P} \dfrac{p}{r_p}$, on a

$$B_P(\varphi, r_P) = B_q(\varphi, 1) \ .$$

En effet les inégalités

$$p(\psi - \varphi) \leqslant r_p \quad \text{pour tout } p \in P$$

sont équivalentes à

$$\max_{p \in P} \frac{p}{r_p}(\psi - \varphi) \leqslant 1 \ .$$

REMARQUE 3 Si q est une semi-norme sur F , alors

$$F = \bigcup_{r \in \mathbb{R}_+^*} B_q(0, r) = \bigcup_{r \in \mathbb{R}_+^*} D_q(0, r) \ .$$

REMARQUE 4 Si q est une semi-norme sur F , alors $\{q = 0\}$ est un sous-espace vectoriel, qui peut être de dimension infinie ! On a

$$\{q = 0\} = \bigcap_{r \in \mathbb{R}_+^*} B_q(\varphi, r) = \bigcap_{r \in \mathbb{R}_+^*} D_q(\varphi, r) \ .$$

Si q est une semi-norme continue sur F , alors $\{q = 0\} = q^{-1}(\{0\})$ est un sous-espace vectoriel fermé de F , puisque $\{0\}$ est fermé dans $\mathbb{R}_+$.

REMARQUE 5 Remarquons qu'une partie V de F est un voisinage de $\varphi \in F$, i.e. que φ est un point intérieur à V si, et seulement si, il existe une boule de centre φ contenue dans V .

EXEMPLE Tout espace normé est évidemment un espace polynormé. Voici une liste des espaces normés, les quatre premiers sont des espaces de Banach, que nous supposons connus.

(a) $\left(\mathbb{K}^n, |\cdot|_p\right)$.

(b) Exercice : Soient X un ensemble et $p \in [1, \infty]$:

$$\ell^p(X) := \mathbf{L}^p(\#) = \left\{ f \in \mathbb{K}^X \;\middle|\; \|f\|_p^p := \sum_{x \in X} |f(x)|^p < \infty \right\}$$

muni de la norme

$$f \longmapsto \|f\|_p := \|f\|_{p,\#} = \left(\sum_{x \in X} |f(x)|^p \right)^{\frac{1}{p}} ,$$

où # désigne l'intégrale de comptage sur X muni de la métrique discrète. C'est donc un cas particulier de l'exemple (d).

(c) Soit X un espace topologique séparé : $\mathcal{C}^0(X) \subset \mathcal{C}^b(X) \subset \ell^\infty(X)$ munis de la norme uniforme $\|\cdot\|_\infty$ (cf. cours d'Analyse [17], § 10.5 et 10.19).

(d) Soient X un espace topologique séparé, μ une intégrale de Radon sur X et $p \in [1, \infty]$: $\left(\mathbf{L}^p(\mu), \|\cdot\|_p\right)$ (cf. cours d'Analyse [17], § 15.13 et 15.14).

(e) Soient F, G des espaces normés :

$$\left(F \times G, \|\mathrm{pr}_1\|_F + \|\mathrm{pr}_2\|_G\right) \ , \left(F \times G, \max\left(\|\mathrm{pr}_1\|_F , \|\mathrm{pr}_2\|_G\right)\right) \ .$$

(f) Exercice : Soient F un espace normé et H sous-espace vectoriel fermé de F : F/H (cf. proposition 2.8).

LEMME *Soient p une semi-norme et q une fonctionnelle sous-linéaire sur F . Pour que q soit majorée par $M \in \mathbb{R}_+$ sur $B_p(0,1)$, il faut et il suffit que*

$$q \leqslant M \cdot p \ .$$

Dans ce cas, la plus petite des constantes $M \in \mathbb{R}_+$ satisfaisant à cette inégalité est

$$\sup_{\varphi \in F, p(\varphi) \leqslant 1} q(\varphi) \ .$$

La condition est nécessaire, car pour tout $\varphi \in F$ tel que $p(\varphi) > 0$, on a $p\left(\frac{\varphi}{p(\varphi)}\right) = 1$, donc

$$\frac{1}{p(\varphi)} \cdot q(\varphi) = q\left(\frac{\varphi}{p(\varphi)}\right) \leqslant M \ ,$$

ce qui prouve l'inégalité dans ce cas. Si $p(\varphi) = 0$, on a $p(\alpha \cdot \varphi) = \alpha \cdot p(\varphi) = 0$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_+$, donc $\alpha \cdot q(\varphi) = q(\alpha \cdot \varphi) \leqslant M \in \mathbb{R}_+$, ce qui montre que $q(\varphi) \leqslant 0$ et prouve aussi l'inégalité dans ce cas.

La réciproque et la dernière assertion sont triviales. □

COROLLAIRE *Soient $(F, \mathcal{P})$ un espace polynormé et q une forme sous-linéaire sur F . Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) *q est continue.*

(ii) *q est continue en 0 .*

(iii) *Il existe une boule de centre 0 sur laquelle q est majorée.*

(iv) *Il existe $c \in \mathbb{R}_+$ et un ensemble fini $P \subset \mathcal{P}$ de semi-normes tels que*

$$q \leqslant c \cdot \max P \ .$$

(i) ⇒ (ii) C'est évident.

(ii) ⇒ (iii) Si q est continue en 0 , il existe une partie ouverte O contenant 0 telle que $q(O) \subset \left]-1, 1\right[$. Par définition d'une partie ouverte, on a bien (iii).

(iii) ⇒ (iv) Si q est majorée par $M \in \mathbb{R}_+$ sur $B_P(0, r_P)$, en posant $r := \min_{p \in P} r_p$ et $c := \frac{M}{r}$, alors q est majorée par c sur $B_{\max P}(0,1)$. En effet pour tout $\varphi \in B_{\max P}(0,1)$, il vient $p(r \cdot \varphi) \leqslant r \leqslant r_p$, donc

$$r \cdot \varphi \in B_P(0, r_P) \ ,$$

et par suite $r \cdot q(\varphi) \leqslant M$. L'inégalité découle donc de la proposition.

(iv) $\Rightarrow$ (i) Montrons que q est continue en $\varphi \in F$. Pour tout $\psi \in F$, la proposition 2.1.(ii) et l'hypothèse montre que

$$|q(\psi) - q(\varphi)| \leqslant \max [q(\psi - \varphi), q(\varphi - \psi)] \leqslant c \cdot \max P(\psi - \varphi) \ .$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, si $\psi \in B_P\left(\varphi, \frac{\varepsilon}{c}\right)$, on a $\max P(\psi - \varphi) \leqslant \frac{\varepsilon}{c}$, donc

$$|q(\psi) - q(\varphi)| \leqslant \varepsilon \ ,$$

ce qu'il fallait démontrer. $\square$

REMARQUE 6 Les semi-normes $p \in \mathcal{P}$ sont évidemment continues. Par les remarques 1 et 2, toute boule par rapport à $\mathcal{P}$ est de la forme

$$B_q(\varphi, 1) = \varphi + B_q(0,1) = [q \circ (\diamond - \varphi)]^{-1}([0,1]) \ ,$$

respectivement

$$D_q(\varphi, 1) = \varphi + D_q(0,1) = [q \circ (\diamond - \varphi)]^{-1}([0,1]) \ ,$$

où q est une semi-norme continue par le corollaire (iv).

En particulier les boules fermées et ouvertes par rapport à $\mathcal{P}$ sont fermées respectivement ouvertes pour $\mathfrak{T}_{\mathcal{P}}$.

EXERCICE On a

$$B_P(\varphi, r_P)^{\circ} = D_P(\varphi, r_P) \ .$$

Si T est une application (semi-) linéaire et q une semi-norme ou une fonctionnelle sous-linéaire sur G , alors il en est de même de $q \circ T$.

THEOREME *Soient $(G, \mathcal{Q})$ un espace polynormé et $T : F \longrightarrow G$ une application (semi-) linéaire. Pour que T soit continue, il faut et il suffit que $q \circ T$ soit continue sur F pour tout $q \in \mathcal{Q}$.*

La condition est évidemment nécessaire, puisque q est continue sur G . Réciproquement la continuité de T en $\varphi \in F$ et celle en 0 sont équivalentes, puisque la translation $\diamond - \varphi$ est continue (cf. remarque 1) :

$$T\psi - T\varphi = T(\psi - \varphi) = T \circ (\diamond - \varphi)(\psi) \ .$$

Si O est un ouvert dans G contenant 0 , il existe une boule ouverte

$$D_Q(0, r_Q) = \bigcap_{q \in Q} q^{-1}(]-r_q, r_q[) \subset O \ .$$

Il vient alors

$$T^{-1}(D_Q(0, r_Q)) = \bigcap_{q \in Q} T^{-1}\left(q^{-1}(]-r_q, r_q[)\right) = \bigcap_{q \in Q} (q \circ T)^{-1}(]-r_q, r_q[) \ ,$$

et le membre de droite est une partie ouverte dans F contenant 0 par hypothèse. Le resultat en découle puisque

$$T\left(T^{-1}(D_Q(0, r_Q))\right) \subset D_Q(0, r_Q) \subset O \ . \quad \square$$

REMARQUE 7 Une semi-norme de la forme $c \cdot \max P$ pour $P \subset \mathcal{P}$ est évidemment continue. Mais on n'a pas nécessairement $c \cdot \max P \in \mathcal{P}$!

DEFINITION 3 Nous dirons qu'un ensemble $\mathcal{P}$ de semi-normes sur F est *saturé* si, pour toute famille finie $P \subset \mathcal{P}$, il existe $p \in \mathcal{P}$ et $c \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\max P \leqslant c \cdot p \ .$$

2.3 Espaces localement convexes et espaces polynormés équivalents

DEFINITION On dit que deux ensembles $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ de semi-normes sur F , ou bien les deux espaces polynormés $(F, \mathcal{P})$ et $(F, \mathcal{Q})$, sont *équivalents* si les topologies associées $\mathfrak{T}_{\mathcal{P}}$ et $\mathfrak{T}_{\mathcal{Q}}$ sont égales.

L'espace topologique $(F, \mathfrak{T}_{\mathcal{P}})$ représente donc la classe des espaces polynormés équivalents à $(F, \mathcal{P})$. On dit que c'est un *espace localement convexe* . On le désigne en général simplement par F et on dit que $\mathfrak{T}_F := \mathfrak{T}_{\mathcal{P}}$ est la topologie de F . C'est en fait cette structure qui nous intéressera par la suite.

On désigne par $\overline{\mathcal{P}}$ l'ensemble de toutes les semi-normes continues pour $\mathfrak{T}_{\mathcal{P}}$.

PROPOSITION *Pour que* $\mathfrak{T}_{\mathcal{Q}} \subset \mathfrak{T}_{\mathcal{P}}$ *, i.e. que* $\mathrm{id} : (F, \mathfrak{T}_{\mathcal{P}}) \longrightarrow (F, \mathfrak{T}_{\mathcal{Q}})$ *soit continue, il faut et il suffit que chaque semi-norme* $q \in \mathcal{Q}$ *soit continue pour* $\mathfrak{T}_{\mathcal{P}}$ *, i.e.* $\mathcal{Q} \subset \overline{\mathcal{P}}$ *.*

Dans ce cas on a $\overline{\mathcal{Q}} \subset \overline{\mathcal{P}}$ *.*

C'est immédiat par le théorème 2.2. □

COROLLAIRE *Pour que* $\mathcal{P}$ *soit équivalent à* $\mathcal{Q}$ *, il faut et il suffit que, l'on ait* $\mathcal{Q} \subset \overline{\mathcal{P}}$ *et* $\mathcal{P} \subset \overline{\mathcal{Q}}$ *, i.e.* $\overline{\mathcal{P}} = \overline{\mathcal{Q}}$ *.*

REMARQUE 1 La topologie d'un espace localement convexe F défini par $\mathcal{P}$ ne dépend donc que de la classe des ensembles de semi-normes équivalents à $\mathcal{P}$. Celle-ci est représentée par $\overline{\mathcal{P}}$. On peut donner des conditions géométriques (convexité) caractérisant les topologies de ce type.

En pratique ceci permet de remplacer l'ensemble de définition $\mathcal{P}$ par un autre mieux adapté au problème considéré.

REMARQUE 2 Dans beaucoup de démonstrations il ne sera pas nécessaire de se référer au système de semi-normes $\mathcal{P}$ définissant l'espace localement convexe F . Seul le fait que la topologie de F soit définie par un ensemble de semi-normes sera utile. On utilisera par exemple les faits élémentaires suivants :

(i) *Une partie* O *de* F *est ouverte si, et seulement si, pour tout* $\varphi \in O$ *, il existe une semi-norme continue* p *sur* F *telle que* $B_p(\varphi, 1) \subset O$ *.*

(ii) *Pour qu'une fonctionnelle sous-linéaire* q *sur* F *soit continue, il faut et il suffit qu'il existe une semi-norme continue* p *sur* F *telle que* $q \leqslant p$ *.*

Si $\mathcal{P}$ est un ensemble saturé de semi-normes définissant la topologie de F , on a des assertions analogues en introduisant des constantes positives.

EXEMPLE 1 Tout espace semi-normé défini un espace localement convexe. La semi-norme définit évidemment un ensemble saturé de semi-normes définissant la topologie de F . Réciproquement nous dirons qu'un espace localement convexe pouvant être défini par une seule (semi-)norme est *(semi-)normable* .

En particulier $\mathbb{K}^n$ muni de l'une quelconque des normes $|\cdot|_p$ définit le même espace localement convexe, puisque ces normes sont équivalentes.

EXEMPLE 2 Si F est un espace localement convexe défini par $\mathcal{P}$ et G est un sous-espace vectoriel de F , alors l'ensemble $\mathcal{P}_{|G}$ des restrictions des semi-normes dans $\mathcal{P}$ à G définit une structure d'espace localement convexe sur G . Elle ne dépend que de celle de F , puisque

$$\overline{\mathcal{P}}_{|G} \subset \overline{\mathcal{P}_{|G}} \subset \overline{\overline{\mathcal{P}}_{|G}}$$

par le corollaire 2.2.iv, donc

$$\overline{\mathcal{P}_{|G}} = \overline{\overline{\mathcal{P}}_{|G}} \ .$$

La topologie de G est la topologie induite par celle de F .

EXEMPLE 3 Soit X un ensemble. On munit $\mathbb{K}^X$ d'une structure d'espace localement convexe en considérant toutes les semi-normes $\varphi \longmapsto |\varphi(x)|$ pour $x \in X$. On dit que c'est la *topologie de la convergence simple* sur X . Plus généralement si G est un espace localement convexe, sur G^X on considère les semi-normes

$$\varphi \longmapsto q \circ \varphi(x) \ ,$$

où q est une semi-norme continue sur G . Cet ensemble n'est pas saturé.

EXEMPLE 4 Soit X un espace topologique. On munit $\mathcal{C}(X)$ d'une structure d'espace localement convexe en considérant toutes les semi-normes $\varphi \longmapsto \|\varphi\|_{\infty,K}$ pour K compact dans X . On dit que c'est la *topologie de la convergence compacte* sur X . Cet ensemble est saturé, puisque pour tout $K, L \in \mathfrak{K}(X)$, on a

$$\max\left(\|\cdot\|_{\infty,K}, \|\cdot\|_{\infty,L}\right) = \|\cdot\|_{\infty,K\cup L} \ .$$

EXEMPLE 5 Soit X un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On munit l'espace $\mathcal{C}^{(\infty)}(X)$ d'une structure d'espace localement convexe en considérant l'ensemble saturé des semi-normes $(p_{K,k})_{k\in\mathbb{N},K\in\mathfrak{K}(X)}$ (cf. exemple 2.1.5). On dit que c'est la *topologie de la convergence compacte de toutes les dérivées* sur X . On le note souvent $\mathcal{E}(X)$. Les ensembles de semi-normes $(p_{K,k})_{k\in\mathbb{N},K\in\mathfrak{K}(X)}$ et $(q_{K,\alpha})_{\alpha\in\mathbb{N}^n,K\in\mathfrak{K}(X)}$ sont évidemment équivalents, mais $(q_{K,\alpha})_{\alpha\in\mathbb{N}^n,K\in\mathfrak{K}(X)}$ n'est pas saturé.

EXEMPLE 6 Les deux sous-espaces vectoriels $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et $\mathcal{S}_2(\mathbb{R}^n)$ (cf. exemple 2.1.6) sont égaux et les ensembles saturés de semi-normes $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(q_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sont équivalentes, donc définissent le même espace localement convexe. On dit que c'est l' *espace de Schwartz* .

(a) Montrons tout d'abord que, pour tout $s > \frac{n}{2}$, on a

$$\left\|\langle \mathrm{id}\rangle^{-s}\right\|_1 < \infty \ .$$

On a

$$\left\|\langle \mathrm{id}\rangle^{-s}\right\|_1 = \int_{\mathbb{R}^n}^{*} \frac{1}{\left(1+|x|^2\right)^s}\,dx = \int_{\mathbb{R}_+^*}^{*}\left(\int_{\mathbb{S}^{n-1}(r)}^{*} \frac{1}{\left(1+|\sigma|^2\right)^s}\,d\sigma\right) dr =$$

$$= \int_{\mathbb{R}_+^*}^{*} \frac{1}{\left(1+r^2\right)^s}\lambda\left(\mathbb{S}^{n-1}(r)\right)\,dr = \lambda\left(\mathbb{S}^{n-1}\right)\cdot\int_{\mathbb{R}_+^*}^{*} \frac{r^{n-1}}{\left(1+r^2\right)^s}\,dr \leqslant$$

$$\leqslant \lambda\left(\mathbb{S}^{n-1}\right)\cdot\left(1+\int_{[1,\infty[}^{*} \frac{1}{r^{2s-n+1}}\,dr\right) < \infty\ .$$

(b) Pour tout $\varphi \in \mathcal{C}^{(\infty)}(\mathbb{R}^n)$, $k \in \mathbb{N}$ et $s > \frac{n}{4}$, on a

$$q_k(\varphi) \leqslant \left\|\langle \mathrm{id}\rangle^{-s}\right\|_2 \cdot p_{k+\lceil s\rceil}(\varphi)\ .$$

En effet, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$ tel que $|\alpha|_1 \leqslant k$, il vient

$$\left\|\langle \mathrm{id}\rangle^{k}\cdot\partial^\alpha\varphi\right\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}^n}^{*} \langle \mathrm{id}\rangle^{2k}\cdot|\partial^\alpha\varphi|^2 = \int_{\mathbb{R}^n}^{*} \langle \mathrm{id}\rangle^{-2s}\cdot\langle \mathrm{id}\rangle^{2k+2s}\cdot|\partial^\alpha\varphi|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \left\|\langle \mathrm{id}\rangle^{2k+2s}\cdot|\partial^\alpha\varphi|^2\right\|_\infty\cdot\left\|\langle \mathrm{id}\rangle^{-s}\right\|_2^2 \leqslant \left\|\langle \mathrm{id}\rangle^{-s}\right\|_2^2\cdot p_{k+\lceil s\rceil}^2(\varphi)\ ,$$

d'où l'inégalité.

(c) Si $f \in \mathcal{C}^{(\infty)}(\mathbb{R}^n)$ et $\partial^\beta\psi \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^n)$ pour tout $\beta \leqslant (1)$, alors

$$f(x) = \int_{x-\mathbb{R}_+^n} \partial^{(1)}f\,d\lambda \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^n\ ,$$

où (1) désigne le multi-indice ayant toutes ses composantes égales à 1 , et

$$\|f\|_\infty \leqslant \left\|\partial^{(1)}f\right\|_1\ .$$

Considérons le cas $n = 2$ pour simplifier et soit $x = (u, v)$. Le théorème de Fubini (cours d'Analyse [17] 16.3) montre que, pour presque tous les s , les fonctions $\partial^{(1)}f(s,\cdot) = \partial_2\partial_1 f(s,\cdot)$ et $\partial_1 f(s,\cdot)$ sont intégrables, donc que $\partial_1 f(s,\cdot)$ s'annule en $-\infty$ par l'exercice qui suit. On a alors

$$\int_{(u,v)-\mathbb{R}_+^2} \partial^{(1)}f\,d\lambda = \int_{-\infty}^{u}\left(\int_{-\infty}^{v} \partial^{(1)}f(s,t)\,dt\right) ds = \int_{-\infty}^{u} \partial_1 f(s,v)\,ds \quad \text{pour tout } u,v\ .$$

Le théorème de Fubini montre à nouveau que, pour presque tous les v , les fonctions $\partial_1 f(\cdot,v)$ et $f(\cdot,v)$ sont intégrables, donc que $f(\cdot,v)$ s'annulent en $-\infty$. Il vient alors

$$\int_{Q_{(u,v)}} \partial^{(1)}f\,d\lambda = f(u,v) \quad \text{pour tout } u \text{ et pour presque tous } v\ .$$

La formule en découle pour tous les v par continuité (cours d'Analyse [17] 15.5). Quant à l'inégalité, on a

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}^n}\left|\int_{x-\mathbb{R}_+^n} \partial^{(1)}f\,d\lambda\right| \leqslant \sup_{x\in\mathbb{R}^n}\int_{x-\mathbb{R}_+^n} \left|\partial^{(1)}f\right|\,d\lambda \leqslant \left\|\partial^{(1)}f\right\|_1\ .$$

(d) Pour tout $\varphi \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R}^n)$, $k \in \mathbb{N}$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ tels que $|\alpha|_1 \leqslant k$ et $\beta \leqslant (1)$, la fonction $\partial^\beta\left[\langle \mathrm{id}\rangle^k\cdot\partial^\alpha\varphi\right]$ est Lebesgue-intégrable et

$$\left\|\partial^\beta\left[\langle \mathrm{id}\rangle^k\cdot\partial^\alpha\varphi\right]\right\|_1 \leqslant C\cdot q_{k+n}(\varphi)$$

pour une certaine constante $C \in \mathbb{R}_+^*$. En particulier

$$p_k(\varphi) \leqslant C \cdot q_{k+n}(\varphi) \ .$$

En effet par la formule de Leibniz on obtient

$$\partial^\beta \left[\langle\mathrm{id}\rangle^k \cdot \partial^\alpha \varphi\right] = \sum_{\gamma,\theta\in\mathbb{N}^n, \gamma+\theta=\beta} \frac{\beta!}{\gamma!\theta!} \cdot \partial^\gamma \left(\langle\mathrm{id}\rangle^k\right) \cdot \partial^{\alpha+\theta}\varphi =$$

$$= \sum_{\gamma,\theta\in\mathbb{N}^n, \gamma+\theta=\beta, |\gamma|_1\leqslant k} \frac{2^{|\gamma|_1} \cdot k!}{(k-|\gamma|_1)!} \cdot \langle\mathrm{id}\rangle^{k-|\gamma|_1} \cdot \mathrm{id}^\gamma \cdot \partial^{\alpha+\theta}\varphi \ ,$$

car $\beta! = \gamma! = \theta! = 1$ et

$$\partial_j \langle\mathrm{id}\rangle^l = 2l \cdot \langle\mathrm{id}\rangle^{l-1} \cdot \mathrm{pr}_j \ .$$

Comme

$$\left|\langle\mathrm{id}\rangle^{k-|\gamma|_1} \cdot \mathrm{id}^\gamma \cdot \partial^{\alpha+\theta}\varphi\right| \leqslant \langle\mathrm{id}\rangle^{k-|\gamma|_1} \cdot \langle\mathrm{id}\rangle^{\frac{|\gamma|_1}{2}} \cdot \left|\partial^{\alpha+\theta}\varphi\right| \leqslant \langle\mathrm{id}\rangle^k \cdot \left|\partial^{\alpha+\theta}\varphi\right|$$

et $|\alpha+\theta|_1 \leqslant k+n$, il vient

$$\left\|\langle\mathrm{id}\rangle^{k-|\gamma|_1} \cdot \mathrm{id}^\gamma \cdot \partial^{\alpha+\theta}\varphi\right\|_1 \leqslant \left\|\langle\mathrm{id}\rangle^{-n} \cdot \langle\mathrm{id}\rangle^{k+n} \cdot \partial^{\alpha+\theta}\varphi\right\|_1 \leqslant \left\|\langle\mathrm{id}\rangle^{-n}\right\|_2 \cdot \left\|\langle\mathrm{id}\rangle^{k+n} \cdot \partial^{\alpha+\theta}\varphi\right\|_2 \leqslant$$

$$\leqslant \left\|\langle\mathrm{id}\rangle^{-n}\right\|_2 \cdot q_{k+n}(\varphi) < \infty \ ,$$

d'où le résultat par le critère d'intégrabilité (cours d'Analyse [17] 15.10) et en posant

$$C := \left\|\langle\mathrm{id}\rangle^{-n}\right\|_2 \cdot \sum_{\gamma,\theta\in\mathbb{N}^n, \gamma+\theta=\beta, |\gamma|_1\leqslant k} \frac{2^{|\gamma|_1} \cdot k!}{(k-|\gamma|_1)!} \ .$$

Finalement par ce qui précède on a

$$\left\|\langle\mathrm{id}\rangle^k \cdot \partial^\alpha\varphi\right\|_\infty \leqslant \left\|\partial^{(1)}\left[\langle\mathrm{id}\rangle^k \cdot \partial^\alpha\varphi\right]\right\|_1 \leqslant C \cdot q_{k+n}(\varphi) \ ,$$

ce qui finit de prouver notre assertion.

(e) Par (b) on obtient immédiatement $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}_2(\mathbb{R}^n)$, tandis que (d) montre que $\mathcal{S}_2(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Ces inégalités montrent également que les suites de semi-normes $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(q_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sont équivalentes. □

EXERCICE Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{K}$ une fonction localement absolument continue telle que $f, \partial f \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R}_+)$ resp. $f, \partial f \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}_+)$. Montrer que l'on a $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+)$.

Il suffit d'utiliser la définition d'une fonction localement absolument continue (cours d'Analyse [17] 15.19) pour la première partie et la formule d'intégration par partie (cours d'Analyse [17] 16.4) pour la seconde.

2.4 Produit de deux espaces localement convexes

Dans tout ce qui suit, et sauf mention expresse du contraire, les lettres F, G, H et $\mathcal{P}, \mathcal{Q}, \mathcal{R}$ désignerons respectivement des espaces localement convexes et des ensembles de semi-normes définissant leur topologie.

Utilisant l'exemple 2.1.4, nous pouvons poser la

DEFINITION 1 On muni $F \times G$ d'une structure d'espace localement convexe en considérant la famille de semi-normes $\mathcal{P} \times_\infty \mathcal{Q} := \{p \times_\infty q \mid p \in \mathcal{P} \ , \ q \in \mathcal{Q}\}$. On dit que c'est le *produit (direct)* de F et G .

Cette structure ne dépend évidemment que des structures d'espace localement convexe de F et G , car on a

$$\mathcal{P} \times_\infty \mathcal{Q} \subset \overline{\mathcal{P}} \times_\infty \overline{\mathcal{Q}} \subset \overline{\mathcal{P} \times_\infty \mathcal{Q}}$$

par le corollaire 2.2.(iv) :

$$\max \left[c \cdot \max P(\varphi), d \cdot \max Q(\gamma)\right] \leqslant \max(c,d) \cdot \max\nolimits_{p \in P, q \in Q} \max \left[p(\varphi), q(\gamma)\right] =$$

$$= \max(c,d) \cdot \max(P \times_\infty Q)(\varphi, \gamma) .$$

On a donc

$$\overline{\mathcal{P} \times_\infty \mathcal{Q}} = \overline{\overline{\mathcal{P}} \times_\infty \overline{\mathcal{Q}}} .$$

Etant donné $s \in [1, \infty[$, les inégalités

$$p \times_s q \leqslant 2^{\frac{1}{s}} \cdot p \times_\infty q \quad \text{et} \quad p \times_\infty q \leqslant p \times_s q$$

montre en outre que $\mathcal{P} \times_s \mathcal{Q}$ engendre le même espace localement convexe.

REMARQUE 1 Les projections canoniques

$$\mathrm{pr}_1 : F \times G \longrightarrow F : (\varphi, \gamma) \longmapsto \varphi \quad \text{et} \quad \mathrm{pr}_2 : F \times G \longrightarrow G : (\varphi, \gamma) \longmapsto \gamma$$

sont des applications linéaires continues.

Pour tout $\gamma \in G$, respectivement $\varphi \in F$, les injections canoniques

$$j_{1,\gamma} : F \longrightarrow F \times G : \varphi \longmapsto (\varphi, \gamma) \quad \text{et} \quad j_{2,\varphi} : G \longrightarrow F \times G : \gamma \longmapsto (\varphi, \gamma)$$

sont des applications affines continues.

C'est immédiat en utilisant le théorème 2.2. $\square$

REMARQUE 2 Pour toutes parties $A \subset F$ et $B \subset G$, on a

$$\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B} .$$

La démonstration est laissée en exercice.

PROPOSITION *Soit* $\mathfrak{s} : F \times G \longrightarrow H$ *une application bilinéaire ou sesquilinéaire. Pour que* $\mathfrak{s}$ *soit continue, il faut et il suffit que, pour toute semi-norme continue* r *sur* H *, ou toute semi-norme* $r \in \mathcal{R}$ *, il existe des semi-normes continues* p *sur* F *et* q *sur* G *, telles que l'on ait*

$$r(\mathfrak{s}(\varphi,\gamma)) \leqslant p(\varphi) \cdot q(\gamma) \quad \text{pour tout } \varphi \in F \text{ et } \gamma \in G\ .$$

La condition est suffisante, car pour tout $\varphi, \varphi_0 \in F$ et $\gamma, \gamma_0 \in G$, on a

$$\mathfrak{s}(\varphi,\gamma) - \mathfrak{s}(\varphi_0,\gamma_0) = \mathfrak{s}(\varphi,\gamma) - \mathfrak{s}(\varphi,\gamma_0) + \mathfrak{s}(\varphi,\gamma_0) - \mathfrak{s}(\varphi_0,\gamma_0) =$$

$$= \mathfrak{s}(\varphi,\gamma-\gamma_0) - \mathfrak{s}(\varphi-\varphi_0,\gamma_0) = \mathfrak{s}(\varphi-\varphi_0,\gamma-\gamma_0) - \mathfrak{s}(\varphi_0,\gamma-\gamma_0) + \mathfrak{s}(\varphi-\varphi_0,\gamma_0)\ ,$$

donc

$$r(\mathfrak{s}(\varphi,\gamma) - \mathfrak{s}(\varphi_0,\gamma_0)) \leqslant p(\varphi-\varphi_0) \cdot q(\gamma-\gamma_0) + p(\varphi_0) \cdot q(\gamma-\gamma_0) + p(\varphi-\varphi_0) \cdot q(\gamma_0)\ .$$

Réciproquement, si $\mathfrak{s}$ est continue et $r \in \mathcal{R}$, l'ensemble $\mathfrak{s}^{-1}(D_r(0,1))$ est ouvert dans $F \times G$, donc contient un ensemble de la forme $B_p(0,1) \times B_q(0,1)$, où p et q sont des semi-normes continues sur F et G respectivement. Cette inclusion signifie que, pour tout $\varphi \in F$ et $\gamma \in G$ tels que $p(\varphi), q(\gamma) \leqslant 1$, on a $r(\mathfrak{s}(\varphi,\gamma)) \leqslant 1$. On en déduit l'inégalité comme dans la démonstration du lemme 2.2. □

EXEMPLE Le produit scalaire d'un espace préhilbertien F

$$(\cdot|\cdot) : F \times F \longrightarrow \mathbb{K} : (\varphi,\psi) \longmapsto (\varphi|\psi)$$

est continu sur l'espace normé F associé.

C'est évident par l'inégalité de Cauchy-Schwarz 1.1. □

THEOREME *Soit* F *un espace localement convexe.*

(i) L'application linéaire

$$+ : (\varphi,\psi) \longmapsto \varphi + \psi : F \times F \longrightarrow F$$

et l'application bilinéaire

$$\cdot : (\alpha,\varphi) \longmapsto \alpha \cdot \varphi : \mathbb{K} \times F \longrightarrow F$$

sont continues.

(ii) Pour tout $\alpha \in \mathbb{K} \smallsetminus \{0\}$ *et* $\psi \in F$ *, les applications*

$$\varphi \longmapsto \alpha \cdot \varphi \quad , \quad \varphi \longmapsto \varphi + \psi \quad : F \longrightarrow F$$

sont des homéomorphismes.

(iii) Si H *est un sous-espace vectoriel de* F *, alors son adhérence* $\overline{H}$ *est un sous-espace vectoriel.*

Démonstration de (i) Si p est une semi-norme continue sur F , alors

$$p \circ + (\varphi,\psi) = p(\varphi+\psi) \leqslant p(\varphi) + p(\psi) = p \times_1 p(\varphi,\psi)\ ,$$

d'où la première partie par le théorème 2.2. Pour la seconde on a

$$p \circ \cdot (\alpha,\varphi) = p(\alpha \cdot \varphi) = |\alpha| \cdot p(\varphi)\ ,$$

d'où le résultat par la proposition.

Démonstration de (ii) C'est immédiat par (i) et la remarque 1, puisque

$$\alpha \cdot \varphi = \cdot \circ j_{2,\alpha}(\varphi) \quad \text{et} \quad \varphi + \psi = + \circ j_{1,\psi}(\varphi) \ .$$

Démonstration de (iii) Par la continuité de $+$ et la remarque 2, il vient

$$\overline{H} + \overline{H} = +\left(\overline{H} \times \overline{H}\right) = +\left(\overline{H \times H}\right) \subset \overline{+(H \times H)} = \overline{H + H} = \overline{H} \ .$$

De même on a

$$\mathbb{K} \cdot \overline{H} = \cdot\left(\mathbb{K} \times \overline{H}\right) = \cdot\left(\overline{\mathbb{K} \times H}\right) \subset \overline{\cdot(\mathbb{K} \times H)} = \overline{\mathbb{K} \cdot H} = \overline{H} \ . \quad \square$$

De manière analogue (cf. exemple 2.1.4) on peut poser la

DEFINITION 2 On muni $F \cap G$ d'une structure d'espace localement convexe en considérant la famille de semi-normes $\mathcal{P} + \mathcal{Q} := (p+q)_{p \in \mathcal{P}, q \in \mathcal{Q}}$. On dit que c'est l' *intersection* des espaces localement convexes F et G .

Si $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont saturés, il en est de même de $\mathcal{P} + \mathcal{Q}$, puisque pour toutes parties finies $P \subset \mathcal{P}$ et $Q \subset \mathcal{Q}$, on a

$$\max(P + Q) \leqslant \max P + \max Q \ .$$

2.5 Convergence

PROPOSITION *Pour que la topologie de F soit séparée, il faut et il suffit que, pour tout $\varphi \in F \smallsetminus \{0\}$, il existe $p \in \mathcal{P}$ tel que $p(\varphi) > 0$.*

La condition est suffisante, car pour tout $\varphi, \psi \in F$ tels que $\varphi \neq \psi$, il existe $p \in \mathcal{P}$ tel que $r := p(\varphi - \psi) > 0$. Il suffit donc de remarquer que

$$B_p\left(\varphi, \frac{r}{3}\right) \cap B_p\left(\psi, \frac{r}{3}\right) = \emptyset\,;$$

en effet si $\theta \in B_p\left(\varphi, \frac{r}{3}\right) \cap B_p\left(\psi, \frac{r}{3}\right)$, on a

$$p(\theta - \varphi)\ ,\ p(\theta - \psi) \leqslant \frac{r}{3}\ ,$$

donc

$$r = p(\varphi - \psi) \leqslant p(\varphi - \theta) + p(\theta - \psi) \leqslant \frac{2}{3} \cdot r\ ,$$

ce qui est absurde.

Réciproquement si la topologie est séparée, pour tout $\varphi \in F \smallsetminus \{0\}$, il existe évidemment une boule $B_P(0, r_P)$ ne contenant pas φ , donc un $p \in P \subset \mathcal{P}$ tel que $\varphi \notin B_p(0, r_p)$, ce qui montre que $p(\varphi) > r_p > 0$. □

COROLLAIRE *Soit $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de F . Pour que $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $\varphi \in F$, il faut et il suffit que, pour tout $p \in \mathcal{P}$, on ait $\lim_k p(\varphi_k - \varphi) = 0$.*

Si F est séparé, alors la limite d'une suite est univoquement déterminée.

La condition est nécessaire puisque p est continue. Réciproquement si O est un ouvert contenant φ et $B_P(\varphi, r_P)$ une boule contenue dans O , pour tout $p \in P$, il existe $k_p \in \mathbb{N}$ tel que

$$p(\varphi_k - \varphi) \leqslant r_p \quad \text{pour tout } k \geqslant k_p\ .$$

Pour tout $k \geqslant \max_{p\in P} k_p$, on a alors

$$\varphi_k \in B_P(\varphi, r_P) \subset O\ .$$

Si φ et ψ sont des limites de $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$, on a

$$p(\varphi - \psi) \leqslant p(\varphi - \lim_k \varphi_k) + p(\lim_k \varphi_k - \psi) = \lim_k p(\varphi - \varphi_k) + \lim_k p(\varphi_k - \psi) = 0\ ,$$

donc $\varphi - \psi = 0$ par le corollaire. □

EXEMPLE 1 Soit X un ensemble. Une suite $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K}^X$ (cf. exemple 2.3.3) converge vers $\varphi \in \mathbb{K}^X$ si, et seulement si, pour tout $x \in X$, on a $\lim_k \varphi_k(x) = \varphi(x)$, ce qui signifie que $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge ponctuellement sur X vers φ .

EXEMPLE 2 Soit X un espace topologique. Une suite $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{C}(X)$ (cf. exemple 2.3.4) converge vers $\varphi \in \mathcal{C}(X)$ si, et seulement si, pour tout compact $K \subset X$, on a $\lim_k \varphi_k = \varphi$ uniformément sur K .

EXEMPLE 3 Soit X un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Une suite $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{C}^{(\infty)}(X)$ (cf. exemple 2.3.5) converge vers $\varphi \in \mathcal{C}^{(\infty)}(X)$ si, et seulement si, pour tout compact $K \subset X$ et tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$, on a $\lim_k \partial^\alpha \varphi_k = \partial^\alpha \varphi$ uniformément sur K , ce qui signifie que $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$, ainsi que toutes les dérivée, converge uniformément sur tout compact de X .

Puisque

$$p(\varphi_k - \varphi_l) \leqslant p(\varphi_k - \varphi) + p(\varphi - \varphi_l) \ ,$$

et en utilisant le corollaire 2.2.iv, toute suite convergente est une suite de Cauchy au sens suivant :

DEFINITION 1 On dit qu'une suite $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de F est une *suite de Cauchy* si, pour toute semi-norme continue, ou toute semi-norme $p \in \mathcal{P}$, et tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que l'on ait

$$p(\varphi_k - \varphi_l) \leqslant \varepsilon \quad \text{pour tout } k, l \geqslant N \ ,$$

et que F est *séquentiellement complet* (on dit aussi *semi-complet*) si F est **séparé** et si toute suite de Cauchy est convergente.

On dit qu'une série $\sum_{l=0}^\infty \varphi_l$ est *convergente* de *somme* $\varphi = \sum_{l=0}^\infty \varphi_l$ si

$$\varphi = \lim_k \sum_{l=0}^k \varphi_l \ ,$$

et que cette série est *absolument convergente* si, pour toute semi-norme continue, ou toute semi-norme $p \in \mathcal{P}$, on a

$$\sum_{l=0}^\infty p(\varphi_l) < \infty \ .$$

Dans un espace normé on dit aussi que cette série est *normalement* convergente (cf. cours d'Analyse [17], définition 10.7.2).

On dit qu'un sous-espace vectoriel H de F est *séquentiellement dense* si, pour tout $\varphi \in F$, il existe une suite $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset H$ telle que $\varphi = \lim_k \varphi_k$.

THEOREME *Soient F un espace localement convexe séquentiellement complet et $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de F .*

(i) ***Critère de Cauchy*** *Pour que la série $\sum_{l=0}^\infty \varphi_l$ soit convergente, il faut et il suffit que, pour toute semi-norme continue, ou toute semi-norme $p \in \mathcal{P}$, on ait*

$$\lim_{k,l} p\left(\sum_{j=l}^k \varphi_j\right) = 0 \ .$$

(ii) ***Critère de Weierstraß*** *Si la série $\sum_{l=0}^\infty \varphi_l$ est absolument convergente, alors tout réarrangement $\sum_{l=0}^\infty \varphi_{\sigma(l)}$ est convergent (σ est une bijection de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{N}$) et, pour toute semi-norme continue, ou toute semi-norme $p \in \mathcal{P}$, on a*

$$p\left(\sum_{l=0}^\infty \varphi_{\sigma(l)}\right) \leqslant \sum_{l=0}^\infty p(\varphi_l) \ .$$

(iii) Soient H un sous-espace vectoriel de F séquentiellement dense, G un espace localement convexe séquentiellement complet et $T : H \longrightarrow G$ une application (semi-) linéaire continue. Alors il existe une unique application (semi-) linéaire continue $\widetilde{T} : F \longrightarrow G$ qui prolonge T .

Démonstration de (i) La condition signifie simplement que la suite des sommes partielles est une suite de Cauchy.

Démonstration de (ii) Par le théorème du réarrangement (cf. cours d'Analyse [17], théorème 6.14) la série $\sum_{l=0}^{\infty} \varphi_{\sigma(l)}$ est absolument convergente et $\sum_{l=0}^{\infty} p(\varphi_l) = \sum_{l=0}^{\infty} p\left(\varphi_{\sigma(l)}\right)$; il suffit alors de constater que

$$p\left(\sum_{j=l}^{k} \varphi_{\sigma(j)}\right) \leqslant \sum_{j=l}^{k} p\left(\varphi_{\sigma(j)}\right) \to 0 \ ,$$

lorsque $k \to \infty$.

Démonstration de (iii) Pour tout $\varphi \in F$ et toute suite $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset H$ tels que $\varphi = \lim_k \varphi_k$, on peut définir $\widetilde{T}$ par

$$\widetilde{T}\varphi := \lim_k T\varphi_k \ ,$$

et il n'est pas trop difficile de vérifier que $\widetilde{T}$ est continue. □

EXEMPLE 4 Tout espace de Banach est évidemment séquentiellement complet.

EXEMPLE 5 Les espaces $\mathcal{C}(X)$ et $\mathcal{E}(X)$ sont séquentiellement complets (cf. exemples 2.3.4 et 2.3.5). C'est immédiat, puisqu'on a convergence simple, ce qui permet de définir la fonction limite, et convergence uniforme (ainsi que des dérivées dans le second cas) sur les boules fermées contenues dans X , qui sont compactes.

EXERCICE L'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est séquentiellement complet (cf. exemple 2.3.6).

2.6 Sommabilité

Il n'est pas possible d'exprimer la continuité d'une application à l'aide des suites convergente, à moins que F soit métrisable (cf. théorème 2.11). De même il existe des parties denses dans F qui ne sont pas séquentiellement denses. En outre il est utile d'introduire une notion de sommabilité, par opposition à la notion de convergence d'une série, ne faisant pas intervenir l'ordre (sur l'ensemble d'indices) dans lequel on additionne.

Pour surmonter ces difficultés il est nécessaire d'introduire la notion de filtre (cf. appendice 1). Nous ne les utiliserons en fait que dans ce paragraphe et seulement pour pouvoir définir les espaces localement convexes complets et démontrer la suffisance du critère de Cauchy. Par contre la sommabilité nous sera utile par la suite.

DEFINITION On dit qu'une base de filtre $\mathfrak{B}$ sur F est *de Cauchy* si, pour toute semi-norme continue, ou toute semi-norme $p \in \mathcal{P}$, et tout $\varepsilon > 0$, il existe $B \in \mathfrak{B}$ tel que l'on ait

$$p(\varphi - \psi) \leqslant \varepsilon \quad \text{pour tout } \varphi, \psi \in B \ ,$$

et que F est *complet* si toute base de filtre de Cauchy est convergente.

Soit J un ensemble. Nous désignerons par $\mathfrak{K}(J)$ l'ensemble des parties finies de J , i.e. l'ensemble des parties compactes de J muni de la métrique discrète.

On dit qu'une famille $(\varphi_j)_{j \in J} \subset F$ est *sommable* de somme φ si, pour toute semi-norme $p \in \mathcal{P}$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $K \in \mathfrak{K}(J)$ telle que, pour tout $L \in \mathfrak{K}(J)$ avce $L \supset K$, on ait

$$p\left(\sum_{j \in L} \varphi_j - \varphi\right) \leqslant \varepsilon \ .$$

Dans ce cas on écrit

$$\varphi = \sum_{j \in J} \varphi_j \ .$$

On dit que $(\varphi_j)_{j \in J}$ est *absolument sommable* si, pour tout $p \in \mathcal{P}$, la famille $(p(\varphi_j))_{j \in J}$ est sommable dans $\mathbb{R}$.

REMARQUE 1 Considérons sur $\mathfrak{K}(J)$ la base de filtre $\mathfrak{B}$ formée des ensembles

$$\mathfrak{k} := \{L \in \mathfrak{K}(J) \mid L \supset K\}$$

et l'application

$$S : \mathfrak{K}(J) \longrightarrow F : L \longmapsto \sum_{j \in L} \varphi_j \ .$$

Par définition $(\varphi_j)_{j \in J}$ est sommable si, et seulement si, la base de filtre $S(\mathfrak{B})$ est convergente. Soit $\sum_{j \in J} \varphi_j$ sa limite. Dans ce cas nous écrirons

$$\sum_{j \in J} \varphi_j = \lim_{\mathfrak{K}(J) \ni K \to \infty} \sum_{j \in K} \varphi_j = \lim_K \sum_{j \in K} \varphi_j$$

pour simplifier.

Il est clair que la notion de sommabilité est invariante par transformation bijective de l'ensemble d'indices. En outre on a la

PROPOSITION *Soit J un ensemble dénombrable. Si $(\varphi_j)_{j\in J}$ est une suite sommable dans F , alors pour toute bijection $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow J$, la série $\sum_{l=0}^{\infty} \varphi_{\sigma(l)}$ est convergente et*

$$\sum_{l=0}^{\infty} \varphi_{\sigma(l)} = \sum_{j\in J} \varphi_j \ .$$

Avec les notation de la définition, posons $N := \max \overset{-1}{\sigma}(K)$. Pour tout $k \geqslant N$, on a $\sigma(\{0,\ldots,k\}) \supset \sigma\left(\overset{-1}{\sigma}(K)\right) = K$ et il vient

$$p\left(\sum_{l=0}^{k} \varphi_{\sigma(l)} - \sum_{j\in J} \varphi_j\right) = p\left(\sum_{j\in\sigma(\{0,\ldots,k\})} \varphi_j - \sum_{j\in J} \varphi_j\right) \leqslant \varepsilon \ ,$$

ce qu'il suffisait de démontrer. □

Pour les familles de nombres réels nous avons obtenu un résultat analogue dans le lemme 1.1. Les interrelations sont explicitées dans le corollaire 2.11.

THEOREME *Soient F un espace localement convexe complet et $(\varphi_j)_{j\in J}$ une famille de F .*

(i) ***Critère de Cauchy*** *Pour que la famille $(\varphi_j)_{j\in J}$ soit sommable, il faut et il suffit que, pour toute semi-norme continue, ou toute semi-norme $p \in \mathcal{P}$, et tout $\varepsilon > 0$, il existe $K \in \mathfrak{K}(J)$ tel que, pour tout $L \in \mathfrak{K}(J)$ satisfaisant à $L \cap K = \emptyset$, on ait*

$$p\left(\sum_{j\in L} \varphi_j\right) \leqslant \varepsilon \ .$$

En particulier toute sous-famille d'une famille sommable est sommable.

(ii) ***Critère de Weierstraß*** *Toute famille absolument sommable est sommable et, pour toute semi-norme continue, ou toute semi-norme $p \in \mathcal{P}$, on a*

$$p\left(\sum_{j\in J} \varphi_j\right) \leqslant \sum_{j\in J} p(\varphi_l) \ .$$

Démonstration de (i) On vérifie immédiatement que la condition est nécessaire. La condition, avec les notations de la remarque 1, signifie que $S(\mathfrak{B})$ est une base de filtre de Cauchy sur F , donc convergente par hypothèse., ce qui montre que $(\varphi_j)_{j\in J}$ est sommable.

Une sous-famille d'une famille sommable satisfait évidemment au critère de Cauchy, donc est sommable.

Démonstration de (ii) C'est immédiat puisque, pour tout $L \in \mathfrak{K}(J)$, on a

$$p\left(\sum_{j\in L} \varphi_j\right) \leqslant \sum_{j\in L} p(\varphi_l) \ ,$$

ce qui montre que $(\varphi_j)_{j\in J}$ satisfait au critère de Cauchy. □

REMARQUE 2 Si $T : F \longrightarrow G$ est une application linéaire continue et $\left(\varphi_j\right)_{j\in J} \subset F$ une famille sommable, respectivement absolument sommable, alors il en est de même de $\left(T\varphi_j\right)_{j\in J}$ et

$$\sum_{j\in J} T\varphi_j = T\left(\sum_{j\in J} \varphi_j\right) \ .$$

2.7 Espaces de dimension finie

DEFINITION On dit que deux espaces localement convexes F et G sont *isomorphes* s'il existe une bijection linéaire $T : F \longrightarrow G$ qui soit un homéomorphisme, i.e. telle que T et $\overset{-1}{T}$ soient continues.

Soient F et G des espaces normés. Une application linéaire $T : F \longrightarrow G$ telle que

$$\|T\varphi\|_G = \|\varphi\|_F \quad \text{pour tout } \varphi \in F$$

est dite une *isométrie* de F dans G . On dit que c'est une isométrie de F sur G si elle est surjective.

Remarquons qu'une isométrie est injective, puisque $\|T\varphi\|_G = 0$ entraîne $\|\varphi\|_F = 0$, donc $\varphi = 0$. Si elle est surjective, alors $\overset{-1}{T}$ est une isométrie de G sur F .

LEMME

(i) Toute application linéaire $T : (\mathbb{K}^n, |\cdot|_1) \longrightarrow F$ est continue.

(ii) Si H est un sous-espace vectoriel de dimension finie dans un espace localement convexe séparé F , il existe une semi-norme continue sur F qui induise une norme sur H .

Démonstration de (i) Désignons par $(e_j)_{j=1,\ldots,n}$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$ et soit p une semi-norme continue sur F . Pour tout $x \in \mathbb{K}^n$, on a $x = \sum_{j=1}^n x_j \cdot e_j$ et

$$p(Tx) = p\left(\sum_{j=1}^n x_j \cdot Te_j\right) \leqslant \sum_{j=1}^n |x_j| \cdot p(Te_j) \leqslant \max_{j=1,\ldots,n} p(Te_j) \cdot |x|_1 \ ,$$

d'où le résultat par le théorème 2.2.

Démonstration de (ii) Comme F est séparé, étant donné $\varphi_1 \in H \setminus \{0\}$, il existe d'après la proposition 2.5 une semi-norme p_1 continue sur F telle que $p_1(\varphi_1) > 0$. L'ensemble $\{p_1 = 0\} \cap H$ est un sous-espace vectoriel de dimension $< \dim(H)$. En choisissant $\varphi_2 \in \{p_1 = 0\} \cap H \setminus \{0\}$, si cela est possible, et une semi-norme p_2 continue sur F telle que $p_2(\varphi_2) > 0$, la dimension de $\{p_2 = 0\} \cap \{p_1 = 0\} \cap H$ est strictement plus petite que celle de $\{p_1 = 0\} \cap H$. Par récurrence il existe des semi-normes continues $(p_j)_{j=1,\ldots,m}$ telles que $m \leqslant \dim(H)$ et

$$\bigcap_{j=1}^m \{p_j = 0\} \cap H = \{0\} \ .$$

La semi-norme $p := \max_{j=1,\ldots,m} p_j$ (exemple 2.1.2) est donc continue sur F par le corollaire 2.2.(iv) et elle définit une norme sur H , car elle ne s'y annule qu'en 0 . □

THEOREME *Si F est un espace localement convexe séparé de dimension finie, alors F est isomorphe à $\mathbb{K}^n$. En d'autres termes tous les espaces localement convexes séparés de même dimension finie sont isomorphes, ou encore il n'existe qu'une seule structure d'espace localement convexe séparé sur $\mathbb{K}^n$.*

Soient T une bijection linéaire de $\mathbb{K}^n$ sur F et $S := \{x \in \mathbb{K}^n \mid |x|_1 = 1\}$ la sphère unité de $\mathbb{K}^n$ par rapport à la norme $|\cdot|_1$. Comme S est compacte et T continue par le lemme, la partie $T(S)$ est compacte dans F et ne contient pas 0 . Par le lemme (ii), il existe une norme p continue sur F . Puisqu'elle ne s'annule pas sur $T(S)$, on a

$$\varepsilon := \inf_{\varphi \in T(S)} p(\varphi) > 0 \ .$$

Si $\varphi \in F \setminus \{0\}$, on a $\dfrac{\overset{-1}{T}\varphi}{\left|\overset{-1}{T}\varphi\right|_1} \in S$, donc $\dfrac{\varphi}{\left|\overset{-1}{T}\varphi\right|_1} \in T(S)$, et par suite $p\left(\dfrac{\varphi}{\left|\overset{-1}{T}\varphi\right|_1}\right) \geqslant \varepsilon$. On en déduit que

$$\left|\overset{-1}{T}\varphi\right|_1 \leqslant \frac{1}{\varepsilon} \cdot p(\varphi) \ ,$$

ce qui finit de prouver, grâce au théorème 2.2, que $\overset{-1}{T}$ est continue. □

COROLLAIRE *Soit F un espace localement convexe séparé de dimension finie.*

(i) Il existe une norme sur F définissant sa structure d'espace localement convexe et toutes les normes sur F sont équivalentes entre elles.

(ii) Toute application linéaire de F dans un espace localement convexe G est continue.

(iii) F est séquentiellement complet, ou bien complet pour toute norme sur F .

(iv) F est localement compact, ou bien la boule unité de chaque norme sur F est compacte.

Démonstration de (i) C'est immédiat.

Démonstration de (ii) Cela découle du diagramme

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "S"] & G \\ \mathbb{K}^n \arrow[u] \arrow[ur, "S \circ T"'] & \end{tikzcd}$$

en remarquant que $S = (S \circ T) \circ \overset{-1}{T}$ est continue, puisque $S \circ T$ et $\overset{-1}{T}$ le sont.

Démonstration de (iii) Il suffit de remarquer que les semi-normes continues sur F et $\mathbb{K}^n$ se correspondent par T , donc aussi les suites de Cauchy.

Démonstration de (iv) C'est aussi immédiat, puisque toute norme sur $\mathbb{K}^n$ est équivalente à $|\cdot|_1$. □

REMARQUE La dernière assertion possède une réciproque : le théorème de Riesz 2.9.

2.8 Espaces quotients et sous-espaces

Soient F un espace vectoriel, H un sous-espace vectoriel de F et

$$F/H := \{[\varphi] \mid [\varphi] = \varphi + H \text{ pour } \varphi \in F\}$$

l'espace quotient de F par H .

PROPOSITION *Si p est une semi-norme sur F , alors*

$$[p] : [\varphi] \longmapsto \inf_{\psi\in[\varphi]} p(\psi) = \inf_{\psi\in H} p(\psi - \varphi) =: dist_p(\varphi, H)$$

est une semi-norme sur F/H .

C'est immédiat et laissé en exercice. □

DEFINITION Si F est un espace localement convexe, alors on muni F/H d'une structure d'espace localement convexe en considérant les semi-normes $[p]$, p parcourant l'ensemble des semi-normes continues sur F . On dit que c'est l' *espace (localement convexe) quotient* de F par H et que l'application linéaire

$$\pi : \varphi \longmapsto [\varphi] : F \longrightarrow F/H$$

est l' *application canonique* de F sur F/H . Elle est continue, puisqu'on a

$$[p] \circ \pi(\varphi) = \inf_{\psi\in[\varphi]} p(\psi) \leqslant p(\varphi) \ .$$

THEOREME *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) *F/H est séparé.*

(ii) *H est fermé.*

(iii) *Pour tout $\varphi \in F \setminus H$, il existe une semi-norme p continue sur F telle que*

$$dist_p(\varphi, H) > 0 \ .$$

(i) ⇒ (ii) En effet

$$H = \overset{-1}{\pi}(\{0\}) \ ,$$

$\{0\}$ est fermé dans F/H et π est continue.

(ii) ⇒ (iii) Si $\varphi \in F \setminus H$, il existe une semi-norme continue p sur F telle que

$$B_p(\varphi, 1) \cap H = \emptyset \ .$$

Mais cela signifie que, pour tout $\psi \in H$, on a $p(\psi - \varphi) \geqslant 1$.

(iii) ⇒ (i) Si $[\varphi] \in F/H \setminus \{0\}$, i.e. $\varphi \in F \setminus H$, en choisissant p comme dans (iii), il vient

$$[p]([\varphi]) = \inf_{\psi\in H} p(\psi - \varphi) > 0 \ .$$

Le résultat découle donc de la proposition 2.5. □

COROLLAIRE *Si G est un sous-espace vectoriel de dimension finie dans un espace localement convexe séparé F , alors G est fermé. Plus généralement, si H est un sous-espace vectoriel fermé de F , alors $G+H$ est fermé.*

Soit $\varphi \in F \setminus G$. Par le lemme 2.7.ii, il existe une semi-norme p continue sur F induisant une norme sur $G+\mathbb{K}\cdot\varphi$. On peut supposer que $p(\varphi)=1$. Pour tout $\gamma \in G \setminus B_p(0,2)$, on a

$$p(\gamma-\varphi) \geqslant p(\gamma)-p(\varphi) \geqslant 1 \ .$$

En outre comme $B_p(0,2)\cap G$ est compact, on a

$$\inf\nolimits_{\gamma\in B_p(0,2)\cap G} p(\gamma-\varphi) > 0 \ ,$$

puisque $p(\gamma-\varphi)>0$ pour tout $\gamma \in G$. Nous avons donc prouvé que $dist_p(\varphi,G)>0$. Ceci finit de prouver que $F \setminus G$ est ouvert.

Plus généralement, si π désigne l'application canonique de F sur F/H , on a

$$G+H=\bigcup_{\gamma\in G}\gamma+H=\overset{-1}{\pi}(\pi(G)) \ .$$

Mais $\pi(G)$ est un sous-espace vectoriel de dimension finie dans F/H , donc est fermé par ce qui précède. Le résultat en découle, puisque π est continue. □

EXERCICE (Hyperplan et la continuité des formes linéaires) Soit F un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Un sous-espace vectoriel $H \subsetneqq F$ est dit un hyperplan si $F=H+\mathbb{K}\cdot\varphi$ pour un $\varphi\in F$. Montrer :

(a) Pour tout $\varphi \in F\setminus H$ on a $F=H\oplus\mathbb{K}\cdot\varphi$.

(b) Si F est un espace localement convexe séparé, alors $\overline{H}\in\{H,F\}$, i.e. H est fermé ou dense.

(a) Pour tout forme linéaire $\mu : F \longrightarrow \mathbb{K}$, $\mu\neq 0$, et tout $\varphi\in F$ tel que $\mu(\varphi)=1$ on a

$$F=\operatorname{Ker}\mu\oplus\mathbb{K}\cdot\varphi \ .$$

En outre μ est continue si, et seulement si, $\operatorname{Ker}\mu$ est fermé.

(b) Pour tout $\varphi\in\mathcal{K}(\mathbb{R})$ et tout $\varepsilon>0$, il existe un $\psi\in\mathcal{K}(\mathbb{R})$ tel que

$$\int_{\mathbb{R}}\psi\, d\lambda=0 \qquad \text{et} \qquad \|\varphi-\psi\|_\infty\leqslant\varepsilon \ .$$

Signification ? Démontrer ce résultat élémentairement.

2.9 Théorème de Riesz

THEOREME *Pour qu'un espace localement convexe séparé soit de dimension finie, il faut et il suffit qu'il soit localement compact.*

Nous avons déjà vu, corollaire 2.7.(iv), que la condition est nécessaire. Réciproquement il existe une semi-norme continue p sur F telle que la boule $B := B_p(0,1)$ soit compacte. Mais comme

$$B \subset \bigcup_{\varphi \in B} \varphi + D_p\left(0, \frac{1}{2}\right) \ ,$$

il existe une partie finie $\mathcal{G} \subset B$ telle que

$$B \subset \bigcup_{\varphi \in \mathcal{G}} \varphi + D_p\left(0, \frac{1}{2}\right) \subset \bigcup_{\varphi \in \mathcal{G}} \varphi + \frac{1}{2} \cdot B \ .$$

Soit G le sous-espace vectoriel de dimension finie engendré par $\mathcal{G}$. Par le corollaire 2.8 il est fermé dans F , donc F/G est séparé par le théorème 2.8. L'image $\pi(B)$ de B dans F/G est donc compacte et on a

$$\pi(B) \supset B_{[p]}\left(0, \frac{1}{2}\right) \ ,$$

car si $[p]([\varphi]) \leqslant \frac{1}{2}$, il existe $\psi \in [\varphi]$ tel que $p(\psi) \leqslant 1$, donc $[\varphi] = [\psi] \in \pi(B)$. Mais

$$\pi(B) \subset \bigcup_{\varphi \in \mathcal{G}} \pi\left(\varphi + \frac{1}{2} \cdot B\right) = \frac{1}{2} \cdot \pi(B) \ ,$$

puisque $\pi(\mathcal{G}) = \{0\}$. Par récurrence on en déduit que

$$\pi(B) \subset \frac{1}{2^k} \cdot \pi(B) \ .$$

On a alors

$$2^k \cdot B_{[p]}\left(0, \frac{1}{2}\right) \subset 2^k \cdot \pi(B) \subset \pi(B) \ ,$$

ce qui montre que

$$F/G = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} 2^k \cdot B_{[p]}\left(0, \frac{1}{2}\right) = \pi(B)$$

est compact. Ceci n'est possible que si $F/G = \{0\}$, car $\gamma \in F/G \setminus \{0\}$, alors $\mathbb{K} \cdot \gamma$ est fermé dans F/G , mais n'est pas compact. Ainsi $F = \overset{-1}{\pi}(\{0\}) = G$ est de dimension finie. $\square$

2.10 Espaces localement convexes finals

DEFINITION Soient $(F_j)_{j\in J}$ une famille d'espaces localement convexes, F un espace vectoriel et, pour tout $j \in J$, une application linéaire $T_j : F_j \longrightarrow F$. L'ensemble de toutes les semi-normes p sur F telles que chaque semi-norme $p \circ T_j$ soit continue sur F_j , définit un espace localement convexe dit *final (par rapport aux* T_j). On écrit $F = \varinjlim (F_j, T_j)$.

Les applications $T_j : F_j \longrightarrow F$ sont évidemment continues. En outre cette topologie jouit de la propriété *universelle* , suivante :

PROPOSITION *Soient* $F = \varinjlim (F_j, T_j)$ *et* G *un espace localement convexe.*

(i) Pour qu'une une application linéaire $T : F \longrightarrow G$ *soit continue, il faut et il suffit que, pour tout* $j \in J$ *, l'application* $T \circ T_j$ *soit continue sur* F_j *.*

$$\begin{tikzcd} F_j \arrow[r, "T_j"] \arrow[dr, "T \circ T_j"'] & F \arrow[d, "T"] \\ & G \end{tikzcd}$$

(ii) Si F *peut être plongé dans* G *, i.e. il existe une application injective* $j : F \hookrightarrow G$ *, telle que chaque* $j \circ T_j$ *soit continue, et si* G *est séparé, alors in en est de même de* F *.*

Démonstration de (i) En effet T est continue si, et seulement si, pour toute semi-norme continue q sur G la semi-norme $q \circ T$ est continue. Mais ceci est par définition équivalent à la continuité des semi-normes $q \circ T \circ T_j$, donc à la continuité des applications $T \circ T_j$.

Démonstration de (ii) Par (i) l'application j est continue. Pour tout $\varphi \in F \setminus \{0\}$, on a $j\varphi \neq 0$ et, puisque G est séparé, il existe par la proposition 2.5 une semi-norme continue q sur G telle que $q \circ j(\varphi) = q(j\varphi) \neq 0$. Comme $q \circ j$ est une semi-norme continue sur F , le résultat en découle à nouveau par la proposition 2.5. □

REMARQUE Cette topologie est la plus fine parmi les topologies **localement convexes** qui rendent les applications T_j continues, mais ce n'est pas nécessairement la plus fine parmi toutes les topologies ayant cette propriété. En outre chaque F_j peut être séparé sans que F le soit (cf. exemple 1 et le théorème 2.8, ou exemple 6).

EXEMPLE 1 Si F est un espace localement convexe et H un sous-espace vectoriel de F , alors F/H est l'espace localement convexe final par rapport à l'application canonique

$$\pi : F \longrightarrow F/H \ .$$

En effet si p est une semi-norme continue sur F , la semi-norme $[p] \circ \pi$ est continue, puisque π est continue. Réciproquement si q est une semi-norme sur F/H telle que $q \circ \pi$ soit continue sur F , alors $q = [q \circ \pi]$, donc q est une semi-norme définissant F/H . □

THEOREME *Soient* $F = \underrightarrow{\lim}(F_j, T_j)$ *et, pour tout* $j \in J$ *, un ensemble saturé* $\mathcal{Q}_j$ *de semi-normes définissant la topologie de* F_j *.*

(i) Pour qu'une semi-norme p *soit continue sur* F *, il faut et il suffit qu'il existe des semi-normes* $q_j \in \mathcal{Q}_j$ *et des nombres* $c_j \in \mathbb{R}_+$ *tels que*

$$p \leqslant \bigwedge_{j \in J} c_j \cdot [q_j]^\infty \ ,$$

où $[q_j]$ *désigne la semi-norme sur l'espace quotient* $F_j / \operatorname{Ker} T_j$ *identifié au sous-espace vectoriel* $\operatorname{Im}(T_j) \subset F$ *.*

(ii) Si $F = \bigcup_{j \in J} \operatorname{Im}(T_j)$ *, alors pour* $q_j \in \mathcal{Q}_j$ *et* $c_j \in \mathbb{R}_+$ *la fonctionnelle* $\bigwedge_{j \in J} c_j \cdot [q_j]^\infty$ *est une semi-norme sur* F *et l'ensemble de ces semi-normes définit la topologie de* F *.*

Démonstration de (i) Cela découle des théorèmes 2.1.i et 2.2, puisque la continuité de p signifie que, pour tout $j \in J$, il existe une semi-norme $q_j \in \mathcal{Q}_j$ et $c_j \in \mathbb{R}_+$ tels que $p \circ T_j \leqslant c_j \cdot q_j$, c'est-à-dire que $p_{|\operatorname{Im}(T_j)} \leqslant c_j \cdot [q_j]$.

Démonstration de (ii) Pour tout $\varphi \in F$, il existe $k \in J$ tel que $\varphi \in F_k$ et on a

$$0 \leqslant \bigwedge_{j \in J} c_j \cdot [q_j]^\infty (\varphi) \leqslant c_k \cdot [q_k] (\varphi) \leqslant c_k \cdot q_k \circ T_k (\varphi) < \infty \, ;$$

le théorème 2.1.ii montre alors que $\bigwedge_{j \in J} c_j \cdot [q_j]^\infty$ est une semi-norme. Il nous reste à montrer qu'elle est continue. Mais pour tout $k \in J$, on a

$$\bigwedge_{j \in J} c_j \cdot [q_j]^\infty \circ T_j \leqslant c_k \cdot [q_k] \circ T_k \leqslant c_k \cdot q_k \ . \quad \square$$

EXEMPLE 2 Soit X un espace localement compact. Pour tout compact $K \in \mathfrak{K}(X)$, on désigne par $\mathcal{K}(X, K)$ l'espace de Banach de toutes les fonctions continues sur X ayant un support dans K , muni de la norme $\|\cdot\|_{\infty, K}$. Sur $\mathcal{K}(X) = \bigcup_{K \in \mathfrak{K}(X)} \mathcal{K}(X, K)$ on considère alors la topologie localement convexe finale par rapport aux injections canoniques

$$\mathcal{K}(X, K) \hookrightarrow \mathcal{K}(X) \ .$$

On a donc $\mathcal{K}(X) = \underrightarrow{\lim}_{K \in \mathfrak{K}(X)} \mathcal{K}(X, K)$.

Remarquons que $\|\cdot\|_{\infty, X}$ est continue sur $\mathcal{K}(X)$, ce qui prouve que $\mathcal{K}(X)$ est séparé. On aurait aussi pu constater que les injections canoniques $\mathcal{K}(X, K) \hookrightarrow \mathcal{C}^b(X)$ sont continues et appliquer la proposition (ii). Grâce au théorème on voit que les semi-normes de la forme

$$\bigwedge_{K \in \mathfrak{K}(X)} c_K \cdot \|\cdot\|_{\infty, K}^\infty \quad \text{pour} \ \ (c_K)_{K \in \mathfrak{K}(X)} \subset \mathbb{R}_+$$

définissent la topologie de $\mathcal{K}(X)$.

EXEMPLE 3 Soit X un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Pour tout $K \in \mathfrak{K}(X)$, on désigne par $\mathcal{D}(X, K)$ l'espace localement convexe de toutes les fonctions indéfiniment dérivables dans X et ayant un support dans K , muni de l'ensemble de semi-normes $\left(p_{K,k|\mathcal{D}(X,K)}\right)_{k \in \mathbb{N}}$ (cf. exemple 2.1.5). Il est saturé car

$$p_{K,k|\mathcal{D}(X,K)} \leqslant p_{K,k+1|\mathcal{D}(X,K)} \ .$$

Sur

$$\mathcal{D}(X) = \bigcup_{K \in \mathfrak{K}(X)} \mathcal{D}(X,K) \ ,$$

l'espace vectoriel des fonctions indéfiniment dérivables à support compact, on considère alors la topologie localement convexe finale par rapport aux injections canoniques

$$\mathcal{D}(X,K) \hookrightarrow \mathcal{D}(X) \ .$$

On a donc $\mathcal{D}(X) = \varinjlim_{K \in \mathfrak{K}(X)} \mathcal{D}(X,K)$.

Le même raisonnement que ci-dessus prouve que $\mathcal{D}(X)$ est aussi séparé, ou mieux que l'injection canonique $\mathcal{D}(X) \hookrightarrow \mathcal{K}(X)$ est continue, et que les semi-normes de la forme

$$\bigwedge_{K \in \mathfrak{K}(X)} c_K \cdot \left(p_{K,k_K|\mathcal{D}(X,K)}\right)^{\infty} \quad \text{pour } \ (c_K)_{K \in \mathfrak{K}(X)} \subset \mathbb{R}_+ \text{ et } \ (k_K)_{K \in \mathfrak{K}(X)} \subset \mathbb{N}$$

définissent la topologie de $\mathcal{D}(X)$.

EXEMPLE 4 La structure localement convexe la plus fine sur F , i.e. celle définie par toutes les semi-normes sur F et notée F_{fine} , est évidemment finale par rapport aux injections

$$H \hookrightarrow F \ ,$$

où H est un sous-espace vectoriel de dimension fine de F . Toute application linéaire de F_{fine} dans un espace localement convexe est continue.

Si X est un ensemble muni de la métrique discrète, alors $\mathfrak{K}(X)$ est l'ensemble $\mathfrak{P}^f(X)$ des parties finies de X et $\mathcal{K}(X)$ s'identifie à l'ensemble $\mathbb{K}^{(X)}$ des familles $(\varphi(x))_{x \in X}$ à support fini, i.e. telles que $\varphi(x) = 0$ pour tout $x \in X$ sauf un nombre fini. Puisque pour toute partie finie K de X , l'espace de Banach $\mathcal{K}(X,K)$ s'identifie à $\left(\mathbb{K}^K, \|\cdot\|_\infty\right)$, qui est de dimension finie, on voit que $\mathcal{K}(X) = \mathbb{K}^{(X)}$ est muni de la topologie localement convexe la plus fine. On dit que $\left(1_{\{x\}}\right)_{x \in X}$ est la *base canonique* de $\mathbb{K}^{(X)}$. On a évidemment

$$1_{\{x\}}(y) := \delta_{x,y} \quad \text{pour tout } x, y \in X \ ,$$

ainsi que

$$\varphi = \sum_{x \in X} \varphi(x) \cdot 1_{\{x\}} \quad \text{pour tout } \varphi \in \mathbb{K}^{(X)} \ ,$$

la somme ne portant que sur un nombre fini d'indices.

Si $(\epsilon_x)_{x \in X}$ est une base algébrique de F , alors

$$\varphi \longmapsto \sum_{x \in X} \varphi(x) \cdot \epsilon_x : \mathbb{K}^{(X)} \longrightarrow F_{fine} \ .$$

est un isomorphisme.

EXEMPLE 5 Plus généralement si $(F_j)_{j \in J}$ est une famille d'espace localement convexes, la *somme directe topologique (externe)* $\overset{top}{\bigoplus}_{j \in J} F_j$, ensemble des familles $\left(\varphi_j\right)_{j \in J} \in \prod_{j \in J} F_j$ à support fini, est l'espace localement convexe final par rapport aux injections canoniques $F_k \hookrightarrow \bigoplus_{j \in J} F_j$.

Si $(F_j)_{j\in J}$ est une famille de sous-espaces vectoriels de F , on dit que F est la somme directe topologique des F_j et on écrit $F = \overset{top}{\bigoplus_{j\in J}} F_j$, si l'application canonique

$$\overset{top}{\bigoplus_{j\in J}} F_j \longrightarrow F : (\varphi_j)_{j\in J} \longmapsto \sum_{j\in J} \varphi_j$$

est un isomorphisme.

COROLLAIRE *Si F et G sont des espaces localement convexes alors $F \overset{top}{\oplus} G$ est isomorphe à $F \times G$.*

L'application canonique $F \overset{top}{\oplus} G \longrightarrow F \times G$ est continue par la proposition. D'autre part si p est une semi-norme continue sur $F \overset{top}{\oplus} G$, alors $p_{|F}$ et $p_{|G}$ sont des semi-normes continues sur F et G respectivement, donc $p_{|F} \times_1 p_{|G}$ est une semi-norme continue sur $F \times G$. Mais comme

$$p(\varphi + \gamma) \leqslant p(\varphi) + p(\gamma) = p_{|F} \times_1 p_{|G}(\varphi, \gamma)$$

l'application canonique $F \times G \longrightarrow F \overset{top}{\oplus} G$ est continue. □

EXEMPLE 6 Soient F un espace vectoriel et $G, H \subset F$ des sous-espaces vectoriels muni de normes $\|\cdot\|_G$ et $\|\cdot\|_H$. Alors l'espace localement convexe final par rapport aux deux injections canoniques $G \hookrightarrow F$ et $H \hookrightarrow F$ est semi-normable par la semi-norme

$$\|\varphi\|_{G+H} = \inf_{\gamma\in G,\psi\in H,\varphi=\gamma+\psi} \|\gamma\|_G + \|\psi\|_H \ .$$

Nous le noterons $G + H$ (cf.exemple 2.1.7).

Si F est un espace localement convexe séparé et les injections canoniques continues, alors $\|\cdot\|_{G+H}$ est une norme.

La première partie est immédiate par le théorème. Pour la seconde, la propriété universelle montre que l'injection canonique $G + H \hookrightarrow F$ est continue ; il est alors clair que $G + H$ est séparé □

EXEMPLE 7 Voici un exemple montrant que $\|\cdot\|_{G+H}$ n'est pas nécessairement une norme.

Dans $\mathcal{K}(\mathbb{N})$ on considère les vecteurs $\epsilon_{k,\pm} := e_0 \pm e_k$ pour $k \geqslant 1$ et on pose $F_\pm := \text{lin}(\epsilon_{k,\pm} \ , k \geqslant 1)$. On vérifie immédiatement que les deux suites $(\epsilon_{k,\pm})_{k\geqslant 1}$ sont linéairement indépendantes et on munit $F_\pm$ de la norme $\|\cdot\|_\pm$ définie par

$$\left\| \sum_{l=1}^n c_{k,\pm} \cdot \epsilon_{k,\pm} \right\|_\pm^2 := \sum_{k=1}^n |c_{k,\pm}|^2 \ .$$

On vérifie immédiatement que

$$e_0 = \left(\sum_{k=1}^n \frac{2}{k} \right)^{-1} \cdot \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \cdot (\epsilon_{k,+} + \epsilon_{k,-}) \in F_+ + F_-$$

et

$$\left\| \left(\sum_{k=1}^n \frac{2}{k} \right)^{-1} \cdot \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \cdot \epsilon_{k,\pm} \right\|_\pm^2 = \left(\sum_{k=1}^n \frac{2}{k} \right)^{-2} \cdot \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \to 0 \ ,$$

lorsque $k \to \infty$. Ceci prouve que

$$\|e_0\|_{F_+ + F_-} = 0 \ .$$

Remarquons que les injections canoniques $F_\pm \hookrightarrow \mathcal{K}(\mathbb{N})$ ne sont pas continues, car par exemple

$$\varepsilon_0 : \mathcal{K}(\mathbb{N}) \longrightarrow \mathbb{K} : \varphi \longmapsto \varphi(0)$$

est continue, mais

$$\varepsilon_{0|F_\pm} : F_\pm \longrightarrow \mathbb{K} : \sum_{l=1}^n c_{k,\pm} \cdot \epsilon_{k,\pm} \longmapsto \sum_{k=1}^n c_{k,\pm}$$

ne l'est pas. Finalement on a

$$F_+ \cap F_- = \left\{ \sum_{k=1}^n c_k \cdot e_k \ \middle| \ \sum_{k=1}^n c_k = 0 \right\} \ .$$

EXERCICE Soient F un espace vectoriel et $G, H \subset F$ des sous-espaces vectoriels muni de normes $\|\cdot\|_G$ et $\|\cdot\|_H$.

(a) Si $G + H$ est séparé, montrer que $G + H$ est complet si G et H le sont. Réciproque ?

(b) Si la somme $G + H$ est directe, comparer $G + H$ et $G \times H$.

2.11 Espaces de Fréchet

DEFINITION 1 On dit qu'un espace localement convexe F est un *espace* (localement convexe) *de Fréchet* s'il est métrisable et complet.

THEOREME *Pour qu'un espace localement convexe soit métrisable, il faut et il suffit qu'il soit séparé et puisse être défini par une suite de semi-normes.*

On montre facilement que si $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de semi-normes définissant la topologie de F , alors

$$d(\varphi,\psi) := \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{k+1} \cdot \min\left(p_k(\varphi-\psi), 1\right)$$

définit une métrique sur F définissant cette topologie. La réciproque est facile. Les détails sont laissés en exercice. $\square$

EXEMPLE Voici des exemples d'espaces de Fréchet.

(a) Les espaces de Banach évidemment.

(b) L'espace $\mathcal{E}(X)$ (exemple 2.5.5). Remarquons tout d'abord que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, l'ensemble

$$K_k := B(0,k) \cap \left\{ d(\cdot, \mathbb{R}^n \setminus X) \geqslant \frac{1}{k} \right\}$$

est compact et que

$$X = \bigcup_{k\in\mathbb{N}^*} D(0,k) \cap \left\{ d(\cdot, \mathbb{R}^n \setminus X) > \frac{1}{k} \right\} .$$

On en déduit que si K est une partie compacte de X , alors

$$K \subset D(0,k) \cap \left\{ d(\cdot, \mathbb{R}^n \setminus X) > \frac{1}{k} \right\} \subset K_k$$

pour un certain k . Ceci montre que les semi-normes $p_{K_k,k}$ engendrent la topologie de $\mathcal{E}(X)$.

(c) L'espace de Schwartz (exercice 2.5).

(d) Les espaces $\mathcal{D}(X,K)$ (exemple 2.10.3).

LEMME *Soit* $(\alpha_j)_{j\in J} \subset \mathbb{R}_+$ *une famille de nombres réels positifs. Pour que* $(\alpha_j)_{j\in J}$ *soit sommable dans* $\mathbb{R}$ *, il faut et il suffit que*

$$\sup_{K\in\mathfrak{K}(J)} \sum_{j\in K} |\alpha_j| < \infty .$$

Dans ce cas

$$\sum_{j\in J} \alpha_j = \sup_{K\in\mathfrak{K}(J)} \sum_{j\in K} \alpha_j .$$

Si $(\alpha_j)_{j\in J}$ est sommable de somme α , il existe $K_1 \in \mathfrak{K}(J)$ tel que

$$\sum_{j\in L} \alpha_j \leqslant \left|\sum_{j\in L} \alpha_j - \alpha\right| + |\alpha| \leqslant 1 + |\alpha|$$

pour toute partie finie $L \supset K_1$, ce qui montre que

$$\sup\nolimits_{K\in\mathfrak{K}(J)} \sum_{j\in K} \alpha_j \leqslant 1 + |\alpha| < \infty \ .$$

Réciproquement, pour tout $\varepsilon > 0$, la propriété d'approximation du supremum montre qu'il existe $K_\varepsilon \in \mathfrak{K}(J)$ tel que, pour tout $L \in \mathfrak{K}(J)$ tel que $L \supset K_\varepsilon$, on ait

$$\sup\nolimits_{K\in\mathfrak{K}(J)} \sum_{j\in K} \alpha_j \geqslant \sum_{j\in L} \alpha_j \geqslant \left(\sup\nolimits_{K\in\mathfrak{K}(J)} \sum_{j\in K} \alpha_j\right) - \varepsilon \ .$$

Ceci prouve que $(\alpha_j)_{j\in J}$ est sommable de somme $\sup_{K\in\mathfrak{K}(J)} \sum_{j\in K} \alpha_j$. □

COROLLAIRE *Soit F un espace de Fréchet.*

(i) Si $(\varphi_j)_{j\in J} \subset F$ est sommable, alors $\{j \in J \mid \varphi_j \neq 0\}$ est dénombrable ; si D est une partie dénombrable contenant cet ensemble et $\sigma : I \longrightarrow D$ est une énumération, la série $\sum_{l=0}^{\infty} \varphi_{\sigma(l)}$ est convergente de somme $\sum_{j\in J} \varphi_j$.

(ii) Si F est de dimension finie, toute famille sommable est absolument sommable.

Considérons une suite $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de semi-normes définissant la topologie de F .

Démonstration de (i) Soit $(\varphi_j)_{j\in J} \subset F$ une famille sommable. Le citère de Cauchy 2.6 montre que l'ensemble

$$\left\{j \in J \;\middle|\; p_k(\varphi_j) > \frac{1}{k}\right\}$$

est fini, donc que $\{j \in J \mid p_k(\varphi_j) \neq 0\}$ est dénombrable. Par la proposition 2.5 on a

$$\{j \in J \mid \varphi_j \neq 0\} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \{j \in J \mid p_k(\varphi_j) \neq 0\} \ ,$$

d'où le résultat par la proposition 3.6.

Démonstration de (ii) Soit $(\varphi_j)_{j\in J}$ une famille sommable dans F , que nous supposons de dimension finie. Il est donc isomorphe à $\mathbb{K}^n$ et la considération des composantes, puis des parties réelles et imaginaires, nous ramène au cas réel (cf. remarque 2.4.1). Par le critère de Cauchy 2.6, les sous-familles $(\varphi_j)_{j\in J,\varphi_j>0}$ et $(-\varphi_j)_{j\in J,\varphi_j<0}$ sont aussi sommables. Le lemme montre alors que

$$\sum_{j\in K} |\varphi_j| = \sum_{j\in K,\varphi_j>0} \varphi_j + \sum_{j\in K,\varphi_j<0} (-\varphi_j) < \infty \ ,$$

ce qu'il fallait démontrer. □

REMARQUE 1 Toute base algébrique d'un espace de Fréchet F est non-dénombrable.

En effet soient $(\epsilon_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une base algébrique de F et $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite, que nous pouvons supposer croissante, de semi-normes définissant la topologie de F et telle que $p_k(\epsilon_k) > 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Définissons une suite $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ par récurrence de la manière suivante :

$$\alpha_0 := 1 \quad \text{et, pour tout } k \in \mathbb{N} \ , \quad \alpha_{k+1} := \frac{dist_{p_k}\left(\alpha_k \cdot \epsilon_k, \operatorname{lin}_{j=0,\ldots,k-1} \epsilon_j\right)}{3 \cdot p_{k+1}\left(\epsilon_{k+1}\right)} \ ,$$

où $\operatorname{lin}_{j=0,\ldots,-1} \epsilon_j = \{0\}$. Mais $p_{k+1}(\alpha_{k+1} \cdot \epsilon_{k+1}) \leqslant \frac{1}{3} \cdot p_k(\alpha_k \cdot \epsilon_k)$, donc $p_{k+l}(\alpha_{k+l} \cdot \epsilon_{k+l}) \leqslant \frac{1}{3^l} \cdot p_k(\alpha_k \cdot \epsilon_k)$; la série $\sum_{l=0}^{\infty} \alpha_l \cdot \epsilon_l$ est donc abolument convergente, puisque

$$\sum_{l=k}^{\infty} p_k(\alpha_l \cdot \epsilon_l) \leqslant \sum_{l=k}^{\infty} p_l(\alpha_l \cdot \epsilon_l) \leqslant \sum_{l=k}^{\infty} \frac{1}{3^l} \cdot p_k(\alpha_k \cdot \epsilon_k) < \infty \ .$$

Elle est donc convergente et, pour tout $(c_j)_{j=0,\ldots,N} \subset \mathbb{K}$, on a

$$p_{N+1}\left(\sum_{l=0}^{\infty} \alpha_l \cdot \epsilon_l - \sum_{l=0}^{N} c_l \cdot \epsilon_l\right) \geqslant$$

$$\geqslant p_{N+1}\left(\alpha_{N+1} \cdot \epsilon_{N+1} - \left(\sum_{l=0}^{N} c_l \cdot \epsilon_l - \sum_{l=0}^{N} \alpha_l \cdot \epsilon_l\right)\right) - \sum_{l=N+2}^{\infty} p_{N+1}(\alpha_l \cdot \epsilon_l) \geqslant$$

$$\geqslant dist_{p_{N+1}}\left(\alpha_{N+1} \cdot \epsilon_{N+1}, \operatorname{lin}_{j=0,\ldots,N} \epsilon_j\right) - \sum_{l=N+2}^{\infty} \frac{1}{3^{l-N-2}} \cdot p_{N+2}(\alpha_{N+2} \cdot \epsilon_{N+2}) \geqslant$$

$$\geqslant dist_{p_{N+1}}\left(\alpha_{N+1} \cdot \epsilon_{N+1}, \operatorname{lin}_{j=0,\ldots,N} \epsilon_j\right) - \sum_{l=N+2}^{\infty} \frac{1}{3^{l-N-1}} \cdot dist_{p_{N+1}}\left(\alpha_{N+1} \cdot \epsilon_{N+1}, \operatorname{lin}_{j=0,\ldots,N} \epsilon_j\right) =$$

$$= dist_{p_{N+1}}\left(\alpha_{N+1} \cdot \epsilon_{N+1}, \operatorname{lin}_{j=0,\ldots,N} \epsilon_j\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3 \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right)}\right) =$$

$$= \frac{dist_{p_{N+1}}\left(\alpha_{N+1} \cdot \epsilon_{N+1}, \operatorname{lin}_{j=0,\ldots,N} \epsilon_j\right)}{2} > 0 \ .$$

Ceci montre que $\sum_{l=0}^{\infty} \alpha_l \cdot \epsilon_l \notin \operatorname{lin}_{j=0,\ldots,N} \epsilon_j$, quel que soit $N \in \mathbb{N}$, ce qui est absurde puisque $(\epsilon_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une base algébrique de F . □

REMARQUE 2 Dvoretzky et Rogers [8] ont montré que dans un espace de Banach de dimension infinie, pour toute suite sommable $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+^*$, il existe une suite $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sommable telle que $\|\varphi_k\|^2 = \alpha_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

En appliquant ce résultat à $\alpha_k := \frac{1}{k \cdot \ln^2 k}$ pour $k \geqslant 2$, pour tout $p \in [1, 2[$, on a

$$\sum_{k=2}^{\infty} \|\varphi_k\|^2 = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \cdot \ln^2 k} < \infty \ ,$$

puisque la fonction décroissante $x \longmapsto \frac{1}{x \cdot \ln^2 x} : [2, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ est intégrable :

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \cdot \ln^2 x} = \left[-\frac{1}{\ln x}\right]_2^{\infty} = \ln 2$$

(cf. cours d'Analyse [17], Corollaire 9.17). D'autre part

$$\sum_{k=2}^{\infty} \|\varphi_k\|^p = \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{1}{k \cdot \ln^2 k}\right)^{\frac{p}{2}} \geqslant \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k^{1-\frac{p}{2}}}{\ln^p k} \cdot \frac{1}{k} = \infty \ ,$$

car

$$\lim_k \frac{k^{1-\frac{p}{2}}}{\ln^p k} = \lim_{u\to\infty} \frac{e^{\left(1-\frac{p}{2}\right)\cdot u}}{u^k} = \infty \ ,$$

puisque $1 - \frac{p}{2} > 0$. Voir aussi Bourbaki [3], §1, Exercice 14, EVT V.62, ainsi que les exercices 3, p.59, 12 et 13, p. 62 qui précèdent.

Plus généralement, on peut montrer que toute suite sommable est absolument sommable dans un espace de Fréchet si, et seulement si, il est nucléaire. En outre tout espace de Banach nucléaire est de dimension finie.

2.12 Le théorème de Baire

Dans le paragraphe suivant nous aurons besoin d'un corollaire au résultat suivant :

THEOREME *Soit X un espace métrique complet. Alors l'intersection d'une suite d'ouverts denses est dense.*

Si $(U_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est la suite d'ouverts denses, il nous suffit de montrer que, pour tout $x \in X$ et tout $\varepsilon > 0$, on a

$$B(x,\varepsilon) \cap \left(\bigcap_{k\in\mathbb{N}} U_k\right) \neq \emptyset \ .$$

Posons $x_0 := x$ et $\varepsilon_0 := \min(\varepsilon, 1)$. Comme $D(x_0,\varepsilon_0) \cap U_0$ est un ouvert non-vide, il existe $x_1 \in X$ et $\varepsilon_1 > 0$ tels que l'on ait $\varepsilon_1 \leqslant \frac{1}{2}$ et

$$B(x_1,\varepsilon_1) \subset D(x_0,\varepsilon_0) \cap U_0 \ .$$

On construit de cette manière, par récurrence, une suite décroissante $(B(x_k,\varepsilon_k))_{k\in\mathbb{N}}$ de boule fermées telles que

$$0 < \varepsilon_k \leqslant \frac{1}{2^k} \quad \text{et} \quad B(x_{k+1},\varepsilon_{k+1}) \subset D(x_k,\varepsilon_k) \cap U_k \ .$$

La suite $(x_l)_{l\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy, car pour $k < l$, on a

$$d(x_k,x_l) \leqslant \sum_{j=k}^{l-1} d(x_j,x_{j+1}) \leqslant \sum_{j=k}^{l-1} \frac{1}{2^j} \ .$$

Comme $x_l \in B(x_k,\varepsilon_k)$ pour tout $l \geqslant k$, il vient

$$\lim\nolimits_l x_l \in \bigcap_{k\in\mathbb{N}^*} B(x_k,\varepsilon_k) \subset \bigcap_{k\in\mathbb{N}} D(x_k,\varepsilon_k) \cap U_k \subset \bigcap_{k\in\mathbb{N}} B(x,\varepsilon) \cap U_k = B(x,\varepsilon) \cap \left(\bigcap_{k\in\mathbb{N}} U_k\right) \ ,$$

ce qu'il fallait démontrer. □

APPLICATION Le théorème de Baire permet souvent de prouver l'existence de beaucoup d'éléments d'un espace métrique complet n'ayant pas une certaine propriété.

Pour cela il suffit que l'ensemble E des éléments ayant cette propriété soit contenu dans une réunion dénombrable

$$E \subset \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k$$

telle que chaque A_k soit fermé et sans point intérieur, i.e. $\overset{\circ}{A}_k = \emptyset$. Son complémentaire $\complement E$ est alors dense, donc contient beaucoup d'éléments !

En effet

$$\complement E \supset \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \complement A_k$$

et chaque $\complement A_k$ est un ouvert dense de X , puisque

$$\overline{\complement A_k} = \complement A_k^{\circ} = \complement \emptyset = X \ . \qquad \square$$

EXERCICE 1 L'ensemble des fonctions continues sur $[0,1]$ qui sont nulle part dérivables est dense dans $\mathcal{C}([0,1])$.

Il suffit de considérer les ensembles

$$A_k := \left\{ f \in \mathcal{C}([0,1]) \;\middle|\; \exists t \in [0,1] \text{ tel que } \sup\nolimits_{s\in[0,1]\smallsetminus\{t\}} \left| \frac{f(s) - f(t)}{s-t} \right| \leqslant k \right\} \ .$$

COROLLAIRE *Soit X un espace métrique complet.*

(i) Si $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite d'ensembles fermés telle que $X = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k$, alors il existe un $k \in \mathbb{N}$ tel que A_k soit d'intérieur non-vide.

(ii) Si $f : X \longrightarrow [-\infty, \infty[$ est une fonction s.c.i., alors il existe un ouvert non-vide U tel que

$$\sup\nolimits_{x\in U} f(x) < \infty \ .$$

Démonstration de (i) Si chaque A_k est d'intérieur vide, alors $\complement A_k$ est un ouvert dense, donc

$$\bigcap_{k\in\mathbb{N}} \complement A_k = \complement \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k = \complement X = \emptyset$$

est dense, ce qui est évidemment absurde.

Démonstration de (ii) Il suffit, pour $k \in \mathbb{N}$, de poser $A_k := \{f \leqslant k\}$, qui est un ensemble fermé puisque f est s.c.i. ; on a $X = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k$, car f ne prend pas la valeur ∞ . Il suffit de poser $U := (A_k)^{\circ}$ pour le k tel que $(A_k)^{\circ} \neq \emptyset$. $\square$

2.13 Espaces tonnelés

DEFINITION Nous dirons qu'un espace localement convexe F est *tonnelé* s'il est séparé et si toute semi-norme semi-continue inférieurement (s.c.i.) sur F est continue.

THEOREME *Tout espace de Fréchet est tonnelé.*

Soit donc q une semi-norme s.c.i. sur F . Par le corollaire 2.12.ii, il existe $\varphi \in F$ et une semi-norme continue p sur F telle que $B_p(\varphi, 1) \subset \{q \leqslant k\}$ pour un certain $k \in \mathbb{N}$. Pour tout $\psi \in B_p(0, 1)$, il vient alors $\varphi, \varphi - \psi \in B_p(\varphi, 1)$, donc

$$q(\psi) \leqslant q(\psi - \varphi) + q(\varphi) \leqslant 2k ,$$

d'où le résultat par le corollaire 2.2.iii. □

PROPOSITION *Si F est un espace localement convexe séparé, final par rapport aux applications linéaires $T_j : F_j \longrightarrow F$, et si chaque F_j est tonnelé, alors F est tonnelé.*

Les applications linéaires T_j étant continues par définition, si q est une semi-norme s.c.i. sur F , alors $q \circ T_j$ en est une sur F_j , puisque pour tout $\gamma \in \mathbb{R}$, on a

$$\{q \circ T_j > \gamma\} = T_j^{-1}(\{q > \gamma\}) .$$

Comme F_j est tonnelé, chaque $q \circ T_j$ est continue, donc q est continue par définition. □

EXEMPLE 1 Les espaces de Banach, l'espace $\mathcal{E}(X)$ et l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ sont tonnelés (cf. exemples 2.11.a à 2.11.d).

EXEMPLE 2 Si X est un espace localement compact, alors $\mathcal{K}(X)$ est tonnelé (cf. exemple 2.10.2).

EXEMPLE 3 Si X est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, alors $\mathcal{D}(X)$ est tonnelé (cf. exemple 2.10.3).

EXEMPLE 4 Si F est un espace vectoriel, alors F_{fine} est tonnelé (cf. exemple 2.10.4).

Nous utiliserons essentiellement la propriété d'être tonnelé de la manière suivante :

SCOLIE *Si F est un espace tonnelé et si $\mathcal{Q}$ est une famille de semi-normes s.c.i. telles que*

$$p(\varphi) := \sup_{q \in \mathcal{Q}} q(\varphi) < \infty \quad \textit{pour tout } \varphi \in F ,$$

alors p est une semi-norme continue sur F .

C'est immédiat, l'enveloppe supérieure d'une famille de fonctions s.c.i. étant s.c.i. et celle de semi-normes étant une semi-norme, pour autant qu'elle soit finie. □

2.14 Produit tensoriel topologique inductif

Notre but est d'introduire le formalisme des vecteurs *bra* et *ket* de Dirac. Nous aurons besoin d'une part de la notion de semi-dualité, traîtée en 3.4, et d'autre part de celle de produit tensoriel. C'est la solution d'un problème *universel* pour les applications bilinéaires. Pour nos besoins il est préférable de considérer les applications sesquilinéaires.

THEOREME *Soient F, G, H des espaces vectoriels. Il existe un espace vectoriel, que nous noterons $|F\rangle\langle G|$, et une application sesquilinéaire à droite*

$$\bowtie\ : (\varphi, \gamma) \longmapsto |\varphi\rangle\langle\gamma| : F \times G \longrightarrow |F\rangle\langle G|$$

tels que toute application sesquilinéaire à droite, respectivement à gauche, $\mathfrak{s}$ de $F \times G$ dans H se factorise univoquement en une application linéaire, respectivement semi-linéaire, $\widetilde{\mathfrak{s}}$ de $|F\rangle\langle G|$ dans H :

$$\begin{tikzcd} F \times G \arrow[r, "\mathfrak{s}"] \arrow[d, "\bowtie"'] & H \\ |F\rangle\langle G| \arrow[ur, "\widetilde{\mathfrak{s}}"'] & \end{tikzcd}$$

i.e. telle que

$$\mathfrak{s}(\varphi, \gamma) = \widetilde{\mathfrak{s}}(|\varphi\rangle\langle\gamma|) \quad \textit{pour tout } \varphi \in F \textit{ et } \gamma \in G \ .$$

L'espace vectoriel $|F\rangle\langle G|$ et l'application sesquilinéaire à droite $\bowtie$ sont uniques à isomorphisme près.

L'unicité est immédiate, car si E et $\mathfrak{e}$ sont aussi solution de ce problème universel, on a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} & F \times G \arrow[dl, "\bowtie"'] \arrow[d, "\mathfrak{e}"] \arrow[dr, "\bowtie"] & \\ |F\rangle\langle G| \arrow[r, "\widetilde{\mathfrak{e}}"] & E \arrow[r, "\widetilde{\bowtie}"] & |F\rangle\langle G| \end{tikzcd} ,$$

donc $\widetilde{\bowtie} \circ \widetilde{\mathfrak{e}} = \mathrm{Id}_{F \bowtie G}$ par l'unicité de la factorisation. On prouve de même que $\widetilde{\mathfrak{e}} \circ \widetilde{\bowtie} = \mathrm{Id}_E$.

Pour l'existence, on considère l'espace vectoriel $\mathbb{K}^{(F\times G)}$ formé des famille $(c_{\varphi,\gamma})_{(\varphi,\gamma)\in F\times G}$ à support fini et sa base canonique $\left(1_{\{(\varphi,\gamma)\}}\right)_{(\varphi,\gamma)\in F\times G}$ (cf. exemple 2.10.4). Désignons par N le sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{(F\times G)}$ engendré par les éléments de la forme

$$1_{\{(\varphi_1+\varphi_2,\gamma)\}} - 1_{\{(\varphi_1,\gamma)\}} - 1_{\{(\varphi_2,\gamma)\}} \ ,$$

$$1_{\{(\varphi,\gamma_1+\gamma_2)\}} - 1_{\{(\varphi,\gamma_1)\}} - 1_{\{(\varphi,\gamma_2)\}} \ ,$$

$$1_{\{(\alpha\cdot\varphi,\gamma)\}} - \alpha \cdot 1_{\{(\varphi,\gamma)\}}$$

et

$$1_{\{(\varphi,\alpha\cdot\gamma)\}} - \bar{\alpha} \cdot 1_{\{(\varphi,\gamma)\}}$$

pour $\varphi, \varphi_1, \varphi_2 \in F$, $\gamma, \gamma_1, \gamma_2 \in G$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. On pose

$$|F\rangle \langle G| := \mathbb{K}^{(F\times G)} \big/ N$$

et

$$\bowtie \ : (\varphi, \gamma) \longmapsto e_{\varphi,\gamma} \longmapsto |\varphi\rangle \langle\gamma| := e_{\varphi,\gamma} + N : F \times G \longrightarrow \mathbb{K}^{(F\times G)} \longrightarrow |F\rangle \langle G| \ .$$

Il est clair que $\bowtie$ est sesquilinéaire à droite, puisque

$$|\varphi_1 + \varphi_2\rangle \langle\gamma| := 1_{\{(\varphi_1+\varphi_2,\gamma)\}} + N = 1_{\{(\varphi_1,\gamma)\}} + 1_{\{(\varphi_2,\gamma)\}} + N = |\varphi_1\rangle \langle\gamma| + |\varphi_2\rangle \langle\gamma| \ ,$$

$$|\varphi\rangle \langle\gamma_1 + \gamma_2| = 1_{\{(\varphi,\gamma_1+\gamma_2)\}} + N = 1_{\{(\varphi,\gamma_1)\}} + 1_{\{(\varphi,\gamma_2)\}} + N = |\varphi\rangle \langle\gamma_1| + |\varphi\rangle \langle\gamma_2| \ ,$$

$$|\alpha \cdot \varphi\rangle \langle\gamma| := 1_{\{(\alpha\cdot\varphi,\gamma)\}} + N = \alpha \cdot 1_{\{(\varphi,\gamma)\}} + N = \alpha \cdot |\varphi\rangle \langle\gamma|$$

et

$$|\varphi\rangle \langle\alpha \cdot \gamma| := 1_{\{(\varphi,\alpha\cdot\gamma)\}} + N = \bar{\alpha} \cdot 1_{\{(\varphi,\gamma)\}} + N = \bar{\alpha} \cdot |\varphi\rangle \langle\gamma| \ .$$

Si $\mathfrak{s} : F \times G \longrightarrow H$ est une application sesquilinéaire à droite, respectivement à gauche, alors

$$S : \mathbb{K}^{(F\times G)} \longrightarrow H : (c_{\varphi,\gamma})_{(\varphi,\gamma)\in F\times G} = \sum_{(\varphi,\gamma)\in F\times G} c_{\varphi,\gamma} \cdot 1_{\{(\varphi,\gamma)\}} \longmapsto \sum_{(\varphi,\gamma)\in F\times G} c_{\varphi,\gamma} \cdot \mathfrak{s}(\varphi, \gamma)$$

est l'unique application linéaire, respectivement semi-linéaire, valant $\mathfrak{s}(\varphi, \gamma)$ sur l'élément de base $1_{\{(\varphi,\gamma)\}}$. La sesquilinéarité de $\mathfrak{s}$ montre que S s'annule sur N , donc qu'elle se factorise en une unique application linéaire, respectivement semi-linéaire, $\widetilde{\mathfrak{s}} : |F\rangle \langle G| \longrightarrow H$ telle que

$$\widetilde{\mathfrak{s}}(|\varphi\rangle \langle\gamma|) = Se_{\varphi,\gamma} = \mathfrak{s}(\varphi, \gamma) \ . \quad \square$$

DEFINITION 1 On dit que $|F\rangle \langle G|$ est le *produit tensoriel (semi-linéaire à droite)* de F et G et que $\bowtie \ : F \times G \longrightarrow |F\rangle \langle G|$ est l' *application canonique* . Un élément de $|F\rangle \langle G|$ s'appelle *tenseur* , et il est dit *élémentaire* s'il est de la forme $|\varphi\rangle \langle\gamma|$.

Si F, G sont des espaces localement convexes, on dit que $|F\rangle \langle G|$, munit de la topologie localement convexe finale par rapport aux applications linéaires

$$\varphi \longmapsto |\varphi\rangle \langle\gamma| : F \longrightarrow |F\rangle \langle G| \quad \text{pour } \gamma \in G$$

et aux applications semi-linéaires

$$\gamma \longmapsto |\varphi\rangle \langle\gamma| : G \longrightarrow |F\rangle \langle G| \quad \text{pour } \varphi \in F \ ,$$

est le *produit tensoriel (topologique) inductif* de F et G . On le note $|F\rangle_i \langle G|$.

REMARQUE On peut considérer le problème universel analogue pour les applications bilinéaires et les applications sesquilinéaires (à gauche). Les solutions sont notées respectivement

$$\otimes : F \times G \longrightarrow F \otimes G : (\varphi, \gamma) \longmapsto \varphi \otimes \gamma$$

et

$$\lhd\!\rhd \ : F \times G \longrightarrow \langle F| \cdot |G\rangle : (\varphi, \gamma) \longmapsto \langle\varphi| \cdot |\gamma\rangle \ .$$

Comme ci-dessus on définit $F \otimes_i G$ et $\langle F| \cdot_i |G\rangle$.

LEMME *Tout tenseur $t \in |F\rangle\langle G|$ s'écrit, de plusieurs manières, comme combinaison linéaire (finie) de tenseurs élémentaires*

$$t = \sum_{j=1}^{n} |\varphi_j\rangle\langle\gamma_j| \ ,$$

où $(\varphi_j)_{j=1,\ldots,n} \subset F$ et $(\gamma_j)_{j=1,\ldots,n} \subset G$. On peut supposer que $(\gamma_j)_{j=1,\ldots,n}$ est libre. Dans ce cas $(\varphi_j)_{j=1,\ldots,n}$ est univoquement déterminée.

En effet, en choisissant une base algébrique $(\epsilon_l)_{l=1,\ldots,m}$ de $\sum_{j=1}^{n} \mathbb{K}\cdot\gamma_j$, on peut écrire

$$\gamma_j = \sum_{l=1}^{m} c_{j,l}\cdot\epsilon_l \ ,$$

donc

$$t = \sum_{j=1}^{n} |\varphi_j\rangle \left\langle \sum_{l=1}^{m} c_{j,l}\cdot\epsilon_l \right| = \sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{m} \overline{c_{j,l}}\cdot|\varphi_j\rangle\langle\epsilon_l| = \sum_{l=1}^{m} \left| \sum_{j=1}^{n} \overline{c_{j,l}}\cdot\varphi_j \right\rangle \langle\epsilon_l| \ .$$

Pour l'unicité il nous suffit de montrer que l'application linéaire

$$\Phi : F^m \longrightarrow \Big|F\Big\rangle \left\langle \sum_{l=1}^{m} \mathbb{K}\cdot\epsilon_l \right| : (\varphi_l)_{l=1,\ldots,m} \longmapsto \sum_{l=1}^{m} |\varphi_l\rangle\langle\epsilon_l|$$

est injective. Remarquons que le calcul ci-dessus montre qu'elle est surjective. Considérons l'application

$$\mathfrak{s} : F \times \sum_{l=1}^{m} \mathbb{K}\cdot\epsilon_l \longrightarrow F^m : \left(\varphi, \sum_{l=1}^{m} c_l\cdot\epsilon_l\right) \longmapsto (\overline{c_l}\cdot\varphi)_{l=1,\ldots,m} \ ;$$

elle est sesquilinéaire à droite, donc se factorise en une application linéaire

$$\widetilde{\mathfrak{s}} : \Big|F\Big\rangle \left\langle \sum_{l=1}^{m} \mathbb{K}\cdot\epsilon_l \right| \longrightarrow F^m \ ,$$

et on a

$$\widetilde{\mathfrak{s}}\circ\Phi\left((\varphi_l)_{l=1,\ldots,m}\right) = \widetilde{\mathfrak{s}}\left(\sum_{l=1}^{m} |\varphi_l\rangle\langle\epsilon_l|\right) = \sum_{l=1}^{m} \widetilde{\mathfrak{s}}\left(|\varphi_l\rangle\langle\epsilon_l|\right) = \sum_{l=1}^{m} \mathfrak{s}\left(\varphi_l, \epsilon_l\right) = (\varphi_l)_{l=1,\ldots,m} \ .$$

Ceci prouve que $\widetilde{\mathfrak{s}}\circ\Phi = \mathrm{Id}_{F^m}$, et par suite notre assertion. □

PROPOSITION

(i) ***Propriété universelle du produit tensoriel inductif*** *L'application canonique $\bowtie : F \times G \longrightarrow |F\rangle_i\langle G|$ est séparément continue et, pour qu'une application sesquilinéaire à droite $\mathfrak{s}$ de $F \times G$ dans un espace localement convexe H soit séparément continue, il faut et il suffit que l'application linéaire $\widetilde{\mathfrak{s}} : |F\rangle_i\langle G| \longrightarrow H$ soit continue.*

(ii) Soient $\widetilde{F}$ et $\widetilde{G}$ des espaces localement convexes et $S : F \longrightarrow \widetilde{F}$, $T : G \longrightarrow \widetilde{G}$ des applications linéaires. Il existe une unique application linéaire

$$|S\rangle\langle T| : |F\rangle\langle G| \longrightarrow \Big|\widetilde{F}\Big\rangle\Big\langle\widetilde{G}\Big|$$

telle que

$$|S\rangle\langle T|\Big(|\varphi\rangle\langle\gamma|\Big) = |S\varphi\rangle\langle T\gamma| \quad \textit{pour tout } \varphi \in F \textit{ et } \gamma \in G\ .$$

Si S et T sont injectives, respectivement continues, il en est de même de $|S\rangle\langle T|$.

Démonstration de (i) C'est immédiat par la proposition 2.10.

Démonstration de (ii) L'application

$$\widetilde{\bowtie} \circ (S,T) : F \times G \longrightarrow \widetilde{F} \times \widetilde{G} \longrightarrow \left|\widetilde{F}\right\rangle\left\langle\widetilde{G}\right|\ .$$

est sesquilinéaire à droite, donc définit une application linéaire $|S\rangle\langle T|$ ayant la propriété citée.

L'injectivité découle immédiatement du lemme. En effet si $t \in |F\rangle\langle G|$, on peut supposer par le lemme que $t = \sum_{j=1}^{n} |\varphi_j\rangle\langle\gamma_j|$ et que $(\gamma_j)_{j=1,\ldots,n}$ est libre, et de $|S\rangle\langle T|(t) = 0$ on tire

$$\sum_{j=1}^{n} |S\varphi_j\rangle\langle T\gamma_j| = 0\,;$$

mais puisque T est injective, la suite $(T\gamma_j)_{j=1,\ldots,n}$ est libre, donc $S\varphi_j = 0$ pour tout $j = 1,\ldots,n$ par le lemme. On en déduit que chaque $\varphi_j = 0$ par l'injectivité de S , donc que $t = 0$.

Quant à la continuité il suffit d'appliquer (i), puisque $\bowtie \circ (S,T)$ est séparément continue. □

EXEMPLE 1 Grâce aux propriétés universelles, il existe un isomorphisme semi-linéaire respectivement linéaire canonique de $|F\rangle_i\langle G|$ sur $\langle F|\cdot_i|G\rangle$ respectivement de $|F\rangle_i\langle G|$ sur $\langle F|\cdot_i|G\rangle$ tels que

$$|\varphi\rangle\langle\gamma| \longmapsto \langle\varphi|\cdot|\gamma\rangle \quad \text{, resp.} \quad |\varphi\rangle\langle\gamma| \longmapsto \langle\gamma|\cdot|\varphi\rangle\ .$$

En outre l'espace localement convexe $|F\rangle_i\langle F|$ (ou $\langle F|\cdot_i|F\rangle$) possède une involution naturelle continue

$$|\varphi\rangle\langle\gamma| \longmapsto |\gamma\rangle\langle\varphi| : |F\rangle_i\langle F| \longrightarrow |F\rangle_i\langle F|\ .$$

EXEMPLE 2 Soient X et Y des ensembles. L'application

$$\mathfrak{s} : \mathbb{K}^X \times \mathbb{K}^Y \longrightarrow \mathbb{K}^{X\times Y} : (\varphi,\gamma) \longmapsto \varphi\circ \mathrm{pr}_1 \cdot \overline{\gamma\circ\mathrm{pr}_2}$$

est évidemment sesquilinéaire à droite et séparément continue. Il existe donc une application linéaire continue $\widetilde{\mathfrak{s}} : \left|\mathbb{K}^X\right\rangle_i\left\langle\mathbb{K}^Y\right| \longrightarrow \mathbb{K}^{X\times Y}$ telle que

$$\widetilde{\mathfrak{s}}(|\varphi\rangle\langle\gamma|) : (x,y) \longmapsto \varphi(x)\cdot\overline{\gamma(y)} : X \times Y \longrightarrow \mathbb{K}\ .$$

Elle est injective.

En effet pour tout $t \in \left|\mathbb{K}^X\right\rangle\left\langle\mathbb{K}^Y\right|$ tel que $\widetilde{\mathfrak{s}}(t) = 0$, on peut supposer que $t = \sum_{j=1}^{n} |\varphi_j\rangle\langle\gamma_j|$ et que $(\gamma_j)_{j=1,\ldots,n}$ est libre dans $\mathbb{K}^Y$ par le lemme ci-dessus. Pour tout $x \in X$, on a alors

$$0 = \widetilde{\mathfrak{s}}(t)(x,\cdot) = \sum_{j=1}^{n} \varphi_j(x)\cdot\overline{\gamma_j}\ ,$$

donc $\sum_{j=1}^{n} \overline{\varphi_j(x)}\cdot\gamma_j = 0$ et par suite $\varphi_j(x) = 0$ pour tout $j = 1,\ldots,n$. Les φ_j sont donc tous nuls, ce qui montre que $t = 0$. □

Ceci nous permet d'identifier $\left|\mathbb{K}^X\right\rangle\left\langle\mathbb{K}^Y\right|$ à un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{X\times Y}$ et justifie la définition

$$|\varphi\rangle\langle\gamma| := \varphi\circ\mathrm{pr}_1\cdot\overline{\gamma\circ\mathrm{pr}_2} : (x,y)\longmapsto\varphi(x)\cdot\overline{\gamma(y)}\ .$$

On dit que les fonctions dans $\left|\mathbb{K}^X\right\rangle\left\langle\mathbb{K}^Y\right|$ sont à *variables séparées* .

EXEMPLE 3 Les espaces localement convexes $\left|\mathbb{K}^{(X)}\right\rangle_i\left\langle\mathbb{K}^{(Y)}\right|$ et $\mathbb{K}^{(X\times Y)}$ sont canoniquement isomorphes.

Grâce au corollaire et en restreignant l'injection canonique de l'exemple précédent, on obtient évidemment une application linéaire continue injective

$$\left|\mathbb{K}^{(X)}\right\rangle_i\left\langle\mathbb{K}^{(Y)}\right|\longrightarrow\mathbb{K}^{(X\times Y)}$$

et, pour tout $f\in\mathbb{K}^{(X\times Y)}$, on a

$$f=\sum_{(x,y)\in X\times Y}f(x,y)\cdot 1_{\{(x,y)\}}=\sum_{(x,y)\in X\times Y}f(x,y)\cdot\left|1_{\{x\}}\right\rangle\left\langle 1_{\{y\}}\right|\ ,$$

ce qui montre qu'elle est bijective. Puisque $\mathbb{K}^{(X\times Y)}$ est muni de la topologie localement convexe la plus fine (cf. exemple 2.10.4), l'application réciproque $\mathbb{K}^{(X\times Y)}\longrightarrow\left|\mathbb{K}^{(X)}\right\rangle_i\left\langle\mathbb{K}^{(Y)}\right|$ est aussi continue.

Comme cas particulier on obtient immédiatement

$$|\mathbb{K}^n\rangle\langle\mathbb{K}^m| = \mathbb{K}^{n\cdot m}\ ,$$

puisque $\mathbb{K}^n=\mathbb{K}^{(\{0,\ldots,n-1\})}$.

EXEMPLE 4 Si X,Y sont des espaces localement compacts, on montre comme précédemment que

$$|\mathcal{K}(X)\rangle_i\langle\mathcal{K}(Y)|\hookrightarrow\mathcal{K}(X\times Y)$$

est injective et continue.

A l'aide du théorème de Stone-Weierstraß on voit facilement que $|\mathcal{K}(X)\rangle_i\langle\mathcal{K}(Y)|$ est dense dans $\mathcal{K}(X\times Y)$, mais sa topologie n'est pas en général celle induite par $\mathcal{K}(X\times Y)$.

EXEMPLE 5 Si X,Y sont des ouverts de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$ respectivement, on montre comme précédemment que

$$|\mathcal{D}(X)\rangle_i\langle\mathcal{D}(Y)|\hookrightarrow\mathcal{D}(X\times Y)$$

est continue et d'image dense. On peut montrer que c'est un isomorphisme.

EXEMPLE 6 Soient μ et ν des intégrales de Radon sur X et Y respectivement. Alors $|\mathbf{M}(\mu)\rangle\langle\mathbf{M}(\nu)|$ s'identifie canoniquement à une partie de $\mathbf{M}(\mu\otimes\nu)$ grâce au prolongement linéaire de

$$|f\rangle\langle g|\longmapsto f\otimes\overline{g} : |\mathbf{M}(\mu)\rangle\langle\mathbf{M}(\nu)|\longrightarrow\mathbf{M}(\mu\otimes\nu)\ .$$

.

En effet l'application

$$\mathfrak{s}:\mathbf{M}(\mu)\times\mathbf{M}(\nu)\longrightarrow\mathbf{M}(\mu\otimes\nu):(f,g)\longmapsto\text{"}\,(x,y)\longmapsto f(x)\cdot\overline{g(y)}\text{"}$$

est sesquilinéaire à droite, donc induit une application linéaire

$$\widetilde{\mathfrak{s}} : |\mathbf{M}(\mu)\rangle\langle\mathbf{M}(\nu)| \longrightarrow \mathbf{M}(\mu\otimes\nu) \ .$$

Elle est injective, car si l'image de $t = \sum_{j=1}^n |f_j\rangle\langle g_j|$ dans $\mathbf{M}(\mu\otimes\nu)$ est 0 , i.e. $\sum_{j=1}^n f_j(x)\cdot\overline{g_j(y)} = 0$ $\mu\otimes\nu$-p.p. , il nous suffit de montrer que chaque $f_j = 0$ μ-p.p. . Nous pouvons supposer que $(g_j)_{j=1,\ldots,n}$ est libre dans $\mathbf{M}(\nu)$ par le lemme. Par le théorème de Tonelli, pour μ-presque tous les $x\in X$, on a $\sum_{j=1}^n f_j(x)\cdot\overline{g_j(y)} = 0$ dans $\mathbf{M}(\nu)$, donc $f_j(x) = 0$ pour tous j . □

La notation

$$|f\rangle\langle g|(x,y) := f(x)\cdot\overline{g(y)}$$

ne prête donc pas à confusion. C'est celle que nous avons déjà utilisée dans le cours d'Analyse [17], définition 16.3.

PROBLEME Est-ce que $|\mathbf{M}^\bullet(\mu)\rangle\langle\mathbf{M}^\bullet(\nu)| \longrightarrow \mathbf{M}^\bullet(\mu\otimes\nu)$ est injective ? Pour les problèmes que l'on rencontre avec le théorème de Tonelli dans le cadre de la théorie de l'intégration essentielle voir l'exercice 16.3.3 du cours d'Analyse [17].

COROLLAIRE *Si F et G sont séparés, respectivement tonnelés, il en est de même de $|F\rangle_i\langle G|$.*

Pour démontrer que $|F\rangle_i\langle G|$ est séparé nous avons besoin du théorème de Hahn-Banach 3.6. Ce théorème montre que l'application linéaire continue

$$F \longrightarrow \mathbb{K}^{F^\dagger} : \varphi \longmapsto \langle\cdot|\varphi\rangle_{F^\dagger}$$

est injective. La proposition (ii) et l'exemple 2 ci-dessus nous fournissent une application linéaire continue injective

$$|F\rangle_i\langle G| \longrightarrow \left|\mathbb{K}^{F^\dagger}\right\rangle_i\left\langle\mathbb{K}^{G^\dagger}\right| \hookrightarrow \mathbb{K}^{F^\dagger\times G^\dagger} : |\varphi\rangle\langle\psi| \longmapsto \langle\cdot|\varphi\rangle_{F^\dagger}\cdot\langle\psi|\cdot\rangle_G$$

(cf. 2.4 pour les notations). Mais comme la topologie de la convergence simple est séparée, le résultat en découle par la proposition 2.5.

La seconde partie est alors une conséquence de la proposition 2.13. □

DEFINITION 2 Si F, G sont des espaces localement convexes, on dit que $|F\rangle\langle G|$, muni de la topologie localement convexe finale par rapport à l'application

$$(\varphi,\gamma) \longmapsto |\varphi\rangle\langle\gamma| : F\times G \longrightarrow |F\rangle\langle G|$$

est le *produit tensoriel (topologique) projectif* de F et G . On le note $|F\rangle_\pi\langle G|$.

Pour le produit tensoriel projectif on a des résultats analogues à ceux du produit tensoriel inductif.

2.15 Produit tensoriel d'espaces de Hilbert

PROPOSITION *Soient F et G des espaces préhilbertiens de produit scalaire $(\cdot|\cdot)_F$ et $(\cdot|\cdot)_G$ respectivement. Il existe un unique produit scalaire $(\cdot|\cdot)_{|F)(G|}$ sur $|F)(G|$ tel que*

$$\Big(|\varphi)(\gamma| \Big| |\psi)(\theta| \Big)_{|F)(G|} := (\varphi|\psi)_F \cdot (\theta|\gamma)_G$$

pour tout $\varphi, \psi \in F$ et $\gamma, \theta \in G$.

L'application

$$\mathfrak{b}_{\varphi,\gamma} : F \times G \longrightarrow \mathbb{K} : (\psi, \theta) \longmapsto (\varphi|\psi)_F \cdot (\theta|\gamma)_G$$

est sesquilinéaire à droite en (ψ, θ) , donc induit par la propriété universelle du produit tensoriel une unique forme linéaire

$$\widetilde{\mathfrak{b}_{\varphi,\gamma}} : |F)(G| \longrightarrow \mathbb{K} : |\psi)(\theta| \longmapsto (\varphi|\psi)_F \cdot (\theta|\gamma)_G \ .$$

On vérifie facilement que l'application

$$\mathfrak{s} : F \times G \longrightarrow \Big(|F)(G| \Big)^* : (\varphi, \gamma) \longmapsto \widetilde{\mathfrak{b}_{\varphi,\gamma}}$$

est semi-linéaire à gauche, donc définit une unique application semi-linéaire

$$\widetilde{\mathfrak{s}} : |F)(G| \longrightarrow (F \otimes G)^* : |\varphi)(\gamma| \longmapsto \widetilde{\mathfrak{b}_{\varphi,\gamma}} \ .$$

Par construction

$$(\cdot|\cdot)_{|F)(G|} : \Big(|F)(G| \Big) \times \Big(|F)(G| \Big) \longrightarrow \mathbb{K} : (s, t) \longmapsto (s|t)_{|F)(G|} := \widetilde{\mathfrak{s}}(s)(t)$$

est l'unique forme sesquilinéaire telle que

$$\Big(|\varphi)(\gamma| \Big| |\psi)(\theta| \Big)_{|F)(G|} = (\varphi|\psi)_F \cdot (\theta|\gamma)_G \ .$$

Elle est hermitienne, car

$$\overline{\Big(|\varphi)(\gamma| \Big| |\psi)(\theta| \Big)_{|F)(G|}} = \overline{(\varphi|\psi)_F \cdot (\theta|\gamma)_G} = (\psi|\varphi)_F \cdot (\gamma|\theta)_G = \Big(|\psi)(\theta| \Big| |\varphi)(\gamma| \Big)_{F \otimes G} \ ,$$

d'où le résultat par sesquilinéarité. Montrons qu'elle est positive non-dégénérée. Etant donné $t = \sum_{j=1}^n |\varphi_j)(\gamma_j| \in |F)(G|$, en choisissant une base hilbertienne de l'espace de Hilbert de dimension finie engendré par $(\gamma_j)_{j=1,\ldots,n}$, on peut supposer (cf. lemme 2.14), que $(\gamma_j)_{j=1,\ldots,n}$ est un système orthonormé. On a alors

$$\|t\|_{|F)(G|}^2 = (t|t)_{|F)(G|} = \sum_{k,l=1}^n \Big(|\varphi_k)(\gamma_k| \Big| |\varphi_l)(\gamma_l| \Big)_{|F)(G|} =$$

$$= \sum_{k,l=1}^n (\varphi_k|\varphi_l)_F \cdot (\gamma_l|\gamma_k)_G = \sum_{k=1}^n \|\varphi_k\|_F^2 \geqslant 0 \ ,$$

puisque $(\gamma_l|\gamma_k)_G = \delta_{k,l}$. Si $\|t\|_{|F)(G|} = 0$, il vient $\|\varphi_k\|_F^2 = 0$, donc $\varphi_k = 0$ pour tout k et par suite $t = 0$. $\square$

DEFINITION Muni de ce produit scalaire on dit que $|F)(G|$ est le *produit tensoriel (semi-linéaire à droite)* des espaces préhilbertien F et G et on le note $|F)_2(G|$. Nous désignerons par $|F)\widehat{_2}(G|$ l'espace de Hilbert complété de $|F)_2(G|$ (cf. 3.8).

On définit de même le produit tensoriel $F \otimes G$ des espaces préhilbertien F et G par

$$(\varphi \otimes \gamma | \psi \otimes \theta)_{F\otimes G} := (\varphi | \psi)_F \cdot (\gamma | \theta)_G$$

pour tout $\varphi, \psi \in F$ et $\gamma, \theta \in G$.

THEOREME *Soient $\mathcal{H}$ et $\mathcal{G}$ des espaces de Hilbert. Si $(\varepsilon_k)_{k\in K}$ et $(\epsilon_l)_{l\in L}$ sont des bases hilbertiennes de $\mathcal{H}$ et $\mathcal{G}$ respectivement, alors $\Big(|\varepsilon_k)(\epsilon_l|\Big)_{(k,l)\in K\times L}$ est une base hilbertienne de $|\mathcal{H})\widehat{_2}(\mathcal{G}|$.*

En effet c'est un système orthonormé

$$\Big(|\varepsilon_k)(\epsilon_l|\,\Big|\,|\varepsilon_m)(\epsilon_n|\Big)_{|\mathcal{H})\widehat{2}(\mathcal{G}|} = (\varepsilon_k|\varepsilon_m)_{\mathcal{H}} \cdot (\epsilon_n|\epsilon_l)_{\mathcal{G}} = \delta_{k,m}\cdot\delta_{l,n} = \delta_{(k,l),(m,n)} \ ,$$

et puisque

$$\Big\||\xi)(\gamma|\Big\|^2_{|\mathcal{H})\widehat{2}(\mathcal{G}|} = \|\xi\|^2_{\mathcal{H}} \cdot \|\gamma\|^2_{\mathcal{G}} = \left(\sum_{k\in K} |(\varepsilon_k|\xi)|^2\right)\cdot\left(\sum_{l\in L} |(\epsilon_l|\gamma)|^2\right) =$$

$$= \sum_{(k,l)\in K\times L} |(\varepsilon_k|\xi)|^2 \cdot |(\epsilon_l|\gamma)|^2 = \sum_{(k,l)\in K\times L} \left|\Big(|\varepsilon_k)(\epsilon_l|\,\Big|\,\xi\otimes\gamma\Big)_{|\mathcal{H})\widehat{2}(\mathcal{G}|}\right|^2 \ ,$$

le théorème 1.10 montre que $\xi \otimes \gamma \in \overline{\mathrm{lin}}\Big(|\varepsilon_k)(\epsilon_l|\Big)_{(k,l)\in K\times L}$, donc que $\Big(|\varepsilon_k)(\epsilon_l|\Big)_{(k,l)\in K\times L}$ est totale dans $|\mathcal{H})\widehat{_2}(\mathcal{G}| = \overline{|\mathcal{H})(\mathcal{G}|}$. □

EXEMPLE Soient μ et ν des intégrales de Radon sur X et Y respectivement. Alors l'espace de Hilbert $|\mathbf{L}^2(\mu))\widehat{_2}(\mathbf{L}^2(\nu)|$ s'identifie canoniquement à $\mathbf{L}^2(\mu\otimes\nu)$ grâce au prolongement continu de

$$|\xi)(\gamma| \longmapsto \xi\otimes\overline{\gamma} : \big|\mathbf{L}^2(\mu)\big)\big(\mathbf{L}^2(\nu)\big| \longrightarrow \mathbf{L}^2(\mu\otimes\nu) \ .$$

D'après l'exemple 2.14.6 l'application $|\xi)(\gamma| \longmapsto \xi\otimes\overline{\gamma}$ est injective et si $t = \sum_{j=1}^n |\xi_j)(\gamma_j| \in |\mathbf{L}^2(\mu))(\mathbf{L}^2(\nu)|$, on a

$$\|t\|^2_{|\mathbf{L}^2(\mu))(\mathbf{L}^2(\nu)|} = \sum_{k,l=1}^n \Big(|\xi_k)(\gamma_k|\,\Big|\,|\xi_l)(\gamma_l|\Big)_{|\mathbf{L}^2(\mu))(\mathbf{L}^2(\nu)|} =$$

$$= \sum_{k,l=1}^n (\xi_k|\xi_l)_{\mathbf{L}^2(\mu)} \cdot (\gamma_l|\gamma_k)_{\mathbf{L}^2(\nu)} = \sum_{k,l=1}^n \left(\int \overline{\xi_k}\cdot\xi_l\,d\mu\right)\cdot\left(\int \overline{\gamma_l}\cdot\gamma_k\,d\nu\right) =$$

$$= \sum_{k,l=1}^n \int \overline{\xi_k\otimes\overline{\gamma_k}}\cdot\xi_l\otimes\overline{\gamma_l}\,d\mu\otimes\nu = \left\|\sum_{j=1}^n \xi_j\otimes\overline{\gamma_j}\right\|^2_{\mathbf{L}^2(\mu\otimes\nu)} \ ,$$

ce qui prouve que c'est une isométrie. Il nous reste donc à prouver que $|\mathbf{L}^2(\mu))(\mathbf{L}^2(\nu)|$ est dense dans $\mathbf{L}^2(\mu\otimes\nu)$. Mais pour tout $f \in \mathbf{L}^2(\mu\otimes\nu)$ tel que $f \perp |\mathbf{L}^2(\mu))(\mathbf{L}^2(\nu)|$, et tout

$\xi \in \mathbf{L}^2(\mu)$, $\gamma \in \mathbf{L}^2(\nu)$, le théorème de Fubini montre que $\overline{\xi(x)} \cdot \gamma \cdot f(x, \cdot) \in \mathbf{L}^1(\nu)$ pour μ-presque tous les $x \in X$, que $\overline{\xi} \cdot \left(\int \gamma(y) \cdot f(\cdot, y)\, d\nu(y)\right) \in \mathbf{L}^1(\mu)$ et que

$$\int \overline{\xi(x)} \cdot \left(\int \gamma(y) \cdot f(x, y)\, d\nu(y)\right) d\mu(x) = 0 \ .$$

Puisque $\mathbf{L}^2(\mu)$ et $\mathbf{L}^2(\nu)$ sont des espaces test (cf. corollaire 1.16), on obtient tout d'abord que $\int \gamma(y) \cdot f(\cdot, y)\, d\nu(y) = 0$ localement μ-p.p., puis pour localement μ-presque tous les $x \in X$ que $f(x, \cdot) = 0$ localement ν-p.p. Mais comme f est $\mu \otimes \nu$-mesurable et $\mu \otimes \nu$-modérée, on en déduit que $f = 0$ $\mu \otimes \nu$-p.p. On peut donc conclure à l'aide du corollaire 1.4. $\square$