Fachbereich Mathematik und Informatik
Philipps-Universität Marburg

GRUNDLAGEN

FÜR DIE

FUNKTIONALANALYSIS

Claude Portenier

Wintersemester 2000/2001

Fassung vom 6. Februar 2001

INHALTSVERZEICHNIS

Kapitel 1

GRUNDLAGEN DER TOPOLOGIE

Es werden die wichtigsten topologischen Begriffe, die in der Vorlesung gebraucht werden, zusammengestellt. Manche Beweise aus Analysis, Kapitel 10, kann man fast wortwörtlich übernehmen.

Offene und abgeschlossene Mengen

DEFINITION Sei X eine Menge. Eine Teilmenge $\mathfrak{T}$ der Potenzmenge $\mathfrak{P}(X)$ von X heißt eine *Topologie* auf X , falls gilt :

(T1) Ist $\mathfrak{F}$ eine Familie von Mengen aus $\mathfrak{T}$, so ist $\bigcup_{O \in \mathfrak{F}} O \in \mathfrak{T}$.

(T2) Ist $\mathfrak{E}$ eine endliche Familie von Mengen aus $\mathfrak{T}$, so ist $\bigcap_{O \in \mathfrak{E}} O \in \mathfrak{T}$.

$(X, \mathfrak{T})$ heißt dann *topologischer Raum* . Eine Menge $O \subset X$ heißt *offen* , falls $O \in \mathfrak{T}$ ist. Eine Menge $A \subset X$ heißt *abgeschlossen* , falls $\complement A := X \smallsetminus A$ offen ist. Statt $(X, \mathfrak{T})$ schreibt man häufig nur X .

BEISPIEL Seien X ein metrischer Raum mit Metrik d und für $x \in X$, $\varepsilon > 0$

$$B_\varepsilon(x) := \{y \in X \mid d(x, y) \leqslant \varepsilon\} \quad \text{und} \quad D_\varepsilon(x) := \{y \in X \mid d(x, y) < \varepsilon\} \ .$$

Durch

$$\mathfrak{T} := \{O \subset X \mid \forall x \in O \ \exists \varepsilon > 0 \text{ mit } B_\varepsilon(x) \subset O\}$$

ist eine Topologie auf X definiert (siehe Satz 10.12). In diesem Sinne ist jedem metrischen Raum ein topologischer Raum zugeordnet.

DEFINITION Ein topologischer Raum heißt *metrisierbar* , wenn seine Topologie durch eine Metrik definiert werden kann.

BEISPIEL Sei X ein topologischer Raum und Y eine Teilmenge von X . Durch

$$\mathfrak{T}_Y := \{O \cap Y \mid O \in \mathfrak{T}\}$$

ist eine Topologie auf Y definiert, die sogenannte *induzierte Topologie* .

Ist X ein metrischer Raum, so ist $\mathfrak{T}_Y$ gleich der Topologie, die von der auf Y induzierten Metrik erzeugt wird (siehe Aufgabe 10.12).

DEFINITION Für $A \subset X$ definiert man A° , das *Innere* von A , durch

$$A^\circ := \bigcup_{O \text{ offen}, \subset A} O .$$

Ein Element $x \in A$ heißt *innerer Punkt* von A , falls eine offene Menge O existiert mit $x \in O \subset A$. Ist x ein innerer Punkt von A , so nennt man A eine *Umgebung* von x . Durch

$$\overline{A} := \bigcap_{F \text{ abgeschlossen}, \supset A} F$$

ist der *Abschluß* von A definiert.

Die Menge A° ist die größte offene Menge, die in A enthalten ist. Die Menge der inneren Punkte von A ist gerade A° . Die Menge $\overline{A}$ ist die kleinste abgeschlossene Menge, die A enthält.

BEISPIEL Seien X ein metrischer Raum, $x \in X$ und $\varepsilon > 0$. Die Mengen $B_\varepsilon(x)$ und $D_\varepsilon(x)$ sind eine abgeschlossene bzw. eine offene Umgebung von x . Sie werden *abgeschlossene* bzw. *offene Kugel* mit *Zentrum* x und *Radius* ε genannt. Es gilt

$$\overline{D_\varepsilon(x)} \subset B_\varepsilon(x) \quad \text{und} \quad D_\varepsilon(x) \subset B_\varepsilon(x)^\circ .$$

Diese Inklusionen sind i.a. echt.

SATZ *Für Teilmengen A, B eines topologischen Raumes X gilt :*

(i) A *offen* $\Longleftrightarrow$ $A^\circ = A$

(ii) A *abgeschlossen* $\Longleftrightarrow$ $\overline{A} = A$

(iii) $A^\circ \cap B^\circ = (A \cap B)^\circ$

(iv) $\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cup B}$

(v) $A^\circ \cup B^\circ \subset (A \cup B)^\circ$

(vi) $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$

(vii) $X \setminus A^\circ = \overline{X \setminus A}$

(viii) $X \setminus \overline{A} = (X \setminus A)^\circ$

Siehe die Aufgaben in 10.16 (französische Fassung).

Stetigkeit

DEFINITION Seien X, Y topologische Räume. Eine Funktion $f : X \longrightarrow Y$ heißt *stetig* in $x \in X$, falls zu jeder offenen Menge O in Y mit $f(x) \in O$ eine offene Menge U in X mit $x \in U$ und $f(U) \subset O$ existiert.

Die Funktion f heißt *stetig* , falls f stetig in jedem $x \in X$ ist.

HAUPTSATZ *Seine X, Y topologische Räume. Für eine Funktion $f : X \longrightarrow Y$ sind folgende Aussagen äquivalent :*

(i) f *ist stetig.*

(ii) $f^{-1}(O)$ *ist offen für alle offenen Mengen* O *in* Y .

(iii) $f^{-1}(F)$ *ist abgeschlossen für alle abgeschlossenen Mengen* F *in* Y .

(iv) $f\left(\overline{A}\right) \subset \overline{f(A)}$ *für alle Mengen* $A \subset X$.

Siehe Satz 10.16. Nur die Äquivalenz mit Aussage (iv) wurde nicht bewiesen.

(iii) $\Rightarrow$ (iv) Ist $A \subset X$, so ist $f^{-1}\left(\overline{f(A)}\right)$ abgeschlossen und $f^{-1}\left(\overline{f(A)}\right) \supset f^{-1}(f(A)) \supset A$. Daraus folgt $f^{-1}\left(\overline{f(A)}\right) \supset \overline{A}$ und somit $f\left(\overline{A}\right) \subset f\left(f^{-1}\left(\overline{f(A)}\right)\right) \subset \overline{f(A)}$.

(iv) $\Rightarrow$ (iii) Sei F in Y abgeschlossen. Für $A := f^{-1}(F)$ gilt dann $f\left(\overline{A}\right) \subset \overline{f(A)} \subset \overline{F} = F$ und somit $\overline{A} \subset f^{-1}(F) = A \subset \overline{A}$, d.h. $A = \overline{A}$ oder $f^{-1}(F)$ ist abgeschlossen. □

BEISPIEL Sei X ein topologischer Raum und Y eine Teilmenge von X , versehen mit der induzierten Topologie. Dann ist die kanonische Injektion $Y \hookrightarrow X$ stetig.

SATZ *Sind die Funktionen $f : X \longrightarrow Y$ und $g : Y \longrightarrow Z$ stetig, so ist die Funktion*

$$h = g \circ f : X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$$

stetig.

Dieser Satz wurde nicht topologisch bewiesen (siehe Hauptsatz 7.3). Der Beweis ist aber ganz einfach.

Konvergenz

DEFINITION Eine Folge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in X heißt *konvergent* gegen $x \in X$, wenn zu jeder offenen Menge U mit $x \in U$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so daß gilt

$$x_k \in U \quad \text{für alle } k \geqslant N \ .$$

BEISPIEL Sei X ein metrischer Raum. Eine Folge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in X konvergiert genau dann bezüglich der kanonischen Topologie gegen $x \in X$, wenn sie bezüglich der Metrik gegen x konvergiert.

SATZ *Seien X, Y topologische Räume. Es gilt :*

(i) *Ist eine Funktion $f : X \longrightarrow Y$ stetig in $x \in X$ und eine Folge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ gegen x konvergent, so konvergiert die Folge $(f(x_k))_{k \in \mathbb{N}}$ gegen $f(x)$.*

(ii) Sei $A \subset X$ und $x \in X$. Existiert eine Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset A$, die gegen x konvergiert, so ist $x \in \overline{A}$.

Wir erinnern daran, daß die Umkehrungen obiger Aussagen im folgenden Fall richtig sind :

HAUPTSATZ *Seien X, Y topologische Räume und X metrisierbar.*

(i) Sei $x \in X$. Eine Funktion $f : X \longrightarrow Y$ ist genau dann stetig in x , falls für jede gegen x konvergente Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ die Folge $(f(x_k))_{k\in\mathbb{N}}$ gegen $f(x)$ konvergiert.

(ii) Für $A \subset X$ und $x \in X$ ist genau dann $x \in \overline{A}$, falls eine Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset A$ existiert, die gegen x konvergiert.

BEMERKUNG In allgemeinen topologischen Räumen läßt sich Stetigkeit und Abschluß nicht durch Folgen charakterisieren. Man braucht dafür die “verallgemeinerten Folgen” : die Netze oder die Filter.

Hausdorffräume

DEFINITION Ein topologischer Raum X heißt *Hausdorffraum* , wenn für alle $x, y \in X$ mit $x \neq y$ offene Mengen O, U mit $x \in O$, $y \in U$ und $O \cap U = \emptyset$ existieren.

Insbesondere ist in einem Hausdorffraum jede einpunktige Menge abgeschlossen.

BEISPIEL Jeder metrische Raum ist ein Hausdorffraum.

DEFINITION Eine Menge A in einem topologischen Raum X heißt *dicht* , wenn $\overline{A} = X$.

HAUPTSATZ *Seien X, Y Hausdorffräume und A eine dichte Menge in X .*

(i) Sind $f, g : X \longrightarrow Y$ stetige Abbildungen mit $f_{|A} = g_{|A}$, so ist $f = g$.

(ii) Ist $f : X \longrightarrow Y$ stetig mit dichtem Bild, so ist $f(A)$ dicht in Y .

Beweis von (i). Man beweist, daß die Menge $\{f = g\}$ abgeschlossen ist und A enthält.

Beweis von (ii). Nach Hauptsatz 2 gilt

$$\overline{f(A)} \supset f\left(\overline{A}\right) = f(X) \ ,$$

also

$$\overline{f(A)} \supset \overline{f(X)} = Y \ . \quad \square$$

Kompakte Räume

DEFINITION Sei X ein Hausdorffraum. Eine Menge $K \subset X$ heißt *kompakt* , wenn jede offene Überdeckung von K eine endliche Teilüberdeckung besitzt. Ist X kompakt, so heißt X ein *kompakter Raum* .

BEISPIEL Ist X ein metrischer Raum, so ist $K \subset X$ genau dann kompakt, falls jede Folge in K eine konvergente Teilfolge besitzt (siehe Hauptsatz 10.17).

HAUPTSATZ *Seien X, Y Hausdorffräume.*

(i) *Ist $f : X \longrightarrow Y$ stetig und $K \subset X$ kompakt, so ist $f(K)$ kompakt.*

(ii) *Ist $K \subset X$ kompakt, so ist K abgeschlossen.*

(iii) *Ist $A \subset K \subset X$, A abgeschlossen und K kompakt, so ist A kompakt.*

Beweis von (i). Hauptsatz 10.19.

Beweis von (ii). Der Beweis von Korollar 10.17 geht über Folgen. Sei $x \in X \setminus K$. Da X ein Hausdorffraum ist, existieren für jedes $y \in K$ offene Umgebungen U_y von y und V_y von x mit $U_y \cap V_y = \emptyset$. Weil $(U_y)_{y \in K}$ eine offene Überdeckung von K ist, gibt es eine endliche Teilmenge $E \subset K$, so daß $(U_y)_{y \in E}$ noch eine Überdeckung von K ist. Dann ist $V := \bigcap_{y \in E} V_y$ eine Umgebung von x , die $\bigcup_{y \in E} U_y$, also auch K nicht trifft. Dies zeigt, daß $X \setminus K$ offen ist.

Beweis von (iii). Da $X \setminus A$ offen ist, ist genau dann $\mathcal{U}$ eine offene Überdeckung von A , wenn $\mathcal{U} \cup \{X \setminus A\}$ eine offene Überdeckung von K ist. $\square$

KOROLLAR *Genau dann ist eine Teilmenge $K \subset X$ kompakt, wenn K bzgl. der induzierten Topologie ein kompakter Raum ist.*

Siehe Aufgabe 10.17.4 (französische Fassung).

Kapitel 2

GRUNDLAGEN DER INTEGRATIONSTHEORIE

Sei X ein topologischer Hausdorffraum.

Hier werden die wichtigsten Definitionen und Sätze aus Analysis, Kapitel 14 bis 17 zusammengefaßt.

N.u.h. Funktionen

DEFINITION Eine Funktion $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ heißt *nach unten halbstetig* (n.u.h.) auf X , falls für alle $\gamma \in \mathbb{R}$ die Menge $\{f > \gamma\}$ offen ist.

Wir bezeichnen mit $\mathcal{SK}(X)$ die Menge aller n.u.h. Funktionen

$$s : X \longrightarrow \widetilde{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\infty\} \ ,$$

für die eine kompakte Teilmenge $K \subset X$ mit

$$s \geqslant 0 \quad \text{außerhalb von } K$$

existiert.

Sei $\mathcal{K}(X)$ die Menge aller reellen, stetigen Funktionen φ auf X , für die eine kompakte Teilmenge $K \subset X$ mit

$$\varphi = 0 \quad \text{außerhalb von } K$$

existiert.

X heißt *lokal kompakt* , wenn jeder Punkt in X eine kompakte Umgebung besitzt.

Radon-Integrale

DEFINITION Ein lineares Funktional $\mu : \mathcal{SK}(X) \longrightarrow \widetilde{\mathbb{R}}$ heißt *Radon-Integral* auf X , falls es *regulär* ist, d.h. falls für alle $s \in \mathcal{SK}(X)$ gilt

$$\mu(s) = \sup\nolimits_{t \in \mathcal{SK}(X), -t \leqslant s} -\mu(t) \ .$$

Eine Linearform τ auf $\mathcal{K}(X)$ heißt *positiv* , wenn $\tau(\varphi) \geqslant 0$ für alle $\varphi \in \mathcal{K}_+(X)$ gilt.

HAUPTSATZ *Sei X ein topologischer Raum.*

(i) Sind μ ein Radon-Integral auf X und $\mathcal{F}$ eine nicht leere und nach oben gerichtete Familie aus $\mathcal{SK}(X)$, dann gilt die ***Bourbaki-Eigenschaft***

$$\mu(\sup \mathcal{F}) = \sup\nolimits_{s \in \mathcal{F}} \mu(s) \ .$$

(ii) Ist X ein lokal kompakter Raum, dann besitzt jede positive Linearform τ auf $\mathcal{K}(X)$ eine eindeutige Fortsetzung μ auf $\mathcal{SK}(X)$ zu einem Radon-Integral.

BEISPIEL Ist X eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$, so kann man also für $\varphi \in \mathcal{K}(X)$ definieren

$$\int_X \varphi := \int_{a_1}^{b_1} \left(\ldots \left(\int_{a_n}^{b_n} \varphi(x_1, \ldots, x_n) \ dx_n \right) \ldots \right) \ dx_1$$

mit $a_j, b_j \in \mathbb{R}$ für $j = 1, \ldots, n$, so daß

$$\operatorname{supp} \varphi \subset \prod_{j=1}^{n} [a_j, b_j] \ .$$

Dies hängt nicht von der Wahl der a_j, b_j ab.

Man kann zeigen (vgl. Analysis, Hauptsatz 14.7), daß man die Reihenfolge der Integrationen vertauschen kann.

Die Abbildung

$$\tau_X : \mathcal{K}(X) \longrightarrow \mathbb{R} : \varphi \longmapsto \int_X \varphi$$

ist eine positive Linearform.

DEFINITION Man bezeichnet mit λ_X das zugehörige Radon-Integral auf X . Es heißt *Lebesgue-Integral* auf X .

Integrierbarkeit

Im folgenden sei μ stets ein Radon-Integral auf X .

DEFINITION Für jede Funktion $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ definiert man ihr *Oberintegral* durch

$$\int^* f \, d\mu := \inf_{s \in \mathcal{SK}(X), s \geqslant f} \mu(s)$$

und ihr *Unterintegral* durch

$$\int_* f \, d\mu := -\int^* (-f) \, d\mu \ .$$

Es gilt

$$\int_* f \, d\mu \leqslant \int^* f \, d\mu \ .$$

DEFINITION Eine Funktion $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ heißt μ*-integrierbar* , falls

$$-\infty < \int_* f \, d\mu = \int^* f \, d\mu < \infty$$

ist. In diesem Fall nennt man

$$\int f \, d\mu := \int^* f \, d\mu = \int_* f \, d\mu$$

das *Integral* von f bzgl. μ .

Eine Funktion $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ heißt μ*-integrierbar* , falls $\operatorname{Re} f$ und $\operatorname{Im} f$ μ-integrierbar sind. In diesem Fall nennt man

$$\int f \, d\mu := \int \operatorname{Re} f \, d\mu + i \cdot \int \operatorname{Im} f \, d\mu$$

das *Integral* von f bzgl. μ .

SATZ *Sei J ein offenes Intervall in $\mathbb{R}$.*

(i) Seien $[a,b]$ ein kompaktes Intervall in J , f eine beschränkte Funktion auf $[a,b]$ und f_0 ihre Fortsetzung durch 0 außerhalb $[a,b]$. Ist f Riemann-integrierbar, so ist f_0 λ_J-integrierbar, und es gilt

$$\int f_0 \, d\lambda_J = \int_a^b f \ .$$

Insbesondere sind alle Funktion in $\mathcal{C}([a,b])$ und $\mathcal{T}([a,b])$ durch Fortsetzung mit 0 außerhalb von $[a,b]$ bzgl. λ_J integrierbar.

(ii) Sei f eine ***positive*** *, stetige Funktion auf J . Genau dann ist f λ_J-integrierbar, wenn das Integral $\int_{\inf J}^{\sup J} f$ konvergent ist. In diesem Fall gilt*

$$\int f \, d\lambda_J = \int_{\inf J}^{\sup J} f = \sup_{a,b \in J, a<b} \int_a^b f \ .$$

HAUPTSATZ *Sei (f_k) eine wachsende Folge von Funktionen auf X .*

(i) *Ist* $\int^* f_k \, d\mu > -\infty$ *, dann gilt die* ***Daniell-Eigenschaft***

$$\int^* \sup_k f_k \, d\mu = \sup_k \int^* f_k \, d\mu \ .$$

(ii) ***Satz von Beppo Levi*** *Sind alle* f_k *μ-integrierbare Funktionen, so ist* $\sup_k f_k$ *genau dann μ-integrierbar, wenn*

$$\sup_k \int f_k \, d\mu < \infty \quad \text{oder} \quad \int^* \sup_k f_k \, d\mu < \infty \ .$$

In diesem Fall gilt

$$\int \sup_k f_k \, d\mu = \sup_k \int f_k \, d\mu \ .$$

DEFINITION Man bezeichnet mit

$$\mathcal{L}^1(\mu) \quad , \quad \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(\mu) \quad \text{und} \quad \mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\mu)$$

die Menge aller Funktionen

$$f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}} \quad \text{bzw.} \quad \mathbb{R} \quad \text{und} \quad \mathbb{C} \ ,$$

die μ-integrierbar sind.

KOROLLAR $\mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\mu)$ *ist ein involutiver Vektorverband, auf dem* $\int \diamond \, d\mu$ *eine positive Linearform ist. Für alle* $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\mu)$ *gilt*

$$\int \overline{f} \, d\mu = \overline{\int f \, d\mu} \quad \text{und} \quad \left| \int f \ d\mu \right| \leqslant \int |f| \ d\mu \ .$$

Nullmengen

DEFINITION Für alle Teilmengen A von X nennen wir

$$\mu^*(A) := \int^* 1_A \, d\mu$$

das *äußere Maß* von A bzgl. μ .

Eine Menge A heißt *μ-integrierbar* , falls $1_A \in \mathcal{L}^1(\mu)$ ist. Man nennt dann

$$\mu(A) := \int 1_A \, d\mu$$

das *Maß* von A bzgl. μ . Mit $\mathfrak{J}(\mu)$ bezeichnen wir die Menge aller μ-integrierbaren Mengen.

Eine Menge N heißt *μ-Nullmenge* , falls

$$N \in \mathfrak{J}(\mu) \ \text{ und } \mu(N) = 0$$

ist.

KOROLLAR

(i) *Sei* (N_k) *eine Folge von μ-Nullmengen. Ist* $N \subset \bigcup_{k \in \mathbb{N}} N_k$ *, so ist* N *eine μ-Nullmenge.*

(ii) *Sei* $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ *mit* $\int^* f \; d\mu < \infty$. *Dann ist* $\{f = \infty\}$ *eine* μ*-Nullmenge.*
Insbesondere ist $\{f \notin \mathbb{R}\}$ *eine* μ*-Nullmenge, falls* $\int_* f \; d\mu > -\infty$ *und* $\int^* f \; d\mu < \infty$.

DEFINITION Sei P eine Aussage, die von $x \in X$ abhängt. Man sagt "P ist μ*-fast überall* ($\mu - f.ü.$) wahr", falls die Menge der $x \in X$, für die $P(x)$ falsch ist, eine μ-Nullmenge ist.

Satz von Lebesgue

LEMMA (von Fatou) *Sei* $(f_k) \subset \overline{\mathbb{R}}^X$ *eine Folge von Funktionen, die eine* μ*-integrierbare Minorante besitzt. Dann gilt*

$$\int^* \liminf\nolimits_k f_k \, d\mu \leqslant \liminf\nolimits_k \int^* f_k \, d\mu \ .$$

HAUPTSATZ (der dominierten Konvergenz von Lebesgue) *Sei* (f_k) *eine Folge in* $\mathcal{L}^1(\mu)$ *oder in* $\mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\mu)$, *die punktweise* $\mu - f.ü.$ *gegen eine Funktion* f *konvergiert. Gibt es eine* μ*-integrierbare Funktion* g , *so daß für alle* k

$$|f_k| \leqslant g \quad \mu\text{-}f.ü.$$

gilt, so ist f μ*-integrierbar mit*

$$\int f \; d\mu = \lim\nolimits_k \int f_k \, d\mu \ .$$

Absolut konvergente Integrale

SATZ *Seien* J *ein offenes Intervall in* $\mathbb{R}$ *und* f *eine stetige Funktion auf* J . *Genau dann ist* f λ_J*-integrierbar, wenn das Integral* $\int_{\inf J}^{\sup J} |f|$ *konvergent ist. In diesem Fall ist das Integral* $\int_{\inf J}^{\sup J} f$ *konvergent, und es gilt*

$$\int f \; d\lambda_J = \int_{\inf J}^{\sup J} f = \lim\nolimits_{a \to \inf J+, b \to \sup J-} \int_a^b f \ .$$

Abhängigkeit von einem Parameter

HAUPTSATZ (Stetigkeit) *Seien* X, Y *metrische Räume,* ν *ein Radon-Integral auf* Y , $f : X \times Y \longrightarrow \mathbb{C}$ *eine Funktion und* $\xi \in X$. *Es existiere eine Umgebung* U *von* ξ *mit*

(i) $f(x, \cdot) : Y \longrightarrow \mathbb{C}$ *ist* ν*-integrierbar für alle* $x \in U$.

(ii) $f(\cdot, y) : X \longrightarrow \mathbb{C}$ *ist stetig in* ξ *für* ν*-fast alle* $y \in Y$.

(iii) *Es gibt eine* ν*-integrierbare Funktion* $g : Y \longmapsto \overline{\mathbb{R}}_+$, *so daß für alle* $x \in U$ *gilt :*

$$|f(x, \cdot)| \leqslant g \quad \nu\text{-fast überall.}$$

Dann ist die Funktion

$$\int f(\cdot, y) \; d\nu(y) : x \longmapsto \int f(x, \cdot) \; d\nu : U \longrightarrow \mathbb{C}$$

in ξ *stetig.*

HAUPTSATZ (Differenzierbarkeit) *Seien J ein Intervall in $\mathbb{R}$, Y ein metrischer Raum, ν ein Radon-Integral auf Y , $f : J \times Y \longrightarrow \mathbb{C}$ und $\tau \in J$. Es existiere eine Umgebung U von τ mit*

(i) $f(t, \cdot) : Y \longrightarrow \mathbb{C}$ *ist ν-integrierbar für alle $t \in U$.*

(ii) $f(\cdot, y) : J \longrightarrow \mathbb{C}$ *ist differenzierbar mit Ableitung $\partial_1 f(\cdot, y)$ für ν-fast alle $y \in Y$.*

(iii) Es gibt eine ν-integrierbare Funktion $g : Y \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$, so daß

$$\sup_{t \in U} |\partial_1 f(t, \cdot)| \leqslant g \quad \nu\text{-fast überall.}$$

Dann ist $\partial_1 f(t, \cdot)$ ν-integrierbar für alle $t \in U$, und die Funktion

$$\int f(\cdot, y)\, d\nu(y) : t \longmapsto \int f(t, \cdot)\, d\nu : U \longrightarrow \mathbb{C}$$

ist in τ differenzierbar mit Ableitung

$$\partial \left(\int f(\cdot, y)\, d\nu(y) \right)(\tau) = \int \partial_1 f(\tau, \cdot)\, d\nu \ .$$

Meßbarkeit

Meßbare Mengen und Funktionen

DEFINITION Wir bezeichnen mit $\mathfrak{M}(\mu)$ die Menge aller *μ-meßbaren Mengen* ; das sind die Teilmengen M von X , für die

$$M \cap A \in \mathfrak{I}(\mu) \quad \text{für alle } A \in \mathfrak{I}(\mu)$$

gilt.

Eine Funktion $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ heißt *μ-meßbar* , falls

$$\{f > \gamma\} \in \mathfrak{M}(\mu) \quad \text{für alle } \gamma \in \mathbb{R}$$

gilt. Eine Funktion $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ heißt $\mathfrak{M}(\mu)$-meßbar, falls $\operatorname{Re} f$ und $\operatorname{Im} f$ $\mathfrak{M}(\mu)$-meßbar sind. Die Menge aller dieser Funktionen mit Werten in $\overline{\mathbb{R}}$ bzw. $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ wird mit

$$\mathcal{M}(\mu) \quad , \quad \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(\mu) \quad \text{und} \quad \mathcal{M}_{\mathbb{C}}(\mu) \ .$$

bezeichnet.

Sei $\mathfrak{K}(X)$ die Menge aller kompakten Teilmengen von X . Man sagt, daß eine Funktion f *auf jedem Kompaktum μ-integrierbar* ist, wenn für alle $K \in \mathfrak{K}(X)$ gilt $1_K \cdot f \in \mathcal{L}^1(\mu)$.

KOROLLAR *$\mathcal{M}_{\mathbb{C}}(\mu)$ ist eine involutive Verbandsalgebra, d.h. für alle $f, g \in \mathcal{M}_{\mathbb{C}}(\mu)$ und $\alpha \in \mathbb{C}$ gilt*

$$\alpha \cdot f \ , \ f + g \ , \ f \cdot g \ , \ |f| \ , \ \overline{f} \in \mathcal{M}_{\mathbb{C}}(\mu) \ .$$

Ist $f \neq 0$ überall, dann ist $\frac{1}{f} \in \mathcal{M}_{\mathbb{C}}(\mu)$, und für jede Folge $(f_k) \subset \mathcal{M}_{\mathbb{C}}(\mu)$, die punktweise konvergent ist, gilt $\lim_k f_k \in \mathcal{M}_{\mathbb{C}}(\mu)$.

Integrierbarkeitskriterium

HAUPTSATZ *Eine Funktion $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ (oder $\mathbb{C}$) ist genau dann μ-integrierbar, wenn f μ-meßbar ist und*

$$\int^* |f| \, d\mu < \infty \quad \textit{oder} \quad -\infty < \int_* f \, d\mu \leqslant \int^* f \, d\mu < \infty$$

gilt.

Moderate Funktionen

DEFINITION Eine Funktion f heißt *μ-moderat* , falls eine (wachsende) Folge μ-integrierbarer Mengen (A_k) existiert, so daß f außerhalb von $\bigcup A_k$ verschwindet. Eine Teilmenge A von X heißt μ-moderat wenn 1_A μ-moderat ist.

SATZ *Sei f eine Funktion auf X .*

(i) Die folgenden Eigenschaften sind äquivalent :
(a) f ist μ-moderat.
(b) Es gibt eine Folge (G_k) von offenen μ-integrierbaren Mengen, so daß f außerhalb von

$$\bigcup G_k$$

verschwindet.
(c) Es gibt eine Folge $(K_l) \subset \mathfrak{K}(X)$ und eine μ-Nullmenge N , so daß f außerhalb von

$$\left(\bigcup K_l\right) \cup N$$

verschwindet.

(ii) Ist f μ-moderat und $\geqslant 0$, so gilt

$$\int^* f \, d\mu = \sup_{K \in \mathfrak{K}(X)} \int^* 1_K \cdot f \, d\mu \ .$$

(iii) Ist f μ-moderat, μ-meßbar und $\int_* f \, d\mu > -\infty$, so gilt

$$\int_* f \, d\mu = \int^* f \, d\mu \ .$$

(iv) Ist A eine μ-meßbare und μ-moderate Teilmenge von X , so gilt

$$\mu^*(A) = \sup_{K \in \mathfrak{K}(X), K \subset A} \mu(K) \ .$$

L^p-Räume

DEFINITION Sei $p \in [1, \infty]$. Für jede Funktion $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ (oder $\mathbb{C}$), setzt man

$$\|f\|_p := \left(\int^* |f|^p \, d\mu\right)^{1/p} \in \overline{\mathbb{R}}_+ \quad \text{falls } p \in [1, \infty[$$

und

$$\|f\|_\infty := \inf\left\{ M \in \overline{\mathbb{R}}_+ \;\middle|\; |f| \leqslant M \;\; \mu - f.\ddot{u}. \right\} \in \overline{\mathbb{R}}_+ \ .$$

Man bezeichnet mit $\mathcal{L}^p(\mu)$ bzw. $\mathcal{L}^p_{\mathbb{C}}(\mu)$ die Menge aller μ-meßbaren Funktionen f mit Werten in $\overline{\mathbb{R}}$ bzw. $\mathbb{C}$, für die $\|f\|_p < \infty$ gilt. Man sagt, daß f *p-fach μ-integrierbar* bzw. *μ-beschränkt* ist.

SATZ *Seien $p, q \in [1, \infty]$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ und $f, g : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ (oder $\mathbb{C}$) . Dann gilt*

(i)

$$\|\alpha \cdot f\| = |\alpha| \cdot \|f\|_p \quad \text{für alle } \alpha \in \mathbb{R} \text{ (oder } \mathbb{C} \text{).}$$

(ii)

$$\|f\|_p = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad f = 0 \;\; \mu - f.\ddot{u}. \ .$$

(iii)

$$|f| \leqslant |g| \;\; \mu - f.\ddot{u}. \quad \Longrightarrow \quad \|f\|_p \leqslant \|g\|_p \ .$$

(iv)

$$|f| \leqslant \|f\|_\infty \quad \mu - f.\ddot{u}. \ .$$

(v) *Ist $\|f\|_p < \infty$, dann ist f endlich $\mu - f.\ddot{u}.$.*

(vi) ***Hölder-Ungleichung*** *:*

$$\|f \cdot g\|_1 \leqslant \|f\|_p \cdot \|g\|_q \ .$$

(vii) ***Minkowsky-Ungleichung*** *:*

$$\|f +^\bullet g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p \ .$$

(viii) ***Abzählbare Subadditivität*** *: Für jede Folge (f_k) von positiven Funktionen gilt*

$$\left\| \sum f_k \right\|_p \leqslant \sum \|f_k\|_p \ .$$

KOROLLAR *$\mathcal{L}^p_{\mathbb{C}}(\mu)$ ist ein Vektorraum.*

DEFINITION Wir bezeichnen mit $\mathcal{N}(\mu)$ die Menge aller Funktionen $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ mit $f = 0 \;\; \mu - f.\ddot{u}.$ und setzen

$$\mathbf{L}^p_{\mathbb{C}}(\mu) := \mathcal{L}^p_{\mathbb{C}}(\mu) / \mathcal{N}(\mu) \ .$$

HAUPTSATZ (von Riesz-Fischer) *$\mathbf{L}^p_{\mathbb{C}}(\mu)$ ist mit der p-Norm*

$$[f] \longmapsto \|[f]\|_p$$

ein Banachraum. Präziser: Ist $([f_k])$ eine Cauchy-Folge in $\mathbf{L}^p_{\mathbb{C}}(\mu)$, dann existiert eine Teilfolge α von $\mathbb{N}$ und eine Funktion $g \in \mathcal{L}^p(\mu)$, so daß $\left(f_{\alpha(l)}\right)$ gegen eine Funktion $f \in \mathcal{L}^p_{\mathbb{C}}(\mu)$ punktweise $\mu - f.\ddot{u}.$ konvergiert und $\left|f_{\alpha(l)}\right| \leqslant g$ für alle l ist. Es gilt dann

$$[f] = \lim\nolimits_k [f_k] \quad \text{in } \mathbf{L}^p_{\mathbb{C}}(\mu) \ .$$

Dichtheitssatz

HAUPTSATZ *Ist X lokal kompakt und ist $p \in [1, \infty[$, dann ist $\mathcal{K}_{\mathbb{C}}(X)$ dicht in $\mathbf{L}^p_{\mathbb{C}}(\mu)$, d.h. für jedes $f \in \mathbf{L}^p_{\mathbb{C}}(\mu)$ und jedes $\varepsilon > 0$ existiert $\varphi \in \mathcal{K}_{\mathbb{C}}(X)$ mit*

$$\|f - \varphi\|_p \leqslant \varepsilon \ .$$

DEFINITION Seien J ein Intervall in $\mathbb{R}$ und $\varphi : J \longrightarrow \mathbb{C}$. Wir nennen φ eine *Treppenfunktion* , falls ein Intervall $[a, b] \subset J$ existiert, so daß $\operatorname{supp} \varphi \subset [a, b]$ und $\operatorname{Re} \varphi_{|[a,b]}$, $\operatorname{Im} \varphi_{|[a,b]} \in \mathcal{T}([a, b])$ gilt. Wir bezeichnen mit $\mathcal{T}_{\mathbb{C}}(J)$ der Vektorraum dieser Funktionen.

KOROLLAR *Ist J ein Intervall in $\mathbb{R}$, dann ist $\mathcal{T}_{\mathbb{C}}(J)$ dicht in $\mathbf{L}^p_{\mathbb{C}}(\lambda_J)$ für alle $p \in [1, \infty[$.*

Lokal integrierbare und absolut stetige Funktionen

DEFINITION Eine Funktion f auf X mit Werten in $\overline{\mathbb{R}}$ oder $\mathbb{C}$ heißt *lokal μ-integrierbar* , wenn für jedes $x \in X$ eine offene Umgebung V von x existiert, so daß die Funktion $1_V \cdot f$ μ-integrierbar ist. Wir bezeichnen mit $\mathcal{L}^1_{loc}(\mu)$ bzw. $\mathcal{L}^1_{loc,\mathbb{C}}(\mu)$ die Menge aller dieser Funktionen, sowie

$$\mathbf{L}^1_{loc,\mathbb{C}}(\mu) := \mathcal{L}^1_{loc,\mathbb{C}}(\mu) \big/ \mathcal{N}(\mu) \ .$$

SATZ *Eine μ-integrierbare Funktion ist lokal μ-integrierbar. Eine lokal μ-integrierbare Funktion ist auf jedem Kompaktum μ-integrierbar. Die Umkehrung ist richtig, falls X lokal kompakt ist.*

DEFINITION Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ setzt man $1_{a,b} := \left\{ \begin{array}{c} 1_{[a,b]} \\ -1_{[b,a]} \end{array} \right.$ si $\begin{array}{c} a \leqslant b \\ b < a \end{array}$.

LEMMA *Sei J ein Intervall in $\mathbb{R}$.*

(i) Für alle $a, b, c \in J$ gilt

$$1_{a,b} + 1_{b,c} = 1_{a,c} \ .$$

(ii) Eine Funktion f auf J ist genau dann lokal λ_J-integrierbar, wenn für jedes kompakte Intervall $[a, b] \subset J$ die Funktion $1_{[a,b]} \cdot f$ λ_J-integrierbar ist.

In diesem Fall betrachtet man für $\tau \in J$ und $c \in \mathbb{C}$ die Funktion

$$F : J \longrightarrow \mathbb{C} : x \longmapsto c + \int_\tau^x f(t)\, dt = c + \int 1_{\tau,x} \cdot f \, d\lambda_J \ .$$

Dann gilt

(iii) F ist stetig.

(iv) Ist F wachsend, so folgt $f \geqslant 0$ $\lambda_J - f.ü.$. Ist insbesondere $F = 0$, so ist $f = 0$ $\lambda_J - f.ü.$, d.h. f ist durch F eindeutig bestimmt.

(v) Ist f in x stetig, so ist F in x differenzierbar und $F'(x) = f(x)$.

DEFINITION Eine Funktion F obiger Gestalt heißt *(lokal) absolut stetig* . Die Menge dieser Funktionen wird mit $\mathcal{AC}(J)$ bezeichnet.

Wir nennen f die (verallgemeinerte) Ableitung von F ; sie wird mit ∂F bezeichnet.

HAUPTSATZ (Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung) *Seien J ein Intervall in $\mathbb{R}$ und $F : J \longrightarrow \mathbb{C}$ eine lokal lipschitzstetige Funktion, die fast überall differenzierbar ist. Dann ist F' , durch 0 definiert, wo F nicht differenzierbar ist, lokal λ_J-integrierbar, und es gilt*

$$F(y) = F(x) + \int_x^y F'(t)\, dt \quad \text{für alle } x, y \in J \ .$$

Zerlegung eines Radon-Integrals

Im folgenden sind X und Y metrische Räume,
oder allgemeiner topologische Hausdorffräume,
μ und ν sind Radon-Integrale auf X bzw. Y .

DEFINITION Seien μ und ν Radon-Integrale auf X bzw. Y und $(\mu_y)_{y\in Y}$ eine Familie von Radon-Integralen auf X , d.h. eine Abbildung $Y \longrightarrow \mathcal{M}_+(X)$. Wir nennen $(\mu_y)_{y\in Y}$ eine *Zerlegung* von μ bzgl. ν und schreiben

$$\mu = \int \mu_y \, d\nu(y) \ ,$$

wenn

$$\mu(s) = \int^* \mu_y(s)\ d\nu(y)$$

für alle $s \in \mathcal{SK}(X)$ gilt.

BEISPIEL Für jedes Radon-Integral μ auf X gilt

$$\mu = \int \varepsilon_y \, d\mu(y) \ .$$

BEISPIEL Lebesgue-Integrale und Cavalieri-Prinzip.

Seien $X \subset \mathbb{R}^n$ und $Y \subset \mathbb{R}^m$ offene Mengen und λ_X und λ_Y die entspechenden Lebesgue-Integrale. Für jedes $y \in Y$ definiert die positive Linearform

$$\mathcal{K}(X \times Y) \longrightarrow \mathbb{R} : \varphi \longmapsto \lambda_X(\varphi(\cdot, y))$$

ein Radon-Integral $\lambda_{X,y}$ auf $X \times Y$. Es gilt

$$\lambda_{X\times Y} = \int \lambda_{X,y} \, d\lambda_Y(y) \ .$$

Analog gilt

$$\lambda_{X\times Y} = \int \lambda_{x,Y} \, d\lambda_X(x) \ .$$

HAUPTSATZ (Sukzessive Integration) *Sei $\mu = \int \mu_y \, d\nu(y)$ eine Zerlegung von μ .*

(i) *Ist $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ (oder $\mathbb{C}$) μ-integrierbar, dann ist f μ_y-integrierbar für ν-fast alle $y \in Y$. Definiert man $\int f \, d\mu_y$ durch 0 in den y , für die f nicht μ_y-integrierbar ist, so ist die Funktion $\int f \, d\mu_\diamond$ ν-integrierbar, und es gilt*

$$\int f \, d\mu = \int \left(\int f \, d\mu_y \right) d\nu(y) \ .$$

Ist f reell, dann sind die Funktionen $\int_* f \, d\mu_\diamond$ und $\int^* f \, d\mu_\diamond$ ν-integrierbar, und es gilt

$$\int f \, d\mu_\diamond = \int_* f \, d\mu_\diamond = \int^* f \, d\mu_\diamond \quad \nu - f.ü. \ .$$

(ii) *Ist A eine μ-Nullmenge, dann ist A für ν-fast alle $y \in Y$ eine μ_y-Nullmenge.*

Integrabilitätssatz

HAUPTSATZ *Seien $\mu = \int \mu_y \, d\nu(y)$ eine Zerlegung von μ und f eine reelle oder komplexe μ-meßbare und μ-moderate Funktion auf X . Dann gilt*

(i) *f ist μ_y-meßbar für ν-fast alle $y \in Y$. Die Funktion $\int^* |f| \, d\mu_\diamond$ ist ν-meßbar und es gilt*

$$\int^* |f| \, d\mu = \int^* \left(\int^* |f| \, d\mu_y \right) d\nu(y) \ .$$

(ii) *Insbesondere ist f genau dann μ-integrierbar, wenn f μ-meßbar ist und*

$$\int^* \left(\int^* |f| \, d\mu_y \right) d\nu(y) < \infty$$

gilt.

(iii) *Ist A eine μ-meßbare und μ-moderate Teilmenge und ist A eine μ_y-Nullmenge für ν-fast alle $y \in Y$, dann ist A eine μ-Nullmenge.*

Die Sätze von Fubini und Tonelli

Sind μ und ν zwei Radon-Integrale auf X bzw. Y , so kann man zeigen, daß ein Radon-Integral $\mu \otimes \nu$ auf $X \times Y$ derart existiert, daß für alle $s \in \mathcal{SK}(X \times Y)$ gilt

$$\mu \otimes \nu(s) = \int^* \mu(s(\cdot, y)) \, d\nu(y) = \int^* \nu(s(x, \cdot)) \, d\mu(x) \ ,$$

d.h.

$$\mu \otimes \nu = \int \mu_{X,y} \, d\nu(y) = \int \nu_{x,Y} \, d\mu(x) \ .$$

Die Radon-Integrale $\mu_{X,y}$ und $\nu_{x,Y}$ auf $X \times Y$ sind die Bilder (vgl. 16) von μ bzw. ν unter den Abbildungen

$$j_y : x \longmapsto (x, y) : X \longrightarrow X \times Y \quad \text{und} \quad {}_xj : y \longmapsto (x, y) : Y \longrightarrow X \times Y \ ,$$

d.h. für alle $s \in \mathcal{SK}(X \times Y)$ gilt

$$\mu_{X,y}(s) := \mu(s(\cdot, y)) \quad \text{und} \quad \nu_{x,Y}(s) := \nu(s(x, \cdot)) \ .$$

In Beispiel 10.2 haben wir eigentlich gezeigt, falls X und Y offene Mengen in $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{R}^m$, daß

$$\lambda_{X\times Y} = \lambda_X \otimes \lambda_Y$$

gilt.

Der Hauptsatz 10 über sukzessive Integrationen wird der

HAUPTSATZ (von Fubini) *Sei f eine Funktion auf $X \times Y$, die $\mu \otimes \nu$-integrierbar ist.*

Dann sind für ν-fast alle $y \in Y$ bzw. für μ-fast alle $x \in X$ die Funktionen $f(\cdot, y)$ und $f(x, \cdot)$ μ- bzw. ν-integrierbar. Die Funktionen

$$y \longmapsto \int f(\cdot, y)\, d\mu \quad \text{und} \quad x \longmapsto \int f(x, \cdot)\, d\nu$$

— geeignet definiert — sind dann ν- bzw. μ-integrierbar, und es gilt

$$\int f \; d\mu \otimes \nu = \int \left(\int f(x, y)\, d\mu(x) \right) d\nu(y) = \int \left(\int f(x, y)\, d\nu(y) \right) d\mu(x) \ .$$

Der Integrabilitätssatz 11 wird der

HAUPTSATZ (von Tonelli) *Sei f eine $\mu \otimes \nu$-moderate Funktion auf $X \times Y$.*

(i) Ist f $\mu \otimes \nu$-meßbar, so sind für ν-fast alle $y \in Y$ und μ-fast alle $x \in X$ die Funktionen $f(\cdot, y)$ und $f(x, \cdot)$ μ- bzw. ν-meßbar.

Die Funktionen

$$y \longmapsto \int^* |f(\cdot, y)|\, d\mu \quad \text{und} \quad x \longmapsto \int^* |f(x, \cdot)|\, d\nu$$

sind ν- bzw. μ-meßbar, und es gilt

$$\int^* |f| \; d\mu \otimes \nu = \int^* \left(\int^* |f(x, y)|\, d\mu(x) \right) d\nu(y) = \int^* \left(\int^* |f(x, y)|\, d\nu(y) \right) d\mu(x) \ .$$

(ii) Insbesondere ist f genau dann $\mu \otimes \nu$-integrierbar, wenn f $\mu \otimes \nu$-meßbar ist und

$$\int^* \left(\int^* |f(x, y)|\, d\mu(x) \right) d\nu(y) = \int^* \left(\int^* |f(x, y)|\, d\nu(y) \right) d\mu(x) < \infty$$

gilt.

(iii) Ist A eine $\mu \otimes \nu$-meßbare und $\mu \otimes \nu$-moderate Menge und ist $A_y := \{x \in X \mid (x, y) \in A\}$ eine μ-Nullmenge für ν-fast alle $y \in Y$, oder ${}_xA := \{y \in Y \mid (x, y) \in A\}$ ist eine ν-Nullmenge für μ-fast alle $x \in X$, dann ist A eine $\mu \otimes \nu$-Nullmenge.

LEMMA *Ist $N \subset X$ eine μ-Nullmenge und B eine ν-moderate Menge, so ist $N \times B$ eine $\mu \otimes \nu$-Nullmenge.*

DEFINITION Sind f und g reelle oder komplexe Funktionen auf X bzw. Y , so definiert man die Funktion $f \otimes g : X \times Y \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ (oder $\mathbb{C}$) durch

$$f \otimes g(x, y) := f(x) \cdot g(y) \quad \text{für alle } x \in X \text{ und } y \in Y \ .$$

KOROLLAR *Seien f und g reelle oder komplexe Funktionen auf X bzw. Y .*

(i) *Sind f und g μ- bzw. ν-integrierbar, dann ist $f \otimes g$ $\mu \otimes \nu$-integrierbar, und es gilt*

$$\int f \otimes g \; d\mu \otimes \nu = \left(\int f \; d\mu \right) \cdot \left(\int g \; d\nu \right) \; .$$

(ii) *Sind f und g μ- bzw. ν-meßbar, dann ist $f \otimes g$ $\mu \otimes \nu$-meßbar.*

Fall von $\mathbb{R}^n$

DEFINITION Wir bezeichnen mit λ^n das Lebesgue-Integral auf $\mathbb{R}^n$. Es gilt

$$\lambda^n = \bigotimes_{j=1}^{n} \lambda \; ,$$

d.h. λ^n ist das Produkt von n Kopien des Lebesgue-Integrals auf $\mathbb{R}$. Für alle $n, m \in \mathbb{N}^*$ gilt

$$\lambda^{n+m} = \lambda^n \otimes \lambda^m \; .$$

BEISPIEL Die abzählbaren Teilmengen sowie Hyperebenen und Spären in $\mathbb{R}^n$ sind λ^n-Nullmengen.

HAUPTSATZ (Partielle Integration) *Seien J ein Intervall in $\mathbb{R}$, $F, G \in \mathcal{AC}(J)$ und $a, b \in J$. Dann gilt*

$$\int_a^b \partial F \cdot G = F \cdot G|_a^b - \int_a^b F \cdot \partial G \; .$$

Die Transformationsformel

HAUPTSATZ *Seien X , Y offene Mengen in $\mathbb{R}^n$ und $\Phi : Y \longrightarrow X$ ein Diffeomorphismus. Dann gilt*

$$\Phi \left(|\det D\Phi| \cdot \lambda_Y \right) = \lambda_X \; ,$$

d.h.

$$\lambda_X = \int |\det D\Phi(y)| \cdot \varepsilon_{\Phi(y)} \, d\lambda_Y(y) \; .$$

KOROLLAR

(i) *Für jede Funktion $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ist*

$$\int^* f \; d\lambda_X = \int^* f \circ \Phi \cdot |\det D\Phi| \; d\lambda_Y \; .$$

(ii) *Eine reell- oder komplexwertige Funktion f ist genau dann λ_X-integrierbar, wenn die Funktion $f \circ \Phi \cdot |Det \; D\Phi|$ λ_Y-integrierbar ist. In diesem Fall gilt*

$$\int f \; d\lambda_X = \int f \circ \Phi \cdot |\det D\Phi| \; d\lambda_Y \; .$$

(iii) *Eine reell- oder komplexwertige Funktion f auf X ist genau dann λ_X-meßbar, wenn $f \circ \Phi$ λ_Y-meßbar ist.*

(iv) Eine Menge $A \subset X$ ist genau dann eine λ_X-Nullmenge, wenn $\Phi^{-1}(A)$ eine λ_Y-Nullmenge ist.

Affine Transformation

Sei $\Phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ eine affine bijektive Transformation, d.h.

$$\Phi : x \longmapsto Ax + b$$

mit $A \in \mathbb{GL}_n(\mathbb{R})$ und $b \in \mathbb{R}^n$.

Für jede Funktion $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ gilt

$$\int^* f(y)\, dy = |\det A| \cdot \int^* f(Ax+b)\, dx \ .$$

Insbesondere ist das Lebesgue-Integral unter orthogonalen Transformationen und Translationen invariant, d.h.

$$\int^* f(y)\, dy = \int^* f(Ax+b)\, dx \quad \text{, falls} \quad A \in \mathbb{O}_n(\mathbb{R}) \ ,$$

und für alle $r \in \mathbb{R}^*$ gilt

$$\int^* f(y)\, dy = |r|^n \cdot \int^* f(rx)\, dx \ .$$

Parallelotop

Sei $(v_j)_{j=1,\ldots,n}$ eine Folge von Vektoren im $\mathbb{R}^n$. Wir bezeichnen mit

$$P[v_1, \ldots, v_n] := \left\{ x = \sum_{j=1}^n \alpha_j \cdot v_j \ \middle|\ 0 \leqslant \alpha_j \leqslant 1 \text{ für } j = 1, \ldots, n \right\}$$

das Parallelotop mit Seitenvektoren v_j .

Es gilt

$$\lambda^n(P[v_1, \ldots, v_n]) = |\det(v_1, \ldots, v_n)| \ .$$

$|\det D\Phi| \cdot \lambda_Y$ heißt das *Volumenelement* bzgl. der *krummlinigen Koordinaten* , die durch Φ definiert sind.

Polarkoordinaten im $\mathbb{R}^n$.

Die Abbildung

$$\Phi_n : \left]0, \infty\right[\times \left]-\pi, \pi\right[\times \left]-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right[^{n-2} \longrightarrow \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}_- \times \{0\} \times \mathbb{R}^{n-2}$$

$$(\rho, \varphi_2, \ldots, \varphi_n) \longmapsto \begin{pmatrix} \rho \cdot \cos\varphi_n \cdot \cos\varphi_{n-1} \cdot \ldots\ldots\ldots \cdot \cos\varphi_3 \cdot \cos\varphi_2 \\ \rho \cdot \cos\varphi_n \cdot \ldots\ldots\ldots\ldots \cdot \cos\varphi_4 \cdot \cos\varphi_3 \cdot \sin\varphi_2 \\ \rho \cdot \cos\varphi_n \cdot \ldots\ldots\ldots\ldots \cdot \cos\varphi_4 \cdot \sin\varphi_3 \\ \rho \cdot \cos\varphi_n \cdot \ldots\ldots\ldots\ldots \cdot \sin\varphi_4 \\ \vdots \\ \vdots \\ \rho \cdot \sin\varphi_n \end{pmatrix}$$

ist ein Diffeomorphismus mit

$$\det D\Phi_n\left(\rho, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\right) = \rho^{n-1} \cdot \cos^{n-2} \varphi_n \cdot \cos^{n-3} \varphi_{n-1} \cdot \ldots \cdot \cos\ \varphi_3 \ .$$

Zum Beispiel gilt

$$\lambda^n\left(\mathbb{B}^n(r)\right) = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} \cdot r^n \ .$$

Dabei wurde benutzt, daß

$$\underset{]-\pi,\pi[\times\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[^{n-2}}{\int \cdots \int} \cos^{n-2} \varphi_n \cdot \cos^{n-3} \varphi_{n-1} \cdot \ldots \cdot \cos \varphi_3 \, d\left(\varphi_{2,} \ldots, \varphi_n\right) = \frac{2 \cdot \pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \ .$$

Rotationsinvariante Funktionen

Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ (oder $\mathbb{C}$) ist genau dann *rotationsinvariant* (oder invariant unter orthogonale Transformationen), wenn eine Funktion $\widetilde{f} : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ (oder $\mathbb{C}$) mit

$$f(x) = \widetilde{f}(|x|) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n$$

existiert.

Eine rotationsinvariante Funktion $f : x \longmapsto \widetilde{f}(|x|)$ ist genau dann λ^n-integrierbar, wenn die Funktion $r \longmapsto \widetilde{f}(r) \cdot r^{n-1}$ $\lambda_{]0,\infty[}$-integrierbar ist. In diesem Fall gilt

$$\int f \, d\lambda^n = \frac{2 \cdot \pi^{\frac{\pi}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot \int_0^\infty \widetilde{f}(r) \cdot r^{n-1} \, dr \ .$$

Die Funktion $1_{\mathbb{B}^n(1)} \cdot \frac{1}{|\mathrm{id}|^s}$ ist genau dann λ^n-integrierbar, wenn $s < n$. In diesem Fall gilt

$$\int_{\mathbb{B}^n(1)} \frac{1}{|x|^s} dx = \frac{2 \cdot \pi^{\frac{n}{2}}}{(n-s)\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \ .$$

Integration von Punktmassen

Seien $\rho : Y \longrightarrow \mathbb{R}_+$ eine ν-meßbare Funktion und $p : Y \longrightarrow X$ eine *Lusin ν-meßbare* Abbildung, d.h. für jede kompakte Teilmenge L von Y und jedes $\varepsilon > 0$ existiert eine kompakte Teilmenge $L' \subset L$ mit

$$\nu\left(L \setminus L'\right) \leqslant \varepsilon \quad \text{und} \quad p_{|L'} \text{ ist stetig.}$$

Wir betrachten jetzt die wichtigsten Integrale von Punktmassen.

BEISPIEL Bild eines Radon-Integrals.

Sei $\rho = 1$ und man setze voraus, daß ν moderat ist oder p stetig. Das Radon-Integral

$$p(\nu) = \int \varepsilon_{p(y)} \, d\nu(y)$$

auf X heißt das *Bild* von ν unter p .

Die Integrierbarkeitsbedingung bedeutet, daß p Lusin ν-meßbar ist und daß für alle $x \in X$ eine offene Umgebung U von x mit $\nu^*\left(p^{-1}(U)\right) < \infty$ existiert. Man sagt dann, daß p *ν-eigentlich* ist.

BEISPIEL Radon-Integrale mit Dichten.

Sei $X = Y$, $p = \mathrm{id}$ und man setze voraus, daß ν moderat ist oder ρ n.u.h. ist. Man nennt das Radon-Integral

$$\rho \cdot \nu := \int \rho(y) \cdot \varepsilon_y \, d\nu(y)$$

auf Y das *Radon-Integral mit Dichte* ρ bzgl. ν .

Die Integrierbarkeitsbedingung bedeutet, daß $\rho \in \mathcal{L}^1_{loc,\mathbb{R}_+}(\nu)$. Eine Abänderung von ρ auf einer ν-Nullmenge ändert $\rho \cdot \nu$ nicht.

BEISPIEL Induziertes Radon-Integral.

Sei X eine nicht-leere ν-meßbare Teilmenge von Y . Für $x_0 \in X$ ist die Abbildung

$$q : Y \longrightarrow X : y \longmapsto \begin{cases} y & \\ & \text{si} \\ x_0 & \end{cases} \begin{matrix} y \in X \\ \\ y \in Y \smallsetminus X \end{matrix} .$$

Lusin ν-meßbar. Für jede Funktion $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ (oder $\mathbb{C}$) , gilt $f \circ q \cdot 1_X = f_0$, wobei f_0 die Fortsetzung von f mit 0 außerhalb von X ist.

Man sagt, daß das Radon-Integral

$$\nu_X := \int 1_X(y) \cdot \varepsilon_{q(y)} \, d\nu(y)$$

von ν auf X *induziert* ist.

Es ist $\nu_\emptyset := 0$ und für jedes $s \in \mathcal{SK}(X)$ gilt

$$\nu_X(s) = \int^* s_0 \, d\nu .$$

Dieses Radon-Integral hängt vom Punkt x_0 nicht ab !

DEFINITION Man spricht von dem Radon-Integral

$$p(\rho \cdot \nu) = \int \rho(y) \cdot \varepsilon_{p(y)} \, d\nu(y) .$$

als *Integral von Punktmassen* .

HAUPTSATZ (Meßbarkeitssatz) *Sei $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ (oder $\mathbb{C}$) eine $p(\rho \cdot \nu)$-moderate Funktion.*

(i) f ist genau dann $p(\rho \cdot \nu)$-meßbar, wenn $f \circ p \cdot \rho$ ν-meßbar ist. In diesem Fall gilt

$$\int^* |f| \, dp(\rho \cdot \nu) = \int^* |f| \circ p \cdot \rho \, d\nu .$$

(ii) f ist genau dann $p(\rho \cdot \nu)$-integrierbar, wenn $f \circ p \cdot \rho$ ν-integrierbar ist, und es gilt

$$\int f \, dp(\rho \cdot \nu) = \int f \circ p \cdot \rho \, d\nu .$$

(iii) Eine Teilmenge $A \subset X$ ist genau dann eine $p(\rho \cdot \nu)$-Nullmenge, wenn $\rho = 0$ $\nu - f.ü.$ auf $p^{-1}(A)$ gilt.

SATZ *Seien X eine ν-meßbare Teilmenge von Y und $j : X \hookrightarrow Y$ die kanonische Injektion. Dann gilt*

$$j(\nu_X) = 1_X \cdot \nu \ .$$

BEISPIEL Sind I und J Intervalle in $\mathbb{R}$ mit $I \subset J$ und $j : I \hookrightarrow J$ die kanonische Injektion, dann gilt

$$(\lambda_J)_I = \lambda_I \quad \text{und} \quad j(\lambda_I) = 1_I \cdot \lambda_J \ .$$

Haben I und J dieselben Endpunkte, dann ist $j(\lambda_I) = \lambda_J$.

BEISPIEL Seien I ein Intervall in $\mathbb{R}$ und $F : I \longrightarrow \mathbb{R}$ eine lokal absolut stetige Funktion. Seien $a, b \in I$ mit $a < b$ und wir bezeichnen mit $I(F(a), F(b))$ das abgeschlossene Intervall mit Endpunkten $F(a)$ und $F(b)$.

HAUPTSATZ *Sei $f : F([a,b]) \longrightarrow \mathbb{C}$. Ist $f \circ F \cdot \partial F$ $\lambda_{[a,b]}$-integrierbar , dann ist f $\lambda_{I(F(a),F(b))}$-integrierbar, und es gilt*

$$\int_{F(a)}^{F(b)} f(s)\, ds = \int_a^b f \circ F(t) \cdot \partial F(t)\, dt \ .$$

Ist F wachsend, d.h. $\partial F \geqslant 0$, so ist das Bild von $\partial F \cdot \lambda_{[a,b]}$ unter F das Radon-Integral $\lambda_{F([a,b])}$. In diesem Fall ist f genau dann $\lambda_{F([a,b])}$-integrierbar, wenn $f \circ F \cdot \partial F$ $\lambda_{[a,b]}$-integrierbar ist.

Im allgemeinen ist $F([a,b]) \neq I(F(a), F(b))$.

KOROLLAR *Seien I und J Intervalle in $\mathbb{R}$ und $F : I \longrightarrow J$, $G : J \longrightarrow \mathbb{R}$ lokal absolut stetige Funktionen. Ist $\partial G \circ F \cdot \partial F$ lokal λ_I-integrierbar, dann ist $G \circ F$ lokal absolut stetig und es gilt*

$$\partial(G \circ F) = \partial G \circ F \cdot \partial F \ .$$

Die Bedingung ist insbesondere erfüllt falls $\partial G \in \mathbf{L}^{\infty}_{loc}(\lambda_J)$, d.h. G ist lokal lipschitzstetig.

Das Lebesgue-Integral auf einer Untermannigfaltigkeit

Im weiteren bezeichne X eine Untermannigfaltigkeit mit Rand der Dimension m in $\mathbb{R}^n$.

DEFINITION Sei $\gamma : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ eine lokale reguläre Parametrisierung von X . Für $k, l = 1, \ldots, m$ definiert man

$$g^{\gamma}_{k,l} : U \longrightarrow \mathbb{R} : u \longmapsto {}^tD\gamma(u)\, D\gamma(u)\, e_k \bullet e_l = \partial_k \gamma(u) \bullet \partial_l \gamma(u) \ .$$

Die Abbildung

$$G := \left(g^{\gamma}_{k,l}\right) : u \longmapsto {}^tD\gamma(u)\, D\gamma(u) = \left(g^{\gamma}_{k,l}(u)\right) : U \longrightarrow \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(m \times m)$$

heißt *metrischer Tensor* bzgl. der Parametrisierung γ . Man bezeichnet

$$g^{\gamma}(u) := \det {}^tD\gamma(u)\, D\gamma(u) = \det G(u)$$

als *Gramsche Determinante* bzgl. der Parametrisierung γ .

HAUPTSATZ *Es gibt genau ein Radon-Integral λ_X auf X , so daß für jede lokale reguläre Parametrisierung $\gamma : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ von X gilt*

$$\left(\lambda_X\right)_{\gamma(U)} = \gamma\left(\left[g^\gamma\right]^{\frac{1}{2}} \cdot \lambda_U\right) \ .$$

BEMERKUNG Für jede nicht-leere offene Menge O in X gilt $\lambda_X(O) > 0$.

BEMERKUNG Der Rand ∂X ist eine λ_X-Nullmenge.

Das Lebesgue-Integral auf $\mathbb{S}^{n-1}(r)$

Sei $U := \left]0, r\right] \times \left]-\pi, \pi\right[\times \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[^{n-2}$, $U^\partial := \left]-\pi, \pi\right[\times \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[^{n-2}$, $\gamma_n := \Phi_{n|U}$ und $\gamma_n^\partial := \Phi_n(r, \cdot)_{|U^\partial}$. Es gilt

$$\lambda_{\mathbb{S}^{n-1}(r)} = r^{n-1} \cdot \gamma_n^\partial\left(\lambda_{\left]-\pi,\pi\right[} \otimes \bigotimes_{j=3}^{n} \cos^{j-2} \cdot \lambda_{\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[}\right)$$

oder

$$d\lambda_{\mathbb{S}^{n-1}(r)}(x) = r^{n-1} \cdot \cos^{n-2}\varphi_n \cdot \cos^{n-3}\varphi_{n-1} \cdot \ldots \cdot \cos\ \varphi_3 \, d(\varphi_2, \ldots, \varphi_n) \ .$$

Insbesondere ist die Fläche dieser Sphäre gleich

$$r^{n-1} \cdot \int_{\left]-\pi,\pi\right[\times\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[^{n-2}} \cos^{n-2}\varphi_n \cdot \cos^{n-3}\varphi_{n-1} \cdot \ldots \cdot \cos\ \varphi_3 \, d(\varphi_2, \ldots, \varphi_n) = \frac{2 \cdot \pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot r^{n-1} \ .$$

HAUPTSATZ *Es gilt*

$$\lambda^n = \int_0^\infty \lambda_{\mathbb{S}^{n-1}(r)} \, dr \ .$$