

Fachbereich Mathematik und Informatik  
Philipps-Universität Marburg



# ANALYSE FONCTIONNELLE

Claude Portenier

Semestre d'hiver 2003/2004  
et  
semestre d'été 2004



# TABLE DES MATIÈRES

<b>TABLE DES MATIÈRES</b>	<b>iii</b>
<b>INDEX</b>	<b>xi</b>
<b>1 ESPACES DE HILBERT</b>	<b>1</b>
1.1 Formes sesquilinéaires et produits scalaires . . . . .	2
1.2 Espaces préhilbertiens et espaces de Hilbert . . . . .	7
1.3 Formules de polarisation . . . . .	10
1.4 Théorème de la projection . . . . .	12
1.5 Théorème de représentation de Riesz . . . . .	17
1.6 Les théorèmes de Stampacchia et Lax-Milgram . . . . .	20
1.7 Les espaces de Sobolev sur un intervalle . . . . .	23
1.8 Problèmes aux limites sur un intervalle . . . . .	31
1.9 Sommes hilbertiennes . . . . .	35
1.10 Bases hilbertiennes . . . . .	38
1.11 Le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt . . . . .	41
1.12 Polynômes orthogonaux . . . . .	43
1.13 Caractérisation des polynômes classiques orthogonaux . . . . .	47

## TABLE DES MATIÈRES

	Polynômes de Jacobi . . . . .	54
	Polynômes de Laguerre . . . . .	56
	Polynômes d’Hermite . . . . .	58
	Polynômes de Jacobi spéciaux . . . . .	59
1.14	Les équations différentielles associées aux polynômes classiques . . . . .	63
	L’équation différentielle de Jacobi . . . . .	64
	L’équation différentielle de Laguerre . . . . .	66
	L’équation différentielle d’Hermite . . . . .	69
	Les polynômes classiques exceptionnels . . . . .	70
1.15	Les bases hilbertiennes de polynômes classiques . . . . .	75
	Les fonctions génératrices . . . . .	76
1.16	Densité et appartenance à un espace $\mathbf{L}^2$ . . . . .	79
<b>2</b>	<b>ESPACES LOCALEMENT CONVEXES</b>	<b>85</b>
2.1	Semi-normes . . . . .	86
2.2	Espaces polynormés . . . . .	91
2.3	Espaces localement convexes . . . . .	96
2.4	Produit de deux espaces localement convexes . . . . .	100
2.5	Convergence . . . . .	103
2.6	Sommabilité . . . . .	106
2.7	Espaces de dimension finie . . . . .	109
2.8	Espaces quotients et sous-espaces . . . . .	111
2.9	Théorème de Riesz . . . . .	113
2.10	Espaces localement convexes finals . . . . .	114
2.11	Espaces de Fréchet . . . . .	119
2.12	Le théorème de Baire . . . . .	123
2.13	Espaces tonnelés . . . . .	125
2.14	Produit tensoriel topologique inductif . . . . .	126

2.15	Produit tensoriel d'espaces de Hilbert . . . . .	132
<b>3</b>	<b>SEMI-DUALITÉ</b>	<b>135</b>
3.1	Espaces d'applications linéaires . . . . .	136
3.2	Espaces normés d'applications linéaires . . . . .	140
3.3	Opérateurs à noyaux dans $\mathcal{C}^b$ . . . . .	142
3.4	Dualité et semi-dualité . . . . .	145
3.5	Applications linéaires de rang fini . . . . .	156
3.6	Théorème de Hahn-Banach . . . . .	160
3.7	Continuité faible et adjonction . . . . .	165
3.8	Dualité dans les espaces normés . . . . .	169
3.9	Dualité de Fenchel . . . . .	173
3.10	Polarité et orthogonalité . . . . .	180
3.11	La topologie de Mackey . . . . .	186
3.12	Intégration vectorielle faible . . . . .	189
3.13	Formes sesquilinéaires, applications linéaires et produits tensoriels . . . . .	197
3.14	Les théorèmes du graphe fermé et d'isomorphie . . . . .	202
3.15	Quelques applications du théorème du graphe fermé . . . . .	207
3.16	La topologie forte . . . . .	210
	Les topologies de la convergence uniforme . . . . .	212
3.17	Les opérateurs dans un espace de Hilbert . . . . .	213
3.18	Les opérateurs intégraux de Hilbert-Schmidt . . . . .	217
3.19	Les opérateurs intégraux faiblement singuliers . . . . .	220
3.20	Les opérateurs intégraux généraux . . . . .	223
3.21	La matrice d'un opérateur . . . . .	225
3.22	Le formalisme de Dirac . . . . .	228
<b>4</b>	<b>ESPACES DE DISTRIBUTIONS</b>	<b>231</b>
4.1	Une manière d'interpréter la notion de dualité . . . . .	232

# TABLE DES MATIÈRES

	Exemple physique . . . . .	232
	Exemple économique . . . . .	233
4.2	Les intégrales de Radon comme fonctions généralisées . . . . .	235
4.3	Les distributions . . . . .	239
4.4	Dérivation . . . . .	246
4.5	Multiplication . . . . .	251
4.6	Translation . . . . .	254
4.7	Dilatation . . . . .	257
4.8	Opérations et leurs liaisons dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)'$ et $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'$ . . . . .	262
4.9	Transformation de Fourier dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . . . . .	266
4.10	Transformation de Fourier dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'$ . . . . .	272
4.11	Espaces de Sobolev . . . . .	276
4.12	Convolution des fonctions et des distributions . . . . .	280
<b>5</b>	<b>SOUS-ESPACES HILBERTIENS</b>	<b>291</b>
5.1	Le noyau d'un sous-espace-hilbertien . . . . .	292
5.2	Exemples élémentaires de sous-espaces hilbertiens . . . . .	295
5.3	Caractérisation d'un sous-espace hilbertien . . . . .	297
5.4	Image d'un sous-espace hilbertien . . . . .	299
5.5	Transitivité . . . . .	304
5.6	Dilatation d'un sous-espace hilbertien . . . . .	305
5.7	Somme de deux sous-espaces hilbertiens . . . . .	306
5.8	Structure d'ordre sur les sous-espaces hilbertiens . . . . .	308
5.9	Intersection de deux sous-espaces hilbertiens . . . . .	309
5.10	Somme directe de deux sous-espaces hilbertiens . . . . .	310
5.11	Théorème de Schwartz . . . . .	311
5.12	Champs de carré intégrable . . . . .	314
5.13	Intégration d'une famille de sous-espaces hilbertiens . . . . .	321

5.14	Décomposition d'un sous-espace hilbertien . . . . .	324
5.15	Espaces de Hilbert à noyaux reproduisants . . . . .	329
5.16	Sous-espaces fermés de $L^2(\sigma)$ à noyaux reproduisants . . . . .	333
5.17	Les semi-dualités bien plongées . . . . .	337
5.18	Les semi-dualités plongées . . . . .	344
<b>6</b>	<b>ALGÈBRES DE BANACH ET SPECTRES</b>	<b>347</b>
6.1	Algèbres normées . . . . .	348
6.2	Inversibilité dans une algèbre de Banach . . . . .	350
6.3	Le spectre dans une algèbre de Banach unifère . . . . .	353
6.4	Transformation de Gelfand . . . . .	356
6.5	Théorème de Gelfand-Neumark . . . . .	360
6.6	Le spectre dans une sous-algèbre stellaire . . . . .	362
6.7	Calcul fonctionnel continu . . . . .	364
6.8	Eléments positifs dans une algèbre stellaire . . . . .	369
6.9	Cas d'un élément normal non-borné . . . . .	371
<b>7</b>	<b>OPÉRATEURS NON-BORNÉS</b>	<b>375</b>
7.1	Opérateurs fermés . . . . .	376
7.2	Opérateurs fermables . . . . .	378
7.3	Opérateurs et sous-espaces hilbertiens . . . . .	380
7.4	L'adjoint d'un opérateur . . . . .	385
7.5	Opérations sur les opérateurs non-bornés . . . . .	389
7.6	Opérateurs formellement normaux . . . . .	393
7.7	Opérateurs normaux . . . . .	395
7.8	L'algèbre stellaire associée à un opérateur fermé . . . . .	398
7.9	Opérateurs différentiels . . . . .	401
7.10	Le spectre d'un opérateur (non-nécessairement borné) dans un espace de Banach . . . . .	409

## TABLE DES MATIÈRES

7.11	Liaison entre les spectres d'un opérateur et de son adjoint . . . . .	412
<b>8</b>	<b>DÉCOMPOSITIONS SPECTRALES</b>	<b>415</b>
8.1	Les opérateurs de multiplications . . . . .	416
8.2	Les opérateurs de Toeplitz associés à une décomposition . . . . .	420
8.3	Les décompositions non-dégénérées et directes . . . . .	424
8.4	Décompositions unidimensionnelles . . . . .	427
8.5	Calcul fonctionnel mesurable . . . . .	432
8.6	Le théorème spectral . . . . .	436
8.7	Equations d'évolution . . . . .	439
8.8	La décomposition de Fourier . . . . .	443
8.9	Equation de Schrödinger . . . . .	451
<b>APPENDICE 1</b>	<b>TOPOLOGIE</b>	<b>457</b>
1.1	Ensembles ouverts et fermés . . . . .	458
1.2	Continuité . . . . .	460
1.3	Convergence . . . . .	461
1.4	Espaces topologiques séparés . . . . .	463
1.5	Parties et espaces compacts . . . . .	464
<b>APPENDICE 2</b>	<b>LES POLYNOMES ORTHOGONAUX CLASSIQUES</b>	<b>467</b>
2.1	Relations de récurrence . . . . .	468
2.2	Polynômes orthogonaux classiques . . . . .	469
2.3	Polynômes de Jacobi spéciaux . . . . .	471
2.4	Fonctions génératrices . . . . .	473
2.5	Polynômes de Jacobi . . . . .	474
2.6	Polynômes de Laguerre . . . . .	475
2.7	Polynômes de Hermite . . . . .	476
2.8	Polynômes de Legendre . . . . .	479

## TABLE DES MATIÈRES

2.9	Polynômes de Tchebycheff . . . . .	482
2.10	Polynômes de Gegenbauer ou ultrasphériques . . . . .	485

<b>BIBLIOGRAPHIE</b>		<b>489</b>
----------------------	--	------------



# INDEX

Version du 7 septembre 2004

- $1_{a,b}$  : fonction caractéristique signée, 23
- $A^\perp$  : ensemble orthogonal, 180
- $A^\circ$  : ensemble polaire, 180
- $A^\perp$  : ensemble orthogonal, 12
- $A^a$  : ensemble polaire absolu, 180
- $\mathcal{AC}(J)$  : fonctions absolument continues, 24
- $\mathcal{AC}^{(k)}(J)$  : fonctions absolument continues d'ordre  $k$ , 25
- $B_P(\varphi, r_P)$  : boule fermée, 91
- $\binom{z}{k}$  : coefficient binomial, 48
- $\langle \cdot | \cdot \rangle$  : vecteur bra, forme linéaire, 145
- $\langle \cdot | \cdot \rangle$  : "bracket" de semi-dualité, 17
- $\text{co}(A)$  : enveloppe convexe de  $A$ , 177
- $\text{cs}(A)$  : enveloppe convexe absolument symétrique de  $A$ , 177
- $\text{co}_f$  : ensemble dual de  $f$ , 176
- $\mathcal{C}(X)$  : espace des fonctions continues, 97
- $\mathcal{C}^{(\infty)}(X)$  : espace des fonctions indéfiniment dérivables, 97
- $\mathcal{C}^{(m),b}(\overline{X})$  : espace des fonctions  $k$ -fois dérivables dont toutes les dérivées sont continues bornées sur  $\overline{X}$ , 264
- $\mathcal{C}^b(X)$  ,  $\mathcal{C}^0(X)$  : espace des fonctions continues bornées, resp. tendant vers 0 à l'infini, 92
- $\mathcal{C}_{\text{temp}}^{(\infty)}(\mathbb{R}^n)$  : espace des fonctions indéfiniment dérivables tempérées, 262
- $\vee$  : symétrie centrale, 260
- $D_A$  : transformation d'une distribution par  $A \in \text{GL}(\mathbb{R}^n)$ , 258
- $D_P(\varphi, r_P)$  : boule ouverte, 91
- $D_h$  : dilatation d'une distribution, 260
- $\Delta$  : opérateur de Laplace modifié, 268
- $\langle F, G \rangle$  : dualité, 145
- $\langle F | F' \rangle$  : semi-dualité associée à une involution, 147
- $\langle F | G \rangle$  : semi-dualité, 145
- $\langle \cdot, \cdot \rangle_F$  : forme bilinéaire de dualité, 145
- $\langle \cdot | \cdot \rangle_{F^\dagger}$  : forme sesquilinéaire de semi-dualité, 145
- $\langle \cdot | \cdot \rangle_F$  : forme sesquilinéaire de semi-dualité, 145
- $\mathcal{D}(X)$  : espace des fonctions indéfiniment dérivables à support compact, 116
- $\mathcal{D}(X)'$  : espace des distributions, 239
- $\mathcal{H} = \int \widehat{\mathcal{H}} d\sigma$  : décomposition d'un sous-espace hilbertien, 324
- $\mathcal{H} = \int^\oplus \widehat{\mathcal{H}} d\sigma$  : décomposition directe d'un sous-espace hilbertien, 425
- $\mathcal{E}(X) := \mathcal{C}^{(\infty)}(X)$ , 97
- $F/H$  : espace vectoriel quotient, 111
- $F^*$  ,  $F'$  ,  $F^\otimes$  ,  $F^\dagger$ , 138
- $F_\beta^\dagger$  : semi-dual fort, 169
- $F_\beta^\dagger$  : semi-dual fort d'un espace normé, 140
- $F_\sigma$  : espace localement convexe muni de la topologie faible, 146
- $(F_\beta^\dagger)^\dagger$  : bidual d'un espace normé, 169
- $\mathcal{F}$  : transformation de Fourier, 266, 272
- ${}_1F_1(a; b; z)$  : fonction hypergéométrique confluyente de Kummer, 66
- $f^\circ$  : conjuguée ou transformée de Legendre-Fenchel de  $f$ , 174
- $f^\infty$  : fonction prolongée par  $\infty$  hors du domaine de définition de  $f$ , 89
- $f_h$  : fonctionnelle positivement homogène associée à  $f$ , 173
- $F(a, b; c; z)$  ,  ${}_2F_1(a, b, c; z)$  : fonction hypergéométrique ou de Gauß, 65
- $G_k^{(\gamma)}$  : polynômes de Gegenbauer, 61
- $G_k^{(p,q)}$  : polynômes hypergéométriques, 65
- $H_k$  : polynômes d'Hermite, 47
- $\text{Hilb}(F^\dagger)$  : cône des sous-espaces hilbertiens de  $F^\dagger$ , 292
- $\mathcal{H}^{(k)}(J)$  : espace de Sobolev d'ordre  $k$ , 26
- $\mathcal{H}^{(m)}(X)$  : espace de Sobolev d'ordre  $m \in \mathbb{N}$  sur un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ , 279
- $\mathcal{H}^{(s)}(X)$  : espace de Sobolev d'ordre  $s \in \mathbb{R}$  sur  $\mathbb{R}^n$ , 277
- $\mathcal{H}_0^{(1)}(J)$  : espace de Sobolev, 29

- $h_k$  : fonctions d’Hermite, 70
- $\bigwedge_{j \in J} q_j$  : infimum sous-linéaire, 89
- $\langle \text{id} \rangle := 1 + |\text{id}|^2$ , 87
- $\diamond$  : involution, 147
- $\square$  : sous-espace vectoriel fermé, 9
- $J_\nu(s)$  : fonctions de Bessel ou cylindriques, 68
- $J_k^{(\alpha, \beta)}$  : polynômes de Jacobi, 47
- $j_A$  : jauge de Minkowsky de  $A$ , 180
- $\mathbb{K}^{(X)}$  : espace des fonctions à support fini, 116
- $\mathcal{K}(X)$  : espace des fonctions continues à support compact, 115
- $\mathcal{K}^{(1)}(J)$  : espace des fonctions continûment dérivables à support compact, 31
- $|\cdot\rangle$  : vecteur ket, forme semi-linéaire sur un espace préhilbertien, 17
- $|\cdot\rangle$  : vecteur ket, forme semi-linéaire, 17, 145
- $L(F, G)$  ,  $\mathcal{L}(F, G)$  : espaces d’applications linéaires, 12, 136
- $L_k^{(\alpha)}$  : polynômes de Laguerre, 47
- $\ell^p(X) := \mathbf{L}^p(\#)$ , 92
- $\lim_{\mathfrak{K}(J) \ni K \rightarrow \infty}$  ,  $\lim_K$ , 106
- $\mathbf{L}^2(\mu, \rho)$  : espace des fonctions de carré intégrable par rapport à la densité  $\rho$ , 8
- $\mathbf{L}^2(\sigma, \widehat{\mathcal{H}})$  : espace de Hilbert des champs de carré intégrable, 317
- $\mathbf{L}^p(\mu)$  : espace des fonctions de puissance  $p$ -ième intégrable, 93
- $\mathbf{L}_{\text{mod}}^1(\mathbb{R}^n)$  : espaces des fonctions à croissance modérée, 243
- $\mathbf{L}_{\text{mod}}^2(\mathbb{R}^n)$  : espace des fonctions à croissance quadratique modérée, 277
- $\mathbf{L}_{\text{rap}}^1(\mathbb{R}^n)$  : espace des fonctions à décroissance rapide, 282
- $\mathbf{L}_{\text{len}}^1(\mathbb{R}^n)$  : espace des fonctions à croissance lente, 243
- $\Lambda^2(\sigma, \widehat{\mathcal{H}})$  : espace de Banach des champs de carré intégrable, 314
- $\mathcal{C}^{(k), \text{decl}}(\mathbb{R}^n)$  : espace des fonctions  $k$ -fois continûment dérivables déclinantes, 282
- $\mathcal{L}_b(F, G)$  : espace des opérateurs bornés, 140
- $\lim(F_j, T_j)$  : espace localement convexe  $\xrightarrow{\quad}$  final, 114
- $M(a, b; z)$  : fonction hypergéométrique confluyente de Kummer, 66
- $M_\alpha$  : opérateur de multiplication, 417
- $M_{\kappa, \mu}$  : fonction de Whittaker, 67
- $M_g$  : multiplication d’une distribution par une fonction indéfiniment dérivable, 251
- $\mathcal{M}(X)$  : espace des intégrales de Radon, 152
- $\mathcal{M}^{\text{mod}}(\mathbb{R}^n)$  : espace des intégrales de Radon à croissance modérée, 243
- $\mathcal{M}^{\text{rap}}(\mathbb{R}^n)$  : espace des intégrales de Radon à décroissance rapide, 282
- $\mathcal{M}_+^p(X)$  : ensemble des intégrales de Radon dont tous les moments sont finis, 43
- $\|\cdot\|$  : norme d’un opérateur, 12, 140
- $\|\cdot\|$  : norme d’une forme (semi-) linéaire, 17, 140
- $\|\cdot\|$  : norme d’une forme sesquilinéaire, 17
- $\|\cdot\|_{2, \mu, \rho}$  : norme de  $\mathbf{L}^2(\mu, \rho)$ , 8
- $\|\cdot\|_{2, \mu}$  : norme de  $\mathbf{L}^2(\mu)$ , 5
- $\|\cdot\|_{p, q}$  : norme d’une application linéaire, 136
- $\|\cdot\|_p$  : norme d’une forme (semi-) linéaire, 146
- $\perp$  : relation d’orthogonalité, 12
- $(\cdot|\cdot)_\mu$  : produit scalaire de  $\mathbf{L}^2(\mu)$ , 5
- $P_{\mathcal{G}}\xi$  : projection de  $\xi$  sur  $\mathcal{G}$ , 13
- $P_k$  : polynômes de Legendre , 59
- $(z)_k$  : symbole de Pochhammer, 48
- $[p]$  : semi-norme quotient, 111
- $\mathcal{P}$  : espace des polynômes, 43
- $\max P$  ,  $\sup P$  : semi-normes, 87
- $p \times_s q$  : semi-norme produit, 87
- $p_{K, k}$  ,  $q_{K, \alpha}$  : semi-normes sur  $\mathcal{C}^{(\infty)}(X)$ , 87, 97
- $p_k$  ,  $q_k$  : semi-normes sur  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , 87, 97
- $\boxplus$  : somme directe orthogonale ou hilbertienne, 15, 36
- $\text{supp } \mu$  : support d’une intégrale, 8
- $\text{sl}_A$  ,  $\text{sn}_A$  : fonctionnelles duale de  $A$ , 176
- $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  : espace de Schwartz, 88, 97
- $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'$  : espace des distributions tempérées, 242

# INDEX

- $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'_{\text{rap}}$  : espace des distributions à décroissance rapide, 287  
 $\sigma(F, G)$  : topologie faible associée à  $\langle F|G \rangle$ , 146  
 $\bigoplus_{j \in J}^{top}$  : somme directe topologique, 117  
 $T^*$  : adjoint d'un opérateur dans un espace de Hilbert, 213  
 $T^\dagger$  : application adjointe, 165  
 $T_k, U_k$  : polynômes de Tchebycheff, 59  
 $T_y$  : translation d'une distribution, 254  
 $\bowtie, \triangleleft, \otimes$  : applications tensorielles canoniques, 127  
 $\langle F|\cdot|_i G \rangle$  : produit tensoriel topologique inductif semi-linéaire à gauche, 127  
 $\langle \varphi|\cdot|\gamma \rangle$  : tenseur élémentaire semi-linéaire à gauche, 127  
 $\mathfrak{T}_F, \mathfrak{T}_P$  : topologie d'un espace localement convexe, 96  
 $\tau(F, G)$  : topologie de Mackey, 186  
 $\varphi \otimes \gamma$  : tenseur élémentaire, 127  
 $|F\rangle_\pi \langle G|$  : produit tensoriel topologique inductif semi-linéaire à droite, 131  
 $|F\rangle_i \langle G|$  : produit tensoriel topologique inductif semi-linéaire à droite, 127  
 $|\gamma\rangle \langle \mu|$  : application linéaire de rang 1, 157  
 $|\varphi\rangle \langle \gamma|$  : tenseur élémentaire semi-linéaire à droite, 127  
 $W_{\kappa, \mu}$  : fonction de Whittaker, 67  
 $Z_\alpha$  : opérateur de Toeplitz dans une décomposition, 420  
 $Z_\alpha$  : opérateur de multiplication dans une décomposition directe, 432
- absolu  
   ensemble polaire —, 180  
   fonction localement —ment continue, 24  
   fonctionnelle —ment homogène, 3, 86  
   partie —ment symétrique, 177  
   série —ment convergente, 104  
   valeur —e d'une intégrale de Radon, 152
- adjoignable  
   opérateur —, 393
- adjoint  
   admettre une —e, 165  
   application —e, 165
- formel, opérateur —, 385
- algèbre  
   involutive, 360  
   normée, de Banach, unifère, 348  
   stellaire, 360  
   stellaire d'un opérateur, 399
- algébrique  
   application adjointe —, 165  
   dual, semi-dual —, 138
- analytique  
   fonction —, 353
- annihilation  
   opérateur d'—, 70
- application  
   adjointe (algébrique, formelle), 165  
   canonique  
     d'un espace quotient, 111  
     du produit tensoriel, 127  
   de Parseval, 299  
   linéaire adjoignable, 393  
   linéaire bornée, 12  
   linéaire, bilinéaire, sesquilinéaire, 2  
   sesquilinéaire bornée, 17
- auto-adjoint  
   application linéaire, opérateur essentiellement —, 395  
   application linéaire, opérateur formellement —, 393  
   élément — d'une algèbre involutive, 360  
   formellement —, 247
- Baire  
   théorème de —, 123
- Banach  
   algèbre de —, 348  
   théorème de —-Steinhaus, 137, 141  
   théorème de Hahn- —, 163
- base  
   canonique de  $\mathbb{K}^{(X)}$ , 116  
   hilbertienne, 38
- Bergman  
   noyau de —, 335
- Bernstein  
   polynômes de —, 45
- Bessel  
   équation différentielle de —, 68  
   inégalité de —, 35, 38
- bidual, 169

- bilinéaire, 2
- binomial
  - coefficient — généralisé, 48
- biorthogonal, 148
- Bochner
  - théorème de —, 267
- borné
  - application linéaire —e, 12
  - application sesquilinéaire —e, 17
  - intégrale de Radon —e, 238
  - opérateur —, 140, 377
  - partie —e, 137
  - topologie de la convergence —e, 140
- boule
  - fermée, ouverte, 91
- bra
  - vecteur —, 126, 146
- calcul
  - fonctionnel continu, 364, 365
  - fonctionnel mesurable, 437
  - fonctionnel mesurable borné, 426
- canonique
  - application —
    - d'un espace quotient, 111
    - du produit tensoriel, 127
  - base — de  $\mathbb{K}^{(X)}$ , 116
- Cantor
  - ensemble de —, 237
- caractère, 356
  - hermitien, 361
- caractéristique
  - fonction — signée, 23
- Cauchy
  - critère de —, 104, 107
  - suite de —, 104
- chaleur
  - équation de la —, 440
- champ, 314
- classique
  - solution —, 31
- coefficient
  - binomial généralisé, 48
- coercitif
  - forme sesquilinéaire —ve, 20
- commençante
  - section —, 5
- compact
  - distribution à support —, 288
  - topologie de la convergence —e (de toutes les dérivées), 97
- compatible
  - avec une semi-dualité, 151
- complet
  - séquentiellement, semi- —, 104
- complété, 169
- complexe
  - intégrale de Radon —, 152
- confluente
  - équation différentielle, série hypergéométrique —, 66
- conjugué
  - fonction —e, 175
  - intégrale de Radon —e, 152
- continu
  - fonction localement absolument —e, 24
  - spectre —, 409
- convergence
  - topologie de la — compacte de toutes les dérivées, 97
  - topologie de la — bornée, 140
  - topologie de la — simple, compacte, 97
- convergent
  - série (absolument, normalement) —e, 104
- convexe, 173
  - espace localement —, 96
  - uniformément —, 15
- convolution
  - d'une intégrale de Radon à décroissance rapide et d'une distribution tempérée, 284
  - de deux fonctions, 280
- création
  - opérateur de —, 70
- critère
  - de Cauchy, de Weierstraß, 104, 107
- croissance
  - fonction à — lente, 243
  - fonction à — quadratique modérée, 277
  - intégrale, fonction à — modérée, 243
- cylindrique
  - fonction —, 68
- déclinante

## INDEX

- fonction —, 88
- décomposition
  - d'un sous-espace-hilbertien, 324
  - d'un vecteur, 325
  - directe, 425
  - hilbertienne, 36
  - non-dégénérée, 424
- décroissance
  - distribution à — rapide, 287
  - fonction à — rapide, 88
  - intégrale de Radon à — rapide, 282
- dénombrable
  - espace localement convexe de type —, 41
- dense
  - séquentiellement —, 104
- dérivée
  - d'une distribution, 246
- diagonalisable
  - opérateur —, 436
- diagonalisation
  - d'un opérateur, 436
- différentiel
  - opérateur —, 401
- dilaté
  - fonction —e, 258
  - fonction, distribution —e, 260
- Dirac
  - distribution de —, 242
  - fonction de —, 248
  - formalisme de —, 126
  - suite de —, 245
- direct
  - produit —, 100
  - somme —e (externe), 116
- directe
  - décomposition —, 425
- Dirichlet
  - opérateur de —, 405
- distribution, 239
  - à décroissance rapide, 287
  - à support compact, 288
  - de Dirac, 242
  - dérivée partielle d'une —, 246
  - dilatée, 260
  - espace de —s, 263
  - produit d'une fonction et d'une distribution, 251
  - symétrique, 260
  - temperée, 242
  - translatée, 255
- domaine
  - d'un opérateur, 376
  - essentiel d'un opérateur, 378
- dual
  - algébrique, topologique, faible, 138
  - bi—, 169
  - ensemble —, 176
  - fonctionnelle —e, 176
  - fort, 17, 140
- dualité, 145
  - formules de —, 340
- Dunford
  - théorème de Gelfand- —, 194
- égalité
  - de Parseval, 35, 38
  - du parallélogramme, 10
- élémentaire
  - solution —, 408
  - tenseur —, 127
- ensemble
  - dual, 176
  - orthogonal, 12
  - polaire, polaire absolu, orthogonal, 180
- entière
  - série —, 353
- énumération
  - d'un ensemble, 5
- équation
  - d'évolution, 439
  - de la chaleur, 440
  - de Schrödinger, 452
  - intégrale de Volterra, 352
- équation différentielle
  - d'Hermite, 69
  - de Bessel, 68
  - de Jacobi, 64
  - de Laguerre, 66
  - de type hypergéométrique, 49
  - de Whittaker, 67
  - hypergéométrique confluyente, 66
- équicontinu
  - partie —e, 212
- équivalent
  - espaces polynormés —s, 96
- espace

- s polynormés équivalents, 96
- de distributions, 263
- de Fréchet, 119
- de Schwartz, 88, 97
- localement convexe, 96
  - final, 114
  - intersection, 102
  - quotient, 111
  - tonnelé, 125
- polynormé, 91
- préhilbertien, de Hilbert, 7
- semi-normé, normé, 86
- essentiel
  - application linéaire, opérateur —  
lement auto-adjoint, normal, 395
  - domaine — d'un opérateur, 378
- évaluation
  - forme linéaire d'—, 86
- évolution
  - équation d'—, 439
- faible
  - intégrale —, 189
  - solution —, 31
  - topologie —, 146
  - topologie, dual, semi-dual —, 138
- Fenchel
  - théorème de —, 234
  - transformation de Legendre- —, 175
- fermable
  - application linéaire —, 381
  - opérateur —, 378
- fermé
  - boule —e, 91
  - opérateur —, 376
- fermeture
  - d'un opérateur, 378
  - d'une application linéaire, 381
- final
  - espace localement convexe —, 114
- fini
  - application linéaire de rang —, 156
- fonction
  - -noyau, 329
  - s d'Hermite, 70
  - s de Whittaker, 67
  - à croissance modérée, lente, 243
  - à décroissance rapide, déclinante, 88
  - analytique, 353
  - caractéristique signée, 23
  - conjuguée, 175
  - de Bessel, 68
  - de Dirac, 248
  - de Heaviside, 238
  - de type positif, 267, 330
  - dilatée, 258
  - généralisée, 236, 239
  - localement absolument continue, 24
  - symétrique, 260
  - translatée, 254
- fonctionnel
  - calcul — continu, 364, 365
  - calcul — mesurable, 437
  - calcul — mesurable borné, 426
- fonctionnelle
  - duale, 176
  - sous-linéaire, positivement homogène,  
sous-additive, absolument homogène,  
séparante, 86
- formalisme
  - de Dirac, 126
- forme
  - bilinéaire, sesquilinéaire, 2
  - sous-linéaire, 86
- formel
  - application adjointe —le, 165
  - application linéaire, opérateur —  
lement auto-adjoint, normal, 393
- formule
  - s de dualité, 340
  - s de polarisation, 10
  - de Leibniz, 252
  - de Rodrigues, 48
- fort
  - dual —, 140
  - semi-dual —, 17
  - topologie —e, 210
- Fourier
  - transformée de — d'une distribution  
tempérée, 272
  - transformée de — d'une mesure bor-  
née, 266
- Fréchet
  - espace de —, 119
- Fredholm
  - opérateur de —, 142
- Gauß

## INDEX

- série (hypergéométrique) de —, 65
- Gegenbauer
  - polynômes de —, 61
- Gelfand
  - théorème de —, 356
  - théorème de — -Dunford, 194
  - théorème de — -Mazur, 355
  - transformée de —, 358
  - triple de —, 380
- Gram-Schmidt
  - procédé d'orthogonalisation de —, 41
- graphe
  - norme en —, 376
  - sur—, 173
  - théorème du — fermé, 202
- Green
  - noyau de —, 407
  - opérateur de —, 405
- Hahn
  - théorème de — -Banach, 163
- harmonique
  - oscillateur —, 70
- Hausdorff
  - intégrale de —, 237
- Heaviside
  - fonction de —, 238
- Hermite
  - équation différentielle, fonctions d'—, 69
  - polynômes de —, 47, 58
- hermitien
  - caractère —, 361
  - forme sesquilinéaire —ne, 2
  - noyau —, 293
- Hilbert
  - espace de —, 7
  - transformation de —, 288
- hilbertien
  - base —ne, 38
  - décomposition, somme —ne, 36
  - sous-espace —, 292
    - décomposition d'un —, 324
  - sous-espace — pivot, 340
- Hölder
  - inégalité de — abstraite, 17, 146
  - inégalité de — généralisée, 281
- homogène
  - fonctionnelle positivement, absolument —, 3, 86
  - problème aux limites —s, 31
- hypergéométrique
  - équation différentielle de type —, 49
  - série —, 65
  - équation différentielle, série — confluente, 66
  - polynômes —s, 65
- idéal
  - maximal, 356
- imaginaire
  - partie — d'une intégrale de Radon, 153
- impulsion
  - opérateur d'—, 402
- inductif
  - produit tensoriel topologique —, 127
- inégalité
  - de Bessel, 35, 38
  - de Hölder abstraite, 17, 146
  - de Hölder généralisée, 281
  - de Poincaré, 30
  - de Sobolev, 27
- inhomogène
  - problème aux limites —s, 33
- intégrable
  - (au sens de Pettis), 191
  - scalairement —, 189
- intégral
  - opérateur —, 142
- intégrale
  - de Radon à croissance modérée, 242
  - de Radon bornée, 238
  - de Radon pivot, 236
  - de Radon positive, réelle, complexe, conjuguée, 152
  - faible, 189
  - spectrale, 364, 365
- intégration
  - par parties, 24, 26
- intersection
  - de deux espaces localement convexes, 102
- inverse
  - d'un opérateur, 389
- inversible
  - opérateur —, 389, 409

- involutif
  - algèbre —ve, 360
- involution, 147, 360
- isométrie, 109
- isomorphe, 109
- isomorphie
  - théorème d'—, 202
- Jacobi
  - équation différentielle de —, 64
  - polynômes de —, 47, 54
- jauge
  - de Minkowsky, 180
- ket
  - vecteur —, 17, 126, 146
- Krein
  - théorème de —, 193
- Kummer
  - série (hypergéométrique confluyente) de —, 66
- Laguerre
  - équation différentielle de —, 66
  - polynômes de —, 47, 56
- Laplace
  - opérateur de — modifié, 268
- Lax-Milgram
  - théorème de —, 21
- Lebesgue
  - lemme de Riemann- —, 270
- Legendre
  - polynômes de —, 59
  - transformation de — -Fenchel, 175
- Leibniz
  - formule de —, 252
- lent
  - fonction à croissance —e, 243
- linéaire
  - application (semi-)—, 2
  - rétraction, 154
- local
  - fonction —ment absolument continue, 24
- localement
  - espace — convexe, 96
- Mackey
  - topologie, semi-norme de —, 186
- majoration
  - théorème de la — uniforme, 137, 140
- maximal
  - idéal —, 356
- Mazur
  - théorème de Gelfand- —, 355
- mesurable
  - scalairement —, 189
- Minkowsky
  - jauge de —, 180
- modéré
  - fonction à croissance quadratique —e, 277
  - intégrale de Radon, fonction à croissance —e, 243
- moyenne
  - propriété de —, 333
- négligeable
  - scalairement —, 189
- Neumann
  - opérateur de —, 405
  - série de —, 350
- nilpotent, 350
  - quasi- —, 351
- non-borné
  - opérateur, 377
- non-dégénéré
  - décomposition —e, 424
  - forme sesquilinéaire —e, 2
- normable, 97
- normal
  - application linéaire, opérateur essentiellement —, 395
  - application linéaire, opérateur formellement —, 394
  - élément — d'une algèbre involutive, 360
  - série —ement convergente, 104
- norme, 3, 86
  - en graphe, 376
  - semi- —, 3
  - semi- — de Mackey, 186
- normé
  - algèbre —e, 348
- noyau, 142, 158, 293
  - d'un sous-espace hilbertien, 292
  - de Bergman, 335
  - de Green, 407
  - fonction- —, 329

- hermitien, hermitien positif, 293  
opérateur à —, 142  
reproduisant, 329, 330
- opérateur  
adjoint (formel), 385  
borné, 140  
borné, non-borné, 377  
de création et d'annihilation, 70  
de Dirichlet, de Green, de Neumann, 405  
de Laplace modifié, 268  
de position, d'impulsion, 402  
de Schrödinger, 402  
de Toeplitz, 420  
diagonalisable, 436  
différentiel, 263, 401  
fermable, 378  
fermé, 376  
formellement auto-adjoint, symétrique, 394  
intégral de Volterra, 351  
intégral, à noyau, de Fredholm, 142  
inversible, 389, 409  
somme, produit, inverse, 389
- Orlicz  
principe d'—, 161
- orthogonal  
éléments —aux, 12  
ensemble —, 12, 180  
procédé d'—isation de Gram-Schmidt, 41  
projection —e, 15  
système de polynômes —aux, 44
- orthonormé  
système —, 38  
système de polynômes —s, 44
- orthoprojecteur, 15
- oscillateur  
harmonique, 70
- ouvert  
boule, partie —e, 91
- parallélogramme  
égalité, 10
- Parseval  
décomposition de —, 325  
égalité de —, 35, 38  
représentant, application de —, 299
- partie  
réelle, imaginaire d'une intégrale de Radon, 153
- Pettis  
intégrable au sens de —, 191
- pivot  
integral de Radon —, 236  
intégrale —, 80  
sous-espace hilbertien —, 340
- Plancherel  
théorème de —, 276
- plongé, plongeable  
semi-dualité bien —e, —, 339
- Pochhammer  
symbole de —, 48
- poids  
sous-multiplicatif, 88
- Poincaré  
inégalité de —, 30
- polaire  
ensemble — (absolu), 180
- polarisation  
formules de —, 10
- polynômes  
d'Hermite, 58  
de Bernstein, 45  
de Gegenbauer, 61  
de Jacobi, 54  
de Jacobi, Laguerre, Hermite, 47  
de Laguerre, 56  
de Legendre, 59  
de Tchebycheff, 59  
hypergéométriques, 65  
système de —, 44
- polynormé  
espace —, 91
- pontuel  
spectre —, 409
- positif  
élément — d'une algèbre stellaire, 364  
fonction de type —, 268, 330  
forme sesquilinéaire —ve, 2  
forme sesquilinéaire strictement —ve, 20  
intégrale de Radon —ve, 152  
matrice —ve, 5  
noyau hermitien —, 293  
opérateur —, 395
- position  
opérateur de —, 402

- positivement
  - fonctionnelle — homogène, 3, 86
- préhilbertien
  - espace —, 7
- principe
  - d'Orlicz, 161
- problème
  - aux limites homogènes, 31
  - aux limites inhomogènes, 33
  - de régularité, 242
- produit
  - (direct), 100
  - d'une fonction et d'une distribution, 251
  - de convolution de deux fonctions, 280
  - de deux opérateurs, 389
  - scalaire, 2
  - tensoriel (topologique inductif), 127
  - tensoriel (topologique projectif), 131
- projectif
  - produit tensoriel topologique —, 131
- projection
  - orthogonale, 15
  - théorème de la —, 13
- prolongement
  - d'un opérateur, 378
- propre
  - valeur, vecteur —, 409
- propriété
  - (*GDF*), 194
  - de moyenne, 333
  - de reproduction, 330
- Pythagore
  - théorème de —, 12
- quasi-nilpotent, 351
- quotient
  - espace localement convexe —, 111
- rang
  - application linéaire de — fini, 156
- rapide
  - distribution à décroissance —, 287
  - fonction à décroissance —, 88
  - intégrale de Radon à décroissance —, 282
- rayon
  - spectral, 351
- réel
  - intégrale de Radon —le, 152
- partie —le d'une intégrale de Radon, 153
- réflexif, 169
- règle
  - de substitution, 24
- régularité
  - problème de —, 242
- représentant
  - de Parseval, 299
- reproduction
  - propriété de —, 330
- reproduisant
  - noyau —, 329, 330
- résiduel, 409
- résolvante, 354
- rétraction
  - linéaire, 154
- Riemann
  - lemme de — -Lebesgue, 270
- Riesz
  - théorème de —, 113
  - théorème de représentation de —, 18
- Rodrigues
  - formule de —, 48
- saturé, 95
- scalairement
  - intégrable, négligeable, mesurable, 189
- Schrödinger
  - équation de —, 452
  - opérateur de —, 402
- Schwartz
  - espace de —, 88, 97
  - théorème de —, 311
- section
  - commençante, 5
- semi
  - norme, 3
- semi-
  - complet, 104
  - dual
    - algébrique, topologique, faible, 138
    - fort, 17
  - dualité, 145
  - linéaire, 2
  - normable, 97
  - norme, 86
    - de Mackey, 186

## INDEX

- séparable
  - espace localement convexe —, 41
- séparant
  - (semi-)dualité —e, 146
  - fonctionnelle —e, 3, 86
- séparé
  - fonctions à variables —es, 130
  - noyau à variables —es, 158
- séquentiellement
  - complet, 104
  - dense, 104
- série
  - de Neumann, 350
  - entière, 353
  - hypergéométrique confluyente ou de Kummer, 66
  - hypergéométrique ou de Gauß, 65
- sesquilinéaire
  - application — à gauche, à droite, 2
  - forme — strictement positive, coercitive, 20
- signé
  - fonction caractéristique —, 23
- simple
  - partie —ment bornée, 137
  - topologie de la convergence —, 97
- Sobolev
  - espace de —, 26
  - espace de — d'ordre entier, 279
  - espace de — d'ordre quelconque, 277
  - inégalité de —, 27
- solution
  - classique, faible, 31
  - élémentaire, 408
- somme
  - d'une série, 104
  - de deux opérateurs, 389
  - de deux sous-espaces hilbertiens, 306
  - directe (externe), 116
  - hilbertienne, 36
- sous-additive
  - fonctionnelle —, 3, 86
- sous-algèbre
  - stellaire, 362
- sous-espace
  - hilbertien, 292
  - décomposition d'un —, 324
- sous-linéaire
  - fonctionnelle —, 86
- sous-multiplicatif
  - poids —, 88
- spectral
  - intégrale —, 364, 365
  - rayon —, 351
  - valeur —e, 354, 409
- spectre
  - d'un élément, 354
  - d'un opérateur, 409
  - d'une algèbre, 356
  - ponctuel, continu, résiduel, 409
- Stampacchia
  - théorème de —, 20
- Steinhaus
  - théorème de Banach- —, 137, 141
- stellaire
  - algèbre —, 360
  - algèbre — d'un opérateur, 399
  - sous-algèbre —, 362
- Stone
  - théorème de —, 454
  - théorème de — -Weierstraß, 40
- strict
  - forme sesquilinéaire —ement positive, 20
  - matrice —ement positive, 5
- substitution
  - règle de —, 24
- suite
  - de Cauchy, 104
  - de Dirac, 245
- support
  - d'une intégrale de Radon, 8
- surgraphe, 173
- symbole
  - de Pochhammer, 48
- symétrique
  - fonction, distribution, 260
  - opérateur —, 394
  - partie absolument —, 177
- système
  - de polynômes, 44
  - orthonormé, 38
- Tchebycheff
  - polynômes de —, 59
- tempéré
  - distribution —e, 242
  - fonction —e, 262

- tenseur, 127
- tensoriel
  - produit — (topologique inductif), 127
  - produit — (topologique projectif), 131
- test
  - espace —, 80
- théorème
  - de Baire, 123
  - de Banach-Steinhaus, 137, 141
  - de Bochner, 267
  - de Fenchel, 234
  - de Gelfand, 356
  - de Gelfand-Dunford, 194
  - de Gelfand-Mazur, 355
  - de Hahn-Banach, 163
  - de Krein, 193
  - de la majoration uniforme, 137, 140
  - de la projection, 13
  - de Lax-Milgram, 21
  - de Plancherel, 276
  - de Pythagore, 12
  - de représentation de Riesz, 18
  - de Riesz, 113
  - de Schwartz, 311
  - de Stampacchia, 20
  - de Stone, 454
  - de Stone-Weierstraß, 40
  - de Weierstraß, 46
  - de Wiener, 357
  - de Young, 280
  - du graphe fermé, d'isomorphie, 202
  - formule de Leibniz, 252
  - intégration par parties, 24, 26
  - lemme de Riemann-Lebesgue, 270
  - règle de substitution, 24
- Toeplitz
  - opérateur de —, 420
- tonnelé
  - espace localement convexe —, 125
- topologie
  - associée, définie par  $\mathcal{P}$ , 91
  - compatible avec une semi-dualité, 151
  - de la convergence bornée, 140
  - de la convergence compacte de toutes les dérivées, 97
  - de la convergence simple, compacte, 97
  - de Mackey, 186
  - faible, 138, 146
  - forte, 210
- topologique
  - dual, semi-dual —, 138
- total, 184
- transformation
  - de Hilbert, 288
  - de Legendre-Fenchel, 175
- translaté
  - distribution —e, 255
  - fonction —e, 254
- triple
  - de Gelfand, 380
- type
  - espace localement convexe de — dénombrable, 41
- ultrasphérique
  - polynômes —s, 61
- unifère
  - algèbre —, 348
- uniforme
  - ément convexe, 15
  - théorème de la majoration —, 137, 140
- universel
  - problème —
    - pour les applications bilinéaires, 126
  - propriété —le
    - pour la topologie localement convexe finale, 114
- valeur
  - absolue d'une intégrale de Radon, 152
  - propre, 409
  - spectrale, 354, 409
- variable
  - fonctions à —s séparées, 130
  - noyau à —s séparées, 158
- vecteur
  - bra, ket, 126, 146
  - ket, 17
  - propre, 409
- Volterra
  - équation intégrale de —, 352
  - opérateur intégral de —, 351
- Weierstraß
  - critère de —, 104, 107
  - théorème de —, 46
  - théorème de Stone- —, 40
- Whittaker

## INDEX

équation différentielle, fonctions de —,  
67

Wiener

théorème de —, 357

Young

théorème de —, 280