Appendice 2

LES POLYNOMES ORTHOGONAUX

CLASSIQUES

de

JACOBI

LAGUERRE

et

HERMITE

Version du 2 février 2004

2.1 Relations de récurrence

DEFINITION Soit $X \subset \mathbb{R}$ et μ une intégrales de Radon telle que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on ait

$$\int |\mathrm{id}|^k \, d\mu < \infty \, .$$

On dit que $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est un *système de polynômes orthogonaux* par rapport à μ si, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

(a) $p_k \in \mathcal{P}_k$, le sous-espace vectoriel des polynômes de degré $\leqslant k$,

(b) $p_{k+1} \perp \mathcal{P}_k$.

Soit J un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $\rho : J \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$. On dit que ρ est un *poids* si

$$\int |\mathrm{id}|^k \cdot \rho \, d\lambda_J < \infty$$

pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Nous utiliserons, pour tout $z \in \mathbb{C}$, la notation $z! := \Gamma(z+1)$ et rappelons la définition du coefficient binomial généralisé

$$\binom{z}{k} = \prod_{l=1}^{k} \frac{z-l+1}{l} \quad \text{pour tout } k \in \mathbb{N} \, .$$

THEOREME *Il existe une **relation de récurrence** de la forme*

$$\mathrm{id} \cdot p_k = a_k \cdot p_{k+1} + b_k \cdot p_k + c_k \cdot p_{k-1} \, ,$$

en ayant posé $p_{-1} = 0$ *. En outre si* $p_0 = g_0 \cdot 1$, $\widetilde{g_0} = 0$ *et*

$$p_k \in g_k \cdot \mathrm{id}^k + \widetilde{g_k} \cdot \mathrm{id}^{k-1} + \mathcal{P}_{k-2} \quad \textit{pour tout } k \in \mathbb{N}^* \, ,$$

on a $g_k \neq 0$ *et*

$$a_k = \frac{g_k}{g_{k+1}} \quad , \quad b_k = \frac{\widetilde{g_k}}{g_k} - \frac{\widetilde{g_{k+1}}}{g_{k+1}} \quad , \quad c_k = \frac{\|p_k\|_{2,\mu}}{\|p_{k-1}\|_{2,\mu}} \cdot a_{k-1} \, .$$

pour tout $k \in \mathbb{N}$ *.*

Si le système est orthonormé, alors

$$c_k = a_{k-1} \, .$$

2.2 Polynômes orthogonaux classiques

Les polynômes classiques orthogonaux sont caractérisés par le

THEOREME *Soient $\rho : J \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ un poids et $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ un système de polynômes orthogonaux associé à ρ . Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *est équivalent, i.e. après une transformation affine et une renormalisation, à un système classique de polynômes.*

(ii) ***Formule de Rodrigues***

Le poids ρ est indéfiniment dérivable, il existe un polynôme $p > 0$ sur J sans racine multiple tel que $p = 0$ sur ∂J et une suite $(d_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+^*$ tels que

$$p_k = \frac{1}{d_k \cdot \rho} \cdot \partial^k \left(\rho \cdot p^k\right) \quad \textit{pour tout } k \in \mathbb{N} \ .$$

(iii) ***Equation différentielle de type hypergéométrique***

Le poids ρ est continûment dérivable, il existe un polynôme $p > 0$ sur J de degré $\leqslant 2$ sans racine multiple tel que $p = 0$ sur ∂J et une suite $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ tels que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on ait

$$Lp_k := -\frac{1}{\rho} \cdot \partial \left(\rho \cdot p \cdot \partial p_k\right) = \lambda_k \cdot p_k$$

ou bien

$$p \cdot \partial^2 p_k + q \cdot \partial p_k + \lambda_k \cdot p_k = 0 \ ,$$

où

$$q := \frac{\partial \left(\rho \cdot p\right)}{\rho} \ .$$

Dans ce cas q est un polynôme de degré 1 ,

$$\lambda_k = -k \cdot \left[\partial q + \frac{k-1}{2} \cdot \partial^2 p\right]$$

et les constantes sont données dans la table qui suit :

	Jacobi $J_k^{(\alpha,\beta)}$	*Laguerre* $L_k^{(\alpha)}$	*Hermite* H_k
J	$]-1,1[$	$]0,\infty[$	$]-\infty,\infty[$
ρ	$(1-\mathrm{id})^\alpha \cdot (1+\mathrm{id})^\beta$ $\alpha,\beta > -1$	$\mathrm{id}^\alpha \cdot e^{-\mathrm{id}}$ $\alpha > -1$	$e^{-\mathrm{id}^2}$

	Jacobi $J_k^{(\alpha,\beta)}$	Laguerre $L_k^{(\alpha)}$	Hermite H_k
Normalisation	$J_k^{(\alpha,\beta)}(1) = \binom{\alpha+k}{k}$	$L_k^{(\alpha)}(0) = \binom{\alpha+k}{k}$	$H_k \in 2^k \cdot \mathrm{id}^k + \mathcal{P}_{k-1}$
g_k	$\frac{1}{2^k} \cdot \binom{\alpha+\beta+2k}{k}$	$\dfrac{(-1)^k}{k!}$	2^k
$\lVert p_k \rVert_{2,\rho}^2$	$\dfrac{2^{\alpha+\beta+1} \cdot (\alpha+k)! \cdot (\beta+k)!}{(\alpha+\beta+2k+1) \cdot k! \cdot (\alpha+\beta+k)!}$	$\dfrac{(\alpha+k)!}{k!}$	$\sqrt{\pi} \cdot 2^k \cdot k!$
a_k	$\dfrac{2(k+1)(\alpha+\beta+k+1)}{(\alpha+\beta+2k+1)(\alpha+\beta+2k+2)}$	$-(k+1)$	$\dfrac{1}{2}$
c_k	$\dfrac{2(\alpha+k)(\beta+k)}{(\alpha+\beta+2k)(\alpha+\beta+2k+1)}$	$-(\alpha+k)$	k
$\widetilde{g_k}$	$-\dfrac{(\beta-\alpha)}{2^k \cdot (k-1)!} \cdot \dfrac{(\alpha+\beta+2k-1)!}{(\alpha+\beta+k)!}$	$\dfrac{(-1)^{k-1} \cdot (\alpha+k)}{(k-1)!}$	0
b_k	$\dfrac{\beta^2-\alpha^2}{(\alpha+\beta+2k)(\alpha+\beta+2k+2)}$	$\alpha+2k+1$	0
p	$1-\mathrm{id}^2$	id	1
d_k	$(-1)^k \cdot 2^k \cdot k!$	$k!$	$(-1)^k$
λ_k	$k \cdot (\alpha+\beta+k+1)$	k	$2k$
q	$\beta-\alpha-(\alpha+\beta+2) \cdot \mathrm{id}$	$\alpha+1-\mathrm{id}$	$-2 \cdot \mathrm{id}$

2.3 Polynômes de Jacobi spéciaux

Legendre :

$$P_k = J_k^{(0,0)} \; .$$

Tchebycheff :

$$\begin{aligned} 1^{\text{e}} \text{ espèce} \quad T_k &= \frac{1}{\binom{-\frac{1}{2}+k}{k}} \cdot J_k^{\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)} \; . \\ 2^{\text{e}} \text{ espèce} \quad U_k &= \frac{k+1}{\binom{\frac{1}{2}+k}{k}} \cdot J_k^{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)} \; . \end{aligned}$$

Gegenbauer ou ultrasphériques :

$$G_k^{(\gamma)} = \frac{\binom{2\gamma+k-1}{k}}{\binom{\gamma-\frac{1}{2}+k}{k}} \cdot J_k^{\left(\gamma-\frac{1}{2},\gamma-\frac{1}{2}\right)} \quad \text{pour } 0 \neq \gamma > -\frac{1}{2} \; .$$

et

$$G_k^{(0)} = \lim_{\gamma \to 0} \frac{1}{\gamma} \cdot G_k^{(\gamma)} \; .$$

Les valeurs des différentes constantes sont données dans la table suivante :

	P_k	T_k	U_k	$G_k^{(\gamma)}$
ρ	1	$\left(1-\mathrm{id}^2\right)^{-\frac{1}{2}}$	$\left(1-\mathrm{id}^2\right)^{\frac{1}{2}}$	$\left(1-\mathrm{id}^2\right)^{\gamma-\frac{1}{2}}$
Normalisation en 1	1	1	$k+1$	$\binom{2\gamma+k-1}{k}$ si $\gamma \neq 0$; 1 si $k=0$, $\frac{2}{k}$ sinon, si $\gamma = 0$
$\lVert p_k \rVert_{2,\rho}$	$\frac{2}{2k+1}$	π si $k=0$; $\frac{\pi}{2}$ si $k>0$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi 2^{1-2\gamma}\Gamma(2\gamma+k)}{(\gamma+k)\cdot k!\cdot\Gamma(\gamma)^2}$ si $\gamma \neq 0$; 2 si $k=0$, $\frac{2\pi}{k^2}$ sinon, si $\gamma = 0$
a_k	$\frac{k+1}{2k+1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{k+1}{2(\gamma+k)}$
c_k	$\frac{k}{2k+1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2\gamma+k-1}{2(\gamma+k)}$

	P_k	T_k	U_k	$G_k^{(\gamma)}$
b_k	0	0	0	0
d_k	$(-1)^k\, 2^k \cdot k!$	$\frac{(-1)^k \cdot 2^k \cdot \Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}}$	$\frac{(-1)^k \cdot 2^{k+1} \cdot \Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)}{(k+1)\cdot\sqrt{\pi}}$	$\frac{(-1)^k \cdot 2^k \cdot k! \cdot \Gamma(2\gamma)\Gamma\left(\gamma+k+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2\gamma+k)\Gamma\left(\gamma+\frac{1}{2}\right)}$
λ_k	$k \cdot (k+1)$	k^2	$k\,(k+2)$	$k\,(2\gamma+k)$

2.4 Fonctions génératrices

Il est souvent utile de connaître la *fonction génératrice* associée à un système de polynômes orthogonaux $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et une suite $(\rho_k)_{k\in\mathbb{N}}$ convenable, que l'on introduit pour renormaliser les polynômes. Elle est définie par

$$\Phi(x,z) := \sum_{k=0}^{\infty} \rho_k \cdot p_k(x) \cdot z^k$$

pour tout $x \in J$ et $|z| < R$. En utilisant la théorie des fonctions on peut montrer que l'on a

	ρ_k	$\Phi(x,z)$	R
Jacobi $J_k^{(\alpha,\beta)}$	$2^{-(\alpha+\beta)}$	$\frac{\left(1-z+\sqrt{1-2xz+z^2}\right)^{-\alpha}\cdot\left(1+z+\sqrt{1-2xz+z^2}\right)^{-\beta}}{\sqrt{1-2xz+z^2}}$	1
Laguerre $L_k^{(\alpha)}$	1	$\frac{e^{xz/(z-1)}}{(1-z)^{\alpha+1}}$	1
Hermite H_k	$\frac{1}{k!}$	e^{2xz-z^2}	∞
Legendre P_k	1	$\frac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}}$	1
Tchebycheff T_k	1	$\frac{(1-xz)}{1-2xz+z^2}$	1
Tchebycheff U_k	1	$\frac{1}{1-2xz+z^2}$	1
Gegenbauer $G_k^{(\gamma)}$	1	$\begin{cases} \frac{1}{(1-2xz+z^2)^{\gamma}} & \text{si } \gamma \neq 0 \\ -\ln(1-2xz+z^2) & \text{si } \gamma = 0 \end{cases}$	1

2.5 Polynômes de Jacobi

$$J(k,\alpha,\beta,x) = \frac{(1-x)^{-\alpha}\cdot(1+x)^{-\beta}}{(-1)^k\cdot 2^k\cdot k!}\cdot D_{x^k}\left((1-x)^{\alpha}\cdot(1+x)^{\beta}\cdot\left(1-x^2\right)^k\right)$$

$$J(0,\alpha,\beta,x) = 1$$

$$J(1,\alpha,\beta,x) = \frac{1}{2}(\alpha+\beta+2)\,x + \frac{1}{2}(\alpha-\beta)$$

$$J(2,\alpha,\beta,x) =$$

$$= \frac{1}{8}(\alpha+\beta+4)(\alpha+\beta+3)\,x^2 + \frac{1}{4}(\alpha+\beta+3)(\alpha-\beta)\,x + \frac{1}{8}(\alpha-\beta)^2 - \frac{1}{8}(\alpha+\beta) - \frac{1}{2}$$

$$J(3,\alpha,\beta,x) =$$

$$= \frac{1}{48}(\alpha+\beta+6)(\alpha+\beta+5)(\alpha+\beta+4)\,x^3 + \frac{1}{16}(\alpha+\beta+5)(\alpha+\beta+4)(\alpha-\beta)\,x^2$$

$$+\frac{1}{16}(\alpha+\beta+4)\left((\alpha-\beta)^2-(\alpha+\beta)-6\right)x + \frac{1}{48}(\alpha-\beta)\left((\alpha-\beta)^2-3(\alpha+\beta)-16\right)$$

$$J(4,\alpha,\beta,x) =$$

$$= \frac{1}{384}(\alpha+\beta+8)(\alpha+\beta+7)(\alpha+\beta+6)(\alpha+\beta+5)\,x^4$$

$$+\frac{1}{96}(\alpha+\beta+7)(\alpha+\beta+6)(\alpha+\beta+5)(\alpha-\beta)\,x^3$$

$$+\frac{1}{64}(\alpha+\beta+6)(\alpha+\beta+5)\left((\alpha-\beta)^2-(\alpha+\beta)-8\right)x^2$$

$$+\frac{1}{96}(\alpha+\beta+5)(\alpha-\beta)\left((\alpha-\beta)^2-3(\alpha+\beta)-22\right)x$$

$$+\frac{1}{384}(\alpha-\beta)^4 - \frac{1}{64}(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)^2 - \frac{37}{384}(\alpha-\beta)^2 + 6\alpha\beta + \frac{7}{64}(\alpha+\beta) + \frac{3}{8}$$

2.6 Polynômes de Laguerre

$$L(k,\alpha,x) = \frac{x^{-\alpha}\cdot e^{x}}{k!}\cdot D_{x^k}\left(x^{\alpha}\cdot e^{-x}\cdot x^{k}\right)$$

$$L(0,\alpha,x) = 1$$

$$L(1,\alpha,x) = -x+\alpha+1$$

$$L(2,\alpha,x) = \frac{1}{2}x^2-(\alpha+2)\,x+\frac{1}{2}(\alpha+2)(\alpha+1)$$

$$L(3,\alpha,x) = -\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{2}(\alpha+3)\,x^2-\frac{1}{2}(\alpha+3)(\alpha+2)\,x+\frac{1}{6}(\alpha+3)(\alpha+2)(\alpha+1)$$

$$L(4,\alpha,x) =$$

$$= \frac{1}{24}x^4-\frac{1}{6}(\alpha+4)\,x^3+\frac{1}{4}(\alpha+4)(\alpha+3)\,x^2$$

$$-\frac{1}{6}(\alpha+4)(\alpha+3)(\alpha+2)\,x+\frac{1}{24}(\alpha+4)(\alpha+3)(\alpha+2)(\alpha+1)$$

$$L(5,\alpha,x) =$$

$$= -\frac{1}{120}x^5+\frac{1}{24}(\alpha+5)\,x^4-\frac{1}{12}(\alpha+5)(\alpha+4)\,x^3+\frac{1}{12}(\alpha+5)(\alpha+4)(\alpha+3)\,x^2$$

$$-\frac{1}{24}(\alpha+5)(\alpha+4)(\alpha+3)(\alpha+2)\,x+\frac{1}{120}(\alpha+5)(\alpha+4)(\alpha+3)(\alpha+2)(\alpha+1)$$

$$L(6,\alpha,x) =$$

$$= \frac{1}{720}x^6-\frac{1}{120}(\alpha+6)\,x^5+\frac{1}{48}(\alpha+6)(\alpha+5)\,x^4-\frac{1}{36}(\alpha+5)(\alpha+4)(\alpha+6)\,x^3$$

$$+\frac{1}{48}(\alpha+5)(\alpha+4)(\alpha+3)(\alpha+6)\,x^2-\frac{1}{120}(\alpha+5)(\alpha+4)(\alpha+3)(\alpha+2)(\alpha+6)\,x$$

$$+\frac{1}{720}(\alpha+6)(\alpha+5)(\alpha+4)(\alpha+3)(\alpha+2)(\alpha+1)$$

2.7 Polynômes de Hermite

$$H(k,x) = (-1)^k \cdot e^{x^2} \cdot D_{x^k}\left(e^{-x^2}\right)$$

$$H(0,x) = 1$$

$$H(1,x) = 2x$$

$$H(2,x) = 4x^2 - 2$$

$$H(3,x) = 8x^3 - 12x$$

$$H(4,x) = 16x^4 - 48x^2 + 12$$

$$H(5,x) = 32x^5 - 160x^3 + 120x$$

$$H(6,x) = 64x^6 - 480x^4 + 720x^2 - 120$$

$$H(7,x) = 128x^7 - 1344x^5 + 3360x^3 - 1680x$$

$$H(8,x) = 256x^8 - 3584x^6 + 13440x^4 - 13440x^2 + 1680$$

$$H(9,x) = 512x^9 - 9216x^7 + 48384x^5 - 80640x^3 + 30240x$$

$$H(10,x) = 1024x^{10} - 23040x^8 + 161280x^6 - 403200x^4 + 302400x^2 - 30240$$

$$H(11,x) =$$

$$= 2048x^{11} - 56320x^9 + 506880x^7 - 1774080x^5 + 2217600x^3 - 665280x$$

$$H(12,x) =$$
$$= 4096x^{12} - 135168x^{10} + 1520640x^8 - 7096320x^6 + 13305600x^4 - 7983360x^2 + 665280$$

$$H(13,x) =$$
$$= 8192x^{13} - 319488x^{11} + 4392960x^9 - 26357760x^7 + 69189120x^5 - 69189120x^3 + 17297280x$$

$$H(14,x) =$$
$$= 16384x^{14} - 745472x^{12} + 12300288x^{10} - 92252160x^8$$
$$+322882560x^6 - 484323840x^4 + 242161920x^2 - 17297280$$

$$H(15,x) =$$
$$= 32768x^{15} - 1720320x^{13} + 33546240x^{11} - 307507200x^9$$
$$+1383782400x^7 - 2905943040x^5 + 2421619200x^3 - 518918400x$$

$$H(16,x) =$$
$$= 65536x^{16} - 3932160x^{14} + 89456640x^{12} - 984023040x^{10} + 5535129600x^8$$
$$-15498362880x^6 + 19372953600x^4 - 8302694400x^2 + 518918400$$

$$H(17,x) =$$
$$= 131072x^{17} - 8912896x^{15} + 233963520x^{13} - 3041525760x^{11} + 20910489600x^9$$
$$-75277762560x^7 + 131736084480x^5 - 94097203200x^3 + 17643225600x$$

$$H(18,x) =$$
$$= 262144x^{18} - 20054016x^{16} + 601620480x^{14} - 9124577280x^{12} + 75277762560x^{10}$$
$$-338749931520x^8 + 790416506880x^6 - 846874828800x^4 + 317578060800x^2 - 17643225600$$

$$H(19,x) =$$
$$= 524288x^{19} - 44826624x^{17} + 1524105216x^{15} - 26671841280x^{13} + 260050452480x^{11}$$
$$-1430277488640x^9 + 4290832465920x^7 - 6436248698880x^5 + 4022655436800x^3 - 670442572800x$$

$$H(20,x) =$$
$$= 1048576x^{20} - 99614720x^{18} + 3810263040x^{16} - 76205260800x^{14} + 866834841600x^{12}$$
$$-5721109954560x^{10} + 21454162329600x^{8} - 42908324659200x^{6} + 40226554368000x^{4}$$
$$-13408851456000x^{2} + 670442572800$$

2.8 Polynômes de Legendre

$$P(k,x) = \frac{1}{(-1)^k \cdot 2^k \cdot k!} \cdot D_{x^k}\left(\left(1-x^2\right)^k\right)$$

$$P(0,x) = 1$$

$$P(1,x) = x$$

$$P(2,x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}$$

$$P(3,x) = \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x$$

$$P(4,x) = \frac{35}{8}x^4 - \frac{15}{4}x^2 + \frac{3}{8}$$

$$P(5,x) = \frac{63}{8}x^5 - \frac{35}{4}x^3 + \frac{15}{8}x$$

$$P(6,x) = \frac{231}{16}x^6 - \frac{315}{16}x^4 + \frac{105}{16}x^2 - \frac{5}{16}$$

$$P(7,x) = \frac{429}{16}x^7 - \frac{693}{16}x^5 + \frac{315}{16}x^3 - \frac{35}{16}x$$

$$P(8,x) = \frac{6435}{128}x^8 - \frac{3003}{32}x^6 + \frac{3465}{64}x^4 - \frac{315}{32}x^2 + \frac{35}{128}$$

$$P(9,x) = \frac{12155}{128}x^9 - \frac{6435}{32}x^7 + \frac{9009}{64}x^5 - \frac{1155}{32}x^3 + \frac{315}{128}x$$

$$P(10,x) = \frac{46189}{256}x^{10} - \frac{109395}{256}x^8 + \frac{45045}{128}x^6 - \frac{15015}{128}x^4 + \frac{3465}{256}x^2 - \frac{63}{256}$$

$$P(11,x) = \frac{88179}{256}x^{11} - \frac{230945}{256}x^9 + \frac{109395}{128}x^7 - \frac{45045}{128}x^5 + \frac{15015}{256}x^3 - \frac{693}{256}x$$

$$P(12,x) =$$
$$= \frac{676039}{1024}x^{12} - \frac{969969}{512}x^{10} + \frac{2078505}{1024}x^{8} - \frac{255255}{256}x^{6} + \frac{225225}{1024}x^{4} - \frac{9009}{512}x^{2} + \frac{231}{1024}$$

$$P(13,x) =$$
$$= \frac{1300075}{1024}x^{13} - \frac{2028117}{512}x^{11} + \frac{4849845}{1024}x^{9} - \frac{692835}{256}x^{7} + \frac{765765}{1024}x^{5} - \frac{45045}{512}x^{3} + \frac{3003}{1024}x$$

$$P(14,x) =$$
$$= \frac{5014575}{2048}x^{14} - \frac{16900975}{2048}x^{12} + \frac{22309287}{2048}x^{10} - \frac{14549535}{2048}x^{8}$$
$$+ \frac{4849845}{2048}x^{6} - \frac{765765}{2048}x^{4} + \frac{45045}{2048}x^{2} - \frac{429}{2048}$$

$$P(15,x) =$$
$$= \frac{9694845}{2048}x^{15} - \frac{35102025}{2048}x^{13} + \frac{50702925}{2048}x^{11} - \frac{37182145}{2048}x^{9}$$
$$+ \frac{14549535}{2048}x^{7} - \frac{2909907}{2048}x^{5} + \frac{255255}{2048}x^{3} - \frac{6435}{2048}x$$

$$P(16,x) =$$
$$= \frac{300540195}{32768}x^{16} - \frac{145422675}{4096}x^{14} + \frac{456326325}{8192}x^{12} - \frac{185910725}{4096}x^{10} + \frac{334639305}{16384}x^{8}$$
$$- \frac{20369349}{4096}x^{6} + \frac{4849845}{8192}x^{4} - \frac{109395}{4096}x^{2} + \frac{6435}{32768}$$

$$P(17,x) =$$
$$= \frac{583401555}{32768}x^{17} - \frac{300540195}{4096}x^{15} + \frac{1017958725}{8192}x^{13} - \frac{456326325}{4096}x^{11} + \frac{929553625}{16384}x^{9}$$
$$- \frac{66927861}{4096}x^{7} + \frac{20369349}{8192}x^{5} - \frac{692835}{4096}x^{3} + \frac{109395}{32768}x$$

$$P(18,x) =$$
$$= \frac{2268783825}{65536}x^{18} - \frac{9917826435}{65536}x^{16} + \frac{4508102925}{16384}x^{14} - \frac{4411154475}{16384}x^{12} + \frac{5019589575}{32768}x^{10}$$
$$- \frac{1673196525}{32768}x^{8} + \frac{156165009}{16384}x^{6} - \frac{14549535}{16384}x^{4} + \frac{2078505}{65536}x^{2} - \frac{12155}{65536}$$

$$P(19,x) =$$

$$= \frac{4418157975}{65536}x^{19} - \frac{20419054425}{65536}x^{17} + \frac{9917826435}{16384}x^{15} - \frac{10518906825}{16384}x^{13} + \frac{13233463425}{32768}x^{11}$$
$$- \frac{5019589575}{32768}x^{9} + \frac{557732175}{16384}x^{7} - \frac{66927861}{16384}x^{5} + \frac{14549535}{65536}x^{3} - \frac{230945}{65536}x$$

$$P(20,x) =$$

$$= \frac{34461632205}{262144}x^{20} - \frac{83945001525}{131072}x^{18} + \frac{347123925225}{262144}x^{16} - \frac{49589132175}{32768}x^{14} + \frac{136745788725}{131072}x^{12}$$
$$- \frac{29113619535}{65536}x^{10} + \frac{15058768725}{131072}x^{8} - \frac{557732175}{32768}x^{6} + \frac{334639305}{262144}x^{4} - \frac{4849845}{131072}x^{2} + \frac{46189}{262144}$$

2.9 Polynômes de Tchebycheff

1^{e} espèce

$$T(k,x) = \binom{-\frac{1}{2}+k}{k}^{-1} \cdot J\left(k,-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},x\right)$$

$$T(1,x) = 1$$

$$T(1,x) = x$$

$$T(2,x) = 2x^2 - 1$$

$$T(3,x) = 4x^3 - 3x$$

$$T(4,x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$$

$$T(5,x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x$$

$$T(6,x) = 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1$$

$$T(7,x) = 64x^7 - 112x^5 + 56x^3 - 7x$$

$$T(8,x) = 128x^8 - 256x^6 + 160x^4 - 32x^2 + 1$$

$$T(9,x) = 256x^9 - 576x^7 + 432x^5 - 120x^3 + 9x$$

$$T(10,x) = 512x^{10} - 1280x^8 + 1120x^6 - 400x^4 + 50x^2 - 1$$

$$T(11,x) = 1024x^{11} - 2816x^9 + 2816x^7 - 1232x^5 + 220x^3 - 11x$$

$$T(12,x) = 2048x^{12} - 6144x^{10} + 6912x^8 - 3584x^6 + 840x^4 - 72x^2 + 1$$

$$T(13,x) = 4096x^{13} - 13\,312x^{11} + 16\,640x^9 - 9984x^7 + 2912x^5 - 364x^3 + 13x$$

$$T(14,x) =$$
$$= 8192x^{14} - 28\,672x^{12} + 39\,424x^{10} - 26\,880x^8 + 9408x^6 - 1568x^4 + 98x^2 - 1$$

$$T(15,x) =$$
$$= 16\,384x^{15} - 61\,440x^{13} + 92\,160x^{11} - 70\,400x^9 + 28\,800x^7 - 6048x^5 + 560x^3 - 15x$$

$$T(16,x) =$$
$$= 32\,768x^{16} - 131\,072x^{14} + 212\,992x^{12} - 180\,224x^{10} + 84\,480x^8$$
$$-21\,504x^6 + 2688x^4 - 128x^2 + 1$$

$$T(17,x) =$$
$$65\,536x^{17} - 278\,528x^{15} + 487\,424x^{13} - 452\,608x^{11} + 239\,360x^9$$
$$-71\,808x^7 + 11\,424x^5 - 816x^3 + 17x$$

2^e^ espèce

$$U(k,x) = (k+1) \cdot \binom{\frac{1}{2}+k}{k}^{-1} \cdot J\left(k, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, x\right)$$

$$U(0,x) = 1$$

$$U(1,x) = 2x$$

$$U(2,x) = 4x^2 - 1$$

$$U(3,x) = 8x^3 - 4x$$

$$U(4,x) = 16x^4 - 12x^2 + 1$$

$$U(5,x) = 32x^5 - 32x^3 + 6x$$

$$U(6,x) = 64x^6 - 80x^4 + 24x^2 - 1$$

$$U(7,x) = 128x^7 - 192x^5 + 80x^3 - 8x$$

$$U(8,x) = 256x^8 - 448x^6 + 240x^4 - 40x^2 + 1$$

$$U(9,x) = 512x^9 - 1024x^7 + 672x^5 - 160x^3 + 10x$$

$$U(10,x) = 1024x^{10} - 2304x^8 + 1792x^6 - 560x^4 + 60x^2 - 1$$

$$U(11,x) = 2048x^{11} - 5120x^9 + 4608x^7 - 1792x^5 + 280x^3 - 12x$$

$$U(12,x) = 4096x^{12} - 11\,264x^{10} + 11\,520x^8 - 5376x^6 + 1120x^4 - 84x^2 + 1$$

$$U(13,x) = 8192x^{13} - 24\,576x^{11} + 28\,160x^9 - 15\,360x^7 + 4032x^5 - 448x^3 + 14x$$

$$U(14,x) =$$
$$16\,384x^{14} - 53\,248x^{12} + 67\,584x^{10} - 42\,240x^8 + 13\,440x^6 - 2016x^4 + 112x^2 - 1$$

$$U(15,x) =$$
$$= 32\,768x^{15} - 114\,688x^{13} + 159\,744x^{11} - 112\,640x^9 + 42\,240x^7 - 8064x^5 + 672x^3 - 16x$$

$$U(16,x) =$$
$$= 65\,536x^{16} - 245\,760x^{14} + 372\,736x^{12} - 292\,864x^{10} + 126\,720x^8$$
$$-29\,568x^6 + 3360x^4 - 144x^2 + 1$$

$$U(17,x) =$$
$$= 131\,072x^{17} - 524\,288x^{15} + 860\,160x^{13} - 745\,472x^{11} + 366\,080x^9$$
$$-101\,376x^7 + 14\,784x^5 - 960x^3 + 18x$$

2.10 Polynômes de Gegenbauer ou ultrasphériques

$$G(k,\gamma,x) = \frac{\Gamma(2\gamma+k)\cdot\Gamma\left(\gamma+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2\gamma)\cdot\Gamma\left(\gamma+k+\frac{1}{2}\right)}\cdot J\left(k,\gamma-\frac{1}{2},\gamma-\frac{1}{2},x\right)$$

$$G(0,\gamma,x) = 1$$

$$G(1,\gamma,x) = 2\gamma x$$

$$G(2,\gamma,x) = 2\gamma(\gamma+1)x^2-\gamma$$

$$G(3,\gamma,x) = \frac{4}{3}\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)x^3-2\gamma(\gamma+1)x$$

$$G(4,\gamma,x) = \frac{2}{3}\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)(\gamma+3)x^4-2\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)x^2+2(\gamma+1)\gamma$$

$$G(5,\gamma,x) =$$

$$= \frac{4}{15}\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)(\gamma+3)(\gamma+4)x^5$$

$$-\frac{4}{3}\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)(\gamma+3)x^3+\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)x$$

$$G(6,\gamma,x) =$$

$$= \frac{4}{45}\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)(\gamma+3)(\gamma+4)(\gamma+5)x^6$$

$$-\frac{2}{3}\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)(\gamma+3)(\gamma+4)x^4$$

$$+\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)(\gamma+3)x^2-\frac{1}{6}\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)$$

$$G(7,\gamma,x) =$$

$$= \frac{8}{315}\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)(\gamma+3)(\gamma+4)(\gamma+5)(\gamma+6)x^7$$

$$-\frac{4}{15}\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)(\gamma+3)(\gamma+4)(\gamma+5)x^5$$

$$+\frac{2}{3}\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)(\gamma+3)(\gamma+4)x^3$$

$$-\frac{1}{3}\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)(\gamma+3)x$$

$$G(8,\gamma,x) =$$

$$= \frac{2}{315}\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)(\gamma+3)(\gamma+4)(\gamma+5)(\gamma+6)(\gamma+7)x^8$$

$$-\frac{4}{45}\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)(\gamma+3)(\gamma+4)(\gamma+5)(\gamma+6)x^6$$

$$+\frac{1}{3}\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)(\gamma+3)(\gamma+4)(\gamma+5)x^4$$

$$-\frac{1}{3}\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)(\gamma+3)(\gamma+4)x^2$$

$$+\frac{1}{24}\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)(\gamma+3)$$

Cas $\gamma = 0$:

$$F(k,x) = \lim_{\gamma\to 0}\frac{1}{\gamma}\cdot\frac{\Gamma(2\gamma+k)\cdot\Gamma\left(\gamma+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2\gamma)\cdot\Gamma\left(\gamma+k+\frac{1}{2}\right)}\cdot J\left(k,\gamma-\frac{1}{2},\gamma-\frac{1}{2},x\right)$$

$$F(0,x) = 1$$

$$F(1,x) = 2x$$

$$F(2,x) = 2x^2-1$$

$$F(3,x) = \frac{8}{3}x^3-2x$$

$$F(4,x) = 4x^4-4x^2+\frac{1}{2}$$

$$F(5,x) = \frac{32}{5}x^5-8x^3+2x$$

$$F(6,x) = \frac{32}{3}x^6 - 16x^4 + 6x^2 - \frac{1}{3}$$

$$F(7,x) = \frac{128}{7}x^7 - 32x^5 + 16x^3 - 2x$$

$$F(8,x) = 32x^8 - 64x^6 + 40x^4 - 8x^2 + \frac{1}{4}$$