Philipps-Universität Marburg
Fachbereich Mathematik & Informatik

Alexander Alldridge
Claude Portenier

Funktionalanalysis I WS 03/04

Übungsblatt 1, Aufgabe 1

1. Sei F ein normierter Raum. Es ist zu zeigen, dass für alle $\varphi, \psi \in F \setminus \{0\}$ gilt

$$\left\| \frac{\varphi}{\|\varphi\|} - \frac{\psi}{\|\psi\|} \right\| \leq \frac{2}{\max\left(\|\varphi\|, |\psi\|\right)} \|\varphi - \psi\| .$$

Seien dazu wie vorausgesetzt $\varphi, \psi \in F \setminus \{0\}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{\varphi}{\|\varphi\|} - \frac{\psi}{\|\psi\|} \right\| & \overset{Nulladdition}{=} \left\| \frac{\varphi}{\|\varphi\|} + \frac{\psi}{\|\varphi\|} - \frac{\psi}{\|\varphi\|} - \frac{\psi}{\|\psi\|} \right\| \leq \\
& \overset{\triangle-Ungl.}{\leq} \underbrace{\left\| \frac{\varphi}{\|\varphi\|} - \frac{\psi}{\|\varphi\|} \right\| + \left\| \frac{\psi}{\|\varphi\|} - \frac{\psi}{\|\psi\|} \right\|}_{=:(\star)} = \\
& = \frac{\|\varphi - \psi\|}{\|\varphi\|} + \frac{\|\psi\|}{\|\psi\| \, \|\varphi\|} \Big| \, \|\psi\| - \|\varphi\| \, \Big| = \\
& = \frac{1}{\|\varphi\|} \Big(\|\varphi - \psi\| + \Big| \, \|\psi\| - \|\varphi\| \, \Big| \Big) \leq \\
& \overset{Umgek.\triangle-Ungl.}{\leq} \frac{2 \|\varphi - \psi\|}{\|\varphi\|}
\end{aligned}$$

Desweiteren gilt:

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{\varphi}{\|\varphi\|} - \frac{\psi}{\|\psi\|} \right\| & \overset{Nulladdition}{=} \left\| \frac{\varphi}{\|\varphi\|} + \frac{\varphi}{\|\psi\|} - \frac{\varphi}{\|\psi\|} - \frac{\psi}{\|\psi\|} \right\| \leq \\
& \overset{\triangle-Ungl.}{\leq} \left\| \frac{\varphi}{\|\varphi\|} - \frac{\varphi}{\|\psi\|} \right\| + \left\| \frac{\varphi}{\|\psi\|} - \frac{\psi}{\|\psi\|} \right\| \leq \\
& \overset{vgl.\ (\star)}{\leq} \ldots = \\
& = \frac{2 \|\varphi - \psi\|}{\|\psi\|}.
\end{aligned}$$

Das bedeutet aber gerade, dass

$$\left\| \frac{\varphi}{\|\varphi\|} - \frac{\psi}{\|\psi\|} \right\| \leq \frac{2}{\max\left(\|\varphi\|, |\psi\|\right)} \|\varphi - \psi\|$$

ist.

2. Sei $F := (\mathbb{R}^2, |\cdot|_\infty)$. Zu zeigen ist: Zu $\eta \in \,]0,2[$ gibt es $x, y \in F$ mit $|x|_\infty = 1$ und $|y|_\infty > 1$, sowie
$$\left| x - \frac{y}{|y|_\infty} \right|_\infty \geq \eta \, |x-y|_\infty \,.$$

Sei dazu zunächst $\eta \in \,]0,1[$. Definiere $x := (0,1)^T$ und $y := \left(0, 1 - \frac{2}{\eta}\right)^T$. Folglich ist $|x|_\infty = 1$ und $|y|_\infty = \left|1 - \frac{2}{\eta}\right| = \frac{2}{\eta} - 1 > 1$. Damit sind die geforderten Voraussetzungen an x und y erfüllt und es ergibt sich, dass
$$\left| x - \frac{y}{|y|_\infty} \right|_\infty = \left| (0,1)^T - (0,-1)^T \right|_\infty = 2 = \eta \, |x-y|_\infty$$
ist.

Sei nun $\eta \in [1,2[$. Definiere $x := (1,1)^T$ und $y := \left(\underbrace{2 - \frac{2}{\eta}}_{<1}, \underbrace{\frac{2}{\eta}}_{>1} \right)^T$. Es ist also $|x|_\infty = 1$ und $|y|_\infty = \frac{2}{\eta} > 1$. Damit sind die geforderten Voraussetzungen an x und y erfüllt und es ergibt sich, dass
$$\left| x - \frac{y}{|y|_\infty} \right|_\infty = \left| (1,1)^T - \left(\left(2 - \frac{2}{\eta}\right) \frac{\eta}{2}, 1 \right)^T \right|_\infty = \left| 1 - \left(2 - \frac{2}{\eta}\right) \frac{\eta}{2} \right| = 2 - \eta,$$
sowie
$$|x-y|_\infty = \left| (1,1)^T - \left(2 - \frac{2}{\eta}, \frac{2}{\eta}\right)^T \right|_\infty = \left| \left(-1 + \frac{2}{\eta}, 1 - \frac{2}{\eta}\right)^T \right|_\infty = \left| 1 - \frac{2}{\eta} \right|_\infty = \frac{2}{\eta} - 1$$
ist.
Es folgt, dass $\eta \, |x-y|_\infty = 2 - \eta = \left| y - \frac{y}{|y|_\infty} \right|_\infty$ gilt.

3. Sei $\mathcal{H}$ ein Prähilbertraum. Seien $\xi, \eta \in \mathcal{H} \setminus \{0\}$. Zu zeigen ist, dass unter diesen Voraussetzungen
$$\left\| \frac{\xi}{\|\xi\|} - \frac{\eta}{\|\eta\|} \right\| \leq \frac{\|\xi - \eta\|}{\min\left(\|\xi\|, \|\eta\|\right)}$$
gilt.

Mit $s(\varphi,\varphi) = \|\varphi\|^2$ für alle $\varphi \in \mathcal{H}$ gilt:

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{\xi}{\|\xi\|} - \frac{\eta}{\|\eta\|} \right\|^2 &= s\left(\frac{\xi}{\|\xi\|} - \frac{\eta}{\|\eta\|}, \frac{\xi}{\|\xi\|} - \frac{\eta}{\|\eta\|} \right) = \\
&= 1 - \frac{2\mathrm{Re}\left(s(\xi,\eta)\right)}{\|\xi\|\,\|\eta\|} + 1 = \\
&= \frac{\overbrace{2\|\xi\|\,\|\eta\| - 2\mathrm{Re}\left(s(\xi,\eta)\right)}^{\geq 0, da \|\xi\|\|\eta\| \geq 0}}{\|\xi\|\,\|\eta\|} \leq \\
&\leq \frac{2\|\xi\|\,\|\eta\| - 2\mathrm{Re}\left(s(\xi,\eta)\right)}{\left(\min\left(\|\xi\|, \|\eta\|\right)\right)^2} \leq \\
&\overset{Binomi}{\leq} \frac{\|\xi\|^2 + \|\eta\|^2 - 2\mathrm{Re}\left(s(\xi,\eta)\right)}{\left(\min\left(\|\xi\|, \|\eta\|\right)\right)^2} = \\
&= \frac{s(\xi-\eta, \xi-\eta)}{\left(\min\left(\|\xi\|, \|\eta\|\right)\right)^2} = \\
&= \frac{\|\xi-\eta\|^2}{\left(\min\left(\|\xi\|, \|\eta\|\right)\right)^2}.
\end{aligned}$$

Funktional-Analysis Zettel 1
Aufgabe 2

$p := 2 \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{K}$
Definiere Form via Polarisationsidentität:

$$s(\varphi, \psi) = \frac{1}{4} \sum_{\varepsilon^p = 1} \varepsilon \|\varphi - \overline{\varepsilon}\psi\|^2$$

Wenn dies positive hermitesche Sesquilinearform ist, folgt unmittelbar die Eindeutigkeit.
Zeigen: Hermitesch

$$\begin{aligned}
\overline{s(\varphi, \psi)} &= \frac{1}{4} \sum_{\varepsilon^p = 1} \overline{\varepsilon} \|\varphi - \overline{\varepsilon}\psi\|^2 = \frac{1}{4} \sum_{\varepsilon^p = 1} \overline{\varepsilon} \|\overline{\varepsilon}\varepsilon\varphi - \overline{\varepsilon}\psi\|^2 \\
&= \frac{1}{4} \sum_{\varepsilon^p = 1} \overline{\varepsilon} \mid \overline{\varepsilon} \mid^2 \|\psi - \varepsilon\varphi\|^2 = \frac{1}{4} \sum_{\varepsilon^p = 1} \varepsilon \|\psi - \overline{\varepsilon}\varphi\|^2 = s(\psi, \varphi)
\end{aligned}$$

Zeigen: positiv

$$\begin{aligned}
s(\varphi, \varphi) &= \frac{1}{4} \sum_{\varepsilon^p = 1} \varepsilon \|\varphi + \overline{\varepsilon}\psi\|^2 \\
&= \frac{1}{4} \big(\|\varphi + \varphi\|^2 - \|\varphi - \varphi\|^2 + i \cdot \|\varphi - i\varphi\|^2 - i \cdot \|\varphi + i\varphi\|^2 \big) \\
&= \|\varphi\|^2 \geq 0 \ \forall \varphi
\end{aligned}$$

Zeigen: Additivität

$$s(\varphi_1, \psi) + s(\varphi_2, \psi) = \frac{1}{4} \sum_{\varepsilon^p = 1} \varepsilon (\|\varphi_1 + \overline{\varepsilon}\psi\|^2 + \|\varphi_2 + \overline{\varepsilon}\psi\|^2) =: (*)$$

mit

$$\sqrt{2}\tilde{\varphi} = \varphi_1 + \overline{\varepsilon}\psi \quad \text{und} \quad \sqrt{2}\tilde{\psi} = \varphi_2 + \overline{\varepsilon}\psi$$

gilt

$$\tilde{\varphi} - \tilde{\psi} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_1 - \varphi_2) \quad \text{und} \quad \tilde{\varphi} + \tilde{\psi} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_1 + \varphi_2 + 2\overline{\varepsilon}\psi) \ .$$

Damit ist (Parallelogrammgleichung auf neue Elemente angewandt):

$$\begin{aligned}
(*) &= \frac{1}{4} \sum_{\varepsilon^p = 1} \frac{\varepsilon}{2} (\|\varphi_1 - \varphi_2\|^2 + \|\varphi_1 + \varphi_2 - 2\overline{\varepsilon}\psi\|^2) \\
&= \frac{1}{4} \sum_{\varepsilon^p = 1} \frac{\varepsilon}{2} \|\varphi_1 + \varphi_2 + 2\overline{\varepsilon}\psi\|^2 = \frac{1}{2} s(\varphi_1 + \varphi_2, 2\psi)
\end{aligned}$$

Somit

$$s(\varphi_1+\varphi_2,\psi)+s(\varphi_1-\varphi_2,\psi)=\frac{1}{2}s(2\varphi,2\psi)\ .$$

Für $0\le\alpha\in\mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned}\alpha s(\varphi,\psi)&=\frac{1}{4}\sum_{\varepsilon^p=1}\bar\varepsilon\alpha\|\varphi+\varepsilon\psi\|^2=\frac{1}{4}\sum_{\varepsilon^p=1}\bar\varepsilon\|\sqrt{\alpha}\varphi+\varepsilon\sqrt{\alpha}\psi\|^2\\&=s(\sqrt{\alpha}\varphi,\sqrt{\alpha}\psi)=s(2\varphi,\psi)+s(0,\psi)=\frac{1}{2}s(2\varphi,2\psi)=2s(\varphi,\psi)\end{aligned}$$

Schließlich

$$\frac{1}{2}s(\varphi_1+\varphi_2,2\psi)=\frac{1}{2}\overline{s(2\psi,\varphi_1+\varphi_2)}=\overline{s(\psi,\varphi_1+\varphi_2)}=s(\varphi_1+\varphi_2,\psi)\ .$$

$\mathbb{N}$-Homogenität:

$$s(n\varphi,\psi)=n\cdot s(\varphi,\psi)\ \forall n\in\mathbb{N}$$

$\mathbb{Z}$-Homogenität

$$s(\varphi,\psi)+s(-\varphi,\psi)=s(0,\psi)=0\ .$$

$\mathbb{Q}$-Homogenität:

$$s(\frac{1}{q}\varphi,\psi)=\frac{q}{q}s(\frac{1}{q}\varphi,\psi)=\frac{1}{q}s(\frac{q}{q}\varphi,\psi)=\frac{1}{q}s(\varphi,\psi)\ \forall q\in\mathbb{Z}^*\ .$$

Damit:

$$s(\frac{p}{q}\varphi,\psi)=\frac{p}{q}s(\varphi,\psi)\ .$$

Für $r\in\mathbb{R}$ und $r_k\in\mathbb{Q}$ mit $r=\lim_k r_k$

$$s(r\varphi,\psi)=s(\lim r_k\varphi,\psi)\overset{s\text{ stetig}}{=}\lim_k r_k\cdot s(\varphi,\psi)=r\cdot s(\varphi,\psi)\ .$$

Jetzt i herausziehen (Fall $\mathbb{K}=\mathbb{C}$):

$$\begin{aligned}s(i\varphi,\psi)&=\frac{1}{4}\sum_{\varepsilon^4=1}\varepsilon\|i\varphi+\bar\varepsilon\psi\|^2=\frac{1}{4}\sum_{\varepsilon^4=1}\varepsilon\|\varphi-i\bar\varepsilon\psi\|^2\\&\overset{\varepsilon\mapsto-i\varepsilon}{=}\frac{1}{4}\sum_{\varepsilon^4=1}-i\varepsilon\|\varphi+\bar\varepsilon\psi\|^2=-i\cdot s(\varphi,\psi)\ .\end{aligned}$$

Damit ist die gewählte Form die einzige positive, Hermitesche Sesquilinearform auf F unter, die $\|\cdot\|$ definiert. $\square$

Protokoll zu Aufgabe 1 (Übungsblatt 2) (Die fastperiodischen Funktionen)

(a) Zu Zeigen: $\lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\overline{e_\lambda}\cdot e_\mu = \delta_{\lambda\mu} \quad \forall\lambda,\mu\in\mathbb{R}$

Beweis: $\lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\overline{e_\lambda}\cdot e_\mu \underset{Def.}{=} \lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\exp(-2\pi\cdot i\lambda x + 2\pi\cdot i\mu x)dx$

- $\lambda\neq\mu$:

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\exp(2\pi\cdot ix(\mu-\lambda))dx$$
$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\cdot\left[\frac{1}{2\pi\cdot i(\mu-\lambda)}\cdot\exp(2\pi\cdot ix(\mu-\lambda))\right]_{-T}^{T}$$
$$=\frac{1}{2\pi\cdot i(\mu-\lambda)}\cdot\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\left(\exp(2\pi\cdot iT(\mu-\lambda))-\exp(-2\pi\cdot iT(\mu-\lambda))\right)$$
$$=\frac{1}{2\pi\cdot i(\mu-\lambda)}\cdot\lim_{T\to\infty}\underbrace{\frac{1}{2T}\underbrace{\begin{pmatrix}\cos(2\pi\cdot T(\mu-\lambda))+i\sin(2\pi\cdot T(\mu-\lambda))\\-\cos(2\pi\cdot T(\mu-\lambda))+i\sin(2\pi\cdot T(\mu-\lambda))\end{pmatrix}}_{beschränkt}}_{\xrightarrow[T\to\infty]{}0}=0$$

- $\lambda=\mu$:

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\exp(0)dx=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}1dx=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\cdot(T+T)=1$$

□

(b) Zu Zeigen: $(\varphi,\psi)\mapsto(\varphi\,|\,\psi):=\lim\limits_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}\overline{\varphi}\cdot\psi$ definiert Skalarprodukt auf $\mathcal{TP}$.

Beweis:

(i) $(\cdot\,|\,\cdot)$ Sesquilinearform:

$$(\varphi+\chi\,|\,\psi)$$
$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\overline{(\varphi+\chi)}\cdot\psi$$
$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}(\overline{\varphi}+\overline{\chi})\cdot\psi$$
$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}(\overline{\varphi}\psi+\overline{\chi}\psi)$$
$$=\lim_{T\to\infty}\left(\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\overline{\varphi}\psi+\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\overline{\chi}\psi\right)$$
$$\underset{(*)}{=}\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\overline{\varphi}\psi+\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\overline{\chi}\psi$$
$$=(\varphi\,|\,\psi)+(\chi\,|\,\psi)$$

(*): Nehmen an: lim existiert

$(\alpha\cdot\varphi\,|\,\psi) = \overline{\alpha}\cdot(\varphi\,|\,\psi)$ folgt aus $\overline{\alpha\varphi} = \overline{\alpha}\cdot\overline{\varphi}$, der Linearität des Integrals und der „Linearität“ des Limes.

(ii) $(\cdot\,|\,\cdot)$ hermitesch: folgt, da T aus ℝ, $\overline{\alpha\varphi} = \overline{\alpha}\cdot\overline{\varphi}$, $\overline{\overline{\varphi}} = \varphi$.

(iii) $(\cdot\,|\,\cdot)$ nicht ausgeartet:

Es genügt, aufgrund der Sesquilinearität von $(\cdot\,|\,\cdot)$ und der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung, zu zeigen: $(\varphi\,|\,\varphi) = 0 \Rightarrow \varphi = 0$

<u>B:</u> φ trigonometrisches Polynom $\Rightarrow \varphi = \sum \varphi_\lambda e_\lambda$

$$
\begin{aligned}
&(\varphi\,|\,\varphi)\\
&= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}(\overline{\sum \varphi_\lambda e_\lambda}\cdot\sum\varphi_\mu e_\mu)\\
&= \sum_\lambda \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\overline{\varphi_\lambda}\,\overline{e_\lambda}\varphi_\lambda e_\lambda\\
&= \sum_\lambda \overline{\varphi_\lambda}\varphi_\lambda \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\underbrace{\overline{e_\lambda}e_\lambda}_{=1}\\
&= \sum_\lambda \overline{\varphi_\lambda}\varphi_\lambda = \sum_\lambda |\varphi_\lambda|^2 = 0\\
&\Rightarrow \varphi_\lambda = 0 \qquad \forall\lambda
\end{aligned}
$$

(c) $$\left|\|\varphi\|_{TP} - \|\psi\|_{TP}\right|^2 \le \|\varphi-\psi\|_{TP}^2 = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\underbrace{|\varphi-\psi|^2}_{\le\|\varphi-\psi\|_\infty^2} \le \|\varphi-\psi\|_\infty^2$$

$\|\cdot\|_{TP}$ glm. stetig in $\|\cdot\|_\infty$:

Sei $\varepsilon > 0$: $\|\varphi-\psi\|_\infty \le \varepsilon \Rightarrow \left|\|\varphi\|_{TP} - \|\psi\|_{TP}\right| \le \varepsilon$

$\Rightarrow \exists!$ stetige Fortsetzung $\|\cdot\|_{FP}$ auf $\mathcal{FP}$ von $\|\cdot\|_{TP}$. (Ana HS 10.21)

Zu $\varphi,\psi \in \mathcal{FP}$ $\exists (x_l),(y_k) \subset \mathcal{TP}$ mit $\varphi = \lim\varphi_l, \psi = \lim\psi_k$

$$2(\|\varphi\|_{FP}^2 + \|\psi\|_{FP}^2) = 2(\|\lim\varphi_k\|_{FP}^2 + \|\lim\psi_k\|_{FP}^2) \underset{\|\cdot\|_{fp}\,stetig}{=} 2\lim(\|\varphi_k\|_{FP}^2 + \|\psi_k\|_{FP}^2)$$

$$= \lim(\|\varphi_k - \psi_k\|_{\substack{FP\\TP}}^2 + \|\varphi_k + \psi_k\|_{\substack{FP\\TP}}^2) = \|\varphi-\psi\|_{FP}^2 + \|\varphi+\psi\|_{FP}^2$$

$$\Rightarrow (\varphi\,|\,\psi)_{FP} = \frac{1}{4}\sum_{\varepsilon^4=1}\varepsilon\|\varphi + \overline{\varepsilon}\psi\|_{FP}^2$$ (Blatt 1, Aufgabe 2)

$$(\varphi\,|\,\psi)_{FP}\big|_{TP\times TP} = (\varphi\,|\,\psi)_{TP}$$

Fehlt noch: Norm ist nicht ausgeartet.

$\|\varphi\|_{FP} = 0, \varphi = \lim\varphi_k \Rightarrow 0 = \|\varphi\|_{FP} = \lim\|\varphi_k\|_{FP}$

Es folgt nicht $\varphi_k = 0$! Also auch nicht $\varphi = 0$!

Für diesen Beweis fehlen uns weitere Eigenschaften der fastperiodischen Funktionen.

Fachbereich Mathematik und Informatik
Philipps-Universität Marburg

Lösungsblatt 2

Aufgabe 2 Die Unterräume M und N sind abgeschlossen. Denn ist etwa $\varphi \in \mathcal{C}([-1,1])$ mit $\varphi_k \in M$, so dass

$$\varphi = \lim_k \varphi_k \qquad \text{in} \quad \left(\mathcal{C}([-1,1]), \|\cdot\|_2\right) ,$$

so gilt nach Riesz-Fischer $\varphi(x) = \varphi_{\alpha(k)}(x)$ für eine Teilfolge α und fast alle $x \geqslant 0$. Somit $\varphi = 0$ fast überall auf $[0,1]$. Aus der Stetigkeit von φ folgt $\varphi = 0$ überall auf $[0,1]$. Damit ist $\varphi \in M$ und M ist abgeschlossen. Ebenso für N .

Offenbar gilt $1 \notin M + N$. Denn wäre $1 = \varphi + \psi$ mit $\varphi = 0$ auf $[-1,0]$ und $\psi = 0$ auf $[0,1]$, so würde $1 = \varphi(0) + \psi(0) = 0$ folgen. Definiert man aber

$$f_k(t) = \begin{cases} 1 & & |t| > \frac{1}{k+1} \\ -(k+1)\,t & \text{falls} & -\frac{1}{k+1} \leqslant t < 0 \\ (k+1)\,t & & 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{k+1} \end{cases}$$

so ist $f_k \in M + N$. Zudem gilt $1 - f_k \longrightarrow 0$ pktw. f.ü. und

$$|1 - f_k|^2 \leqslant 1 \in \mathbf{L}^1([-1,1]) .$$

Nach Lebesgue folgt

$$1 = \lim_k f_k \qquad \text{in} \quad \left(\mathcal{C}([-1,1]), \|\cdot\|_2\right) .$$

Damit ist $M + N$ nicht abgeschlossen.

Die entsprechenden Unterräume

$$M' := \left\{\varphi \in \mathbf{L}^2([-1,1]) \mid \varphi(x) = 0 \text{ für fast alle } x \geqslant 0\right\}$$

und

$$N' := \left\{\varphi \in \mathbf{L}^2([-1,1]) \mid \varphi(x) = 0 \text{ für fast alle } x \leqslant 0\right\}$$

von $\mathbf{L}^2([-1,1])$ sind abgeschlossen als Kerne der stetigen Abbildungen

$$f \longmapsto 1_A \cdot f : \mathbf{L}^2([-1,1]) \longrightarrow \mathbf{L}^2([-1,1])$$

mit jeweils $A = [0,1]$ und $A = [-1,0]$. Die Summe $M' + N' = \mathbf{L}^2([-1,1])$, da

$$f = 1_{[0,1]} \cdot f + 1_{[-1,0]} \cdot f \qquad \text{für alle} \quad f \in \mathbf{L}^2([-1,1]) .$$

Insbesondere ist die Summe abgeschlossen.

Philipps-Universität Marburg
Fachbereich Mathematik & Informatik

Claude Portenier
Alexander Alldridge

Funktionalanalysis I
Blatt 2, Aufgabe 3

(a) $\Rightarrow$ (b):
Sei P eine orthogonale Projektion, d.h. es existiert $\mathcal{G}$ vollständiger UVR von $\mathcal{H}$ mit $P = P_{\mathcal{G}}$.
Dann gilt mit dem Projektionssatz:

$$(P(\xi)|\eta) = (P(\xi)|\eta - P(\eta) + P(\eta)) = \underbrace{(P(\xi)|\eta - P(\eta))}_{=0} + (P(\xi)|P(\eta)) \underset{P(\eta)\in\mathcal{G}}{=} (\xi|P(\eta))$$

(b) $\Rightarrow$ (c):
Es ist zu zeigen, dass P stetig ist mit $\|P\| \leq 1$, d.h

$$\|P(\xi - \eta)\| \leq \|\xi - \eta\|$$

für alle ξ, η aus $\mathcal{H}$.
Seien ξ, η aus $\mathcal{H}$. Für $\|P(\xi - \eta)\| = 0$ ist die obige Ungleichung erfüllt, sei also $\|P(\xi - \eta)\|$ echt größer null. Dann gilt:

$$\|P(\xi - \eta)\|^2 = (P(\xi - \eta)|P(\xi - \eta)) \underset{(a)}{=} (\xi - \eta|P^2(\xi - \eta)) =$$

$$\underset{(P^2=P)}{=} (\xi - \eta|P(\xi - \eta)) \underset{(CSU)}{\leq} \|\xi - \eta\|\|P(\xi - \eta)\|$$

Durch Division mit $\|P(\xi - \eta)\|$ erhält man die Ungleichung.

(c) $\Rightarrow$ (d):
Es ist zu zeigen, dass $P(\mathcal{H}) = Ker(P)^{\perp}$.
Zunächst bemerkt man, dass

$$P(\xi) = \xi \Leftrightarrow \xi \in P(\mathcal{H}) \forall \xi \in \mathcal{H}$$

Die Hinrichtung ist klar. Für die Rückrichtung sei ξ aus $\mathcal{H}$. D.h. es existiert η aus $\mathcal{H}$ mit $P(\eta) = \xi$. Dann gilt $P(\xi) = P^2(\eta) = P(\eta) = \xi$ und somit auch die Rückrichtung.

Nun kann man zeigen, dass $Ker(P)^{\perp} \subset P(\mathcal{H})$:
Sei ξ aus $Ker(P)^{\perp}$. Dann ist $P(P(\xi) - \xi) = 0$, also $P(P(\xi) - \xi)$ in $Ker(P)^{\perp}$.
D.h. es existiert $x \in Ker(P)$ mit $P(\xi) = x + \xi$.
Da P 1-lipschitzstetig, gilt $\|P(\xi)\| \leq \|\xi\|$ und damit:

$$\|\xi + x\| \leq \|\xi\| \Leftrightarrow \|\xi + x\|^2 \leq \|\xi\|^2 \Leftrightarrow \|\xi\|^2 + \underbrace{(x|\xi) + (\xi|x)}_{=0} + \|x\|^2 \leq \|\xi\|^2 \Leftrightarrow \|x\|^2 = 0$$

Also folgt $P(\xi) = \xi$ und somit $\xi \in P(\mathcal{H})$. Dies zeigt auch, dass $\|P\| = 1$

Es bleibt noch die andere Inklusion zu zeigen.
Sei ξ aus $P(\mathcal{H})$. Da P stetig, ist $Ker(P)$ abgeschlossen und damit vollständig. Nach dem Projektionssatz existiert dann eine orthogonale eine Zerlegung

$$\xi = \xi_{Ker(P)} + \xi_{Ker(P)^\perp}$$

Daraus folgt dann mit obiger Bemerkung:

$$\xi = P(\xi) = P(\xi_{Ker(P)}) + P(\xi_{Ker(P)^\perp}) = P(\underbrace{\xi_{Ker(P)^\perp}}_{\in P(\mathcal{H})}) = \xi_{Ker(P)^\perp}$$

also ξ in $Ker(P)^\perp$

(d) $\Rightarrow$ (a):
Es ist zu zeigen, dass $P = P_\mathcal{G}$ für einen vollständigen UVR $\mathcal{G}$ von $\mathcal{H}$
Da $Kern(P)$ vollständig, ist mit dem Projektionssatz auch $Ker(P)^\perp$ abgechlossen und somit ebenfalls vollständig. Wähle also $\mathcal{G} := Ker(P)^\perp$. Nach dem Projektionssatz bleibt zu zeigen:

$$\xi - P(\xi) \perp \mathcal{G} \forall \xi \in \mathcal{H}$$

Da jedoch $\xi - P(\xi) \in Ker(P)$, folgt die Behauptung.

Funktionalanalysis I

Aufgabenblatt 3, Aufgabe 1

von Eckhard Kühn

3. Dezember 2003

Es gilt $\overline{F}^{\perp} = F^{\perp} \Rightarrow \mathbf{H} = \overline{F}^{\perp} \oplus F^{\perp}$ Proj. Satz

Behauptung:

$$\mu : F \to \mathbf{K} \text{ glm. stetig}$$

zu zeigen:

$$\forall\ \epsilon > 0\ \exists\ \delta > 0\ \forall\ \varphi, \psi \in F,$$

$$\| \varphi - \psi \| \leq \delta \Rightarrow | \mu(\varphi - \psi) | \leq \epsilon.$$

dazu

$$| \mu(\varphi - \psi) | \leq \| \mu \| \| \varphi - \psi \| \ , \ \| \varphi \| < \infty, \text{ da } \mu \text{ stetig}$$

setze $\delta := \frac{\epsilon}{\mu}$

$\Rightarrow \exists!$ stetige Fortsetzung $\tilde{\mu}$ von μ auf F, $\tilde{\mu}$ ist Linearform

$$\overset{Riesz}{\Rightarrow} \exists! \xi \in \overline{F} : \tilde{\mu}(\varphi) = (\xi|\varphi) \forall \varphi \in \overline{F}$$

Setze $\nu(\varphi) := (\xi|\varphi)\ \forall \varphi \in \mathbf{H}$

$$\forall \varphi \in F^{\perp} : \nu(\varphi) = (\xi|\varphi) = 0$$

$$\Rightarrow \nu \mid_{F^{\perp}} = 0$$

Sei $\tilde{\nu}$ weitere stetige lineare Fortsetzung von μ mit $\tilde{\nu} \mid_{F^{\perp}} = 0$

$\forall \varphi \in \overline{F}^{\perp} : \tilde{\nu}(\varphi) = \nu(\varphi) = 0$

$\forall \varphi \in \overline{F} : \tilde{\nu}(\varphi) = \tilde{\nu}(\lim(\varphi_k) = \lim \tilde{\nu}(\varphi_k) = \lim \mu(\varphi_k) = \lim \nu(\varphi_k) = \nu(\lim \varphi_k) = \nu(\varphi)$

$$\Rightarrow \tilde{\nu} = \nu \text{ auf } \mathbf{H} = \overline{F} \oplus \overline{F}^{\perp}.$$

Fachbereich Mathematik und Informatik
Philipps-Universität Marburg

Lösungsblatt 3

Aufgabe 2 Sei $K \subset \{f < 0\} \cap J^\circ$ eine kompakte Menge. Sei $G = (F - F)_\mathbb{R}$ der von F aufgespannte $\mathbb{R}$-Vektorraum. Da $G \subset \mathbf{L}^1_\mathbb{R}(J) \ni 1_K$ dicht ist, gibt es eine Folge $\varphi_k \in G$ mit $1_K = \lim_k \varphi_k$ in $\mathbf{L}^1_\mathbb{R}(J)$. Nach Riesz-Fischer kann man durch Übergehen zu einer Teilfolge annehmen, dass φ_k punktweise fast überall gegen 1_K konvergiert.

Sei $K \subset [a, b] \subset J^\circ$. Falls $F = \mathcal{K}_+$, wähle zudem $[a, b] \subset]c, d[\subset [c, d] \subset J$ und eine stetige Funktion φ mit $1_{[a,b]} \leqslant \varphi \leqslant 1_{[c,d]}$. Setze

$$\psi = \begin{cases} \varphi & \\ & \text{falls} \\ 1_{[a,b]} & \end{cases} \begin{matrix} F = \mathcal{K}_+ \\ \\ F = \mathcal{T}_+ \end{matrix}$$

Es gilt

$$|1_K - \min(\psi, \max(0, \varphi_k))| = \begin{cases} |1_K - \varphi_k| & \\ 1 < |1_K - \varphi_k| & \text{auf} \\ \psi - 1_K < \varphi_k - 1_K & \end{cases} \begin{matrix} \{0 \leqslant \varphi_k \leqslant \psi\} \\ \{\varphi_k < 0\} \\ \{\psi < \varphi_k\} \end{matrix} \quad \leqslant |1_K - \varphi_k| \ ,$$

also

$$1_K = \lim_k \psi_k \quad \text{punktweise } \lambda\text{-f.ü., wobei} \quad \psi_k = \min\left(\psi, \varphi_k^+\right) \in F \ .$$

Weiterhin

$$|\psi_k \cdot f| \leqslant \psi \cdot |f| \leqslant 1_{[c,d]} \cdot |f| \in \mathbf{L}^1(J) \ ,$$

so dass mit dem Satz von Lebesgue folgt

$$0 \leqslant \lim_k \int_J \psi_k \cdot f \, d\lambda = \int 1_K \cdot f \, d\lambda \leqslant 0 \ .$$

Da $-1_K \cdot f \geqslant 0$ ist, folgt $f = 0$ λ-f.ü. auf K . Da $\{f < 0\} \subset J$ die abzählbare Vereinigung kompakter Mengen ist und ∂J eine Nullmenge, folgt schließlich, dass $f \geqslant 0$ fast überall.

Funktional-Analysis Zettel 3
Aufgabe 3

Teil a):

Definiere $\mu : K(J) \to \mathbb{K}$ via $\varphi \mapsto \int \varphi \; d\lambda$ (ist linear)

Es gilt: $\partial K^{(1)}(J) \subset K(J)$ ist UVR

Jetzt: $\forall \varphi \in \partial K^{(1)}(J)$ gilt: $\mu(\varphi) = \int \varphi = \int \partial\psi$ mit $\psi \in K^{(1)}(J)$, dass heisst $= [\psi]_{infJ}^{supJ} = 0$
Da $\mu \neq 0$ $\exists$ $\chi \in K(J)$ mit $\mu(\chi) \neq 0$
$< \chi > \subset$ $K(J)$ ist eindim. UVR und es gilt: $\mu(< \chi >) = \mathbb{K}$

Wid.-Annahme: $\exists \varphi \in (\partial K^{(1)}(J) \cap < \chi >)$ *ohne* $\{o\}$
$\Rightarrow \varphi = \alpha\chi$ mit $\alpha \neq 0$ und $\mu(\varphi) = 0$ aber $\mu(\alpha\chi) = \alpha\mu(\chi) \neq 0$
Also ist die Annahme falsch und der Schnitt besteht nur aus der Null.

Wir zeigen nun: $Ker\mu = \partial K^{(1)}(J)$
Die eine Inklusion wissen wir schon. Also sei nun $\varphi \in Ker(\mu)$
$\Rightarrow \exists\ a, b \in J$ ausserhalb $[a, b]$ mit $\varphi = 0$ ausserhalb $[a, b]$
$\mu(\varphi) = 0 = \int_a^b \varphi(x)dx$
$\psi := \int_a^{\cdot} \varphi \in C^{(1)}(J)$ ist stetig diffbar. Z.z.: Kompakter Träger ($\Rightarrow \varphi = \partial\psi$)
Nun ist $\psi(x)$ $= 0$ für $x < a$ und $x > b$
$\Rightarrow$ *supp* ψ kompakt, da *supp* $\psi \subset [a, b]$ d.h. $\varphi \in \partial K^{(1)}(J)$

Für $\varphi \in K(J)$ gilt:

$$\varphi = \underbrace{(\varphi - \frac{\mu(\varphi)}{\mu(\chi)}\chi)}_{\in Ker\mu = \partial K^{(1)}(J)} + \underbrace{\frac{\mu(\varphi)}{\mu(\chi)}\chi}_{\in <\chi>}$$

Daraus folgt nun insgesamt die Behauptung.

Teil b):

Sei $\varphi \in K(J)$
Nach Teil a) $\exists ! c_\varphi \in \mathbb{K}$ mit $\varphi = \partial\psi + c_\varphi\chi$ und mit $\int \chi \; d\lambda = 1$
$\Rightarrow \int \varphi f \; d\lambda = \underbrace{\int \partial\psi f \; d\lambda}_{=0 \; n.V.} + c_\varphi \int \chi f \; d\lambda = c_\varphi \int \chi f \; d\lambda$

und $\int \varphi \; d\lambda = c_\varphi \int \chi \; d\lambda = c_\varphi$

$\Rightarrow_{oben\ einsetzen} \int \varphi f \; d\lambda = \int \varphi \; d\lambda \; \underbrace{\int \chi f \; d\lambda}_{=c}$

$\Rightarrow \int \varphi(f-c) \; d\lambda = 0 \; \forall \; \varphi \subset K(J)$ (Man müsste hier (f-c) eigentlich in Real- und Imaginärteil zerlegen.)

$\Rightarrow$ mit A.2 $f = c$ λ- f.ü.

Teil c):

Sei $\varphi \in K^{(1)}(J)$ und $f : J \to \mathbb{K}$ lok. intergrierbar

Es gilt: $\varphi \in C^{(1)}(J) \Rightarrow \varphi \in AC(J)$

Definiere $F := \int_\tau^\cdot f \; d\lambda, \quad \tau \in J$ also $\in AC(J)$

$\Rightarrow_{part.\ Int.} \quad \int_J \partial\varphi F \; d\lambda = \underbrace{[\varphi F]_{infJ}^{supJ}}_{=0} - \int_J \varphi \partial F \; d\lambda = 0$ denn $\partial F = f$ und $\varphi \in K^{(1)}(J)$ nach Vor.

F ist stetig (Lemma 1.7(iv)) und lok.-int.

$\Rightarrow_{Teil\ b)} \quad F$ λ-f.ü. konst.

$\Rightarrow_{Lemma(v)}$ $f = 0$ λ- f.ü.

Funktionalanalysis I

Lösungsblatt 4

Aufgabe 1

(a) Seien M, N abgeschlossen, also vollständig, da $\mathcal{H}$ vollständig ist. Es gibt zugeordnete Orthogonalprojektionen P_M und P_N . Nun gilt

$$(P_M + P_N)^2 = P_M^2 + P_M P_N + P_N P_M + P_N^2 = P_M + P_N \ ,$$

da $M \perp N$. Die Projektion $P_M + P_N$ ist orthogonal, da

$$((P_M + P_N)\,\xi|\,\eta) = (P_M\xi|\,\eta) + (P_N\xi|\,\eta) = (\xi\,|P_M\eta) + (\xi\,|P_N\eta) = (\xi\,|(P_M + P_N)\,\eta)$$

für alle $\xi, \eta \in \mathcal{H}$, und nach Aufgabe 3 auf Blatt 2. Damit ist das Bild

$$(P_M + P_N)\,(\mathcal{H}) = M + N$$

vollständig, also abgeschlossen.

Sei nun $M \oplus N$ abgeschlossen. Offenbar gilt

$$M = N^\perp \cap (M \oplus N) \quad \text{und} \quad N = M^\perp \cap (M \oplus N) \ .$$

Damit sind M bzw. N als Schnitt abgeschlossener Mengen abgeschlossen.

Ein 'elementarer' Beweis der Implikation M, N abgeschlossen $\Longrightarrow$ $M + N$ abgeschlossen könnte etwa so lauten: Da $M \perp N$, ist die Summe $M + N$ direkt. Falls M und N abgeschlossen sind, sind sie vollständig. Sei $\xi_k \in M \oplus N$ eine Folge, die gegen $\xi \in \mathcal{H}$ konvergiert. Nach Projektionssatz ist P_M stetig und die Folge $\eta_k = P_M \xi_k \in M$ konvergiert gegen $\eta = P_M \xi \in M$. Es folgt

$$\xi - \eta = \lim\nolimits_k\,(\xi_k - \eta_k) = \lim\nolimits_k P_N \xi_k \in N \ ,$$

da N abgeschlossen ist. Also ist $\xi \in M \oplus N$ und $M \oplus N$ ist abgeschlossen.

(b) Für $k \in \mathbb{N}$ sind die Linearformen

$$\varepsilon_{2k} : \xi \longmapsto \xi\,(2k) \quad \text{und} \quad \varepsilon_{2k+1} : \xi \longmapsto \xi\,(2k+1)$$

stetig auf $\ell^2\,(\mathbb{N})$ und es gilt

$$M = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \operatorname{Ker}\left(\varepsilon_{2(k+1)} - \frac{1}{k+1}\varepsilon_{2k+1}\right) \quad \text{sowie} \quad N = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \operatorname{Ker}\,(\varepsilon_{2k}) \ .$$

Daher sind M und N abgeschlossene Untervektorräume von $\ell^2\,(\mathbb{N})$.

Ist $\xi \in M \cap N$, so gilt $\xi\,(0) = 0$ und

$$\frac{1}{k+1}\xi\,(2k+1) = \xi\,(2(k+1)) = 0 \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N} \ .$$

Also ist $\xi = 0$ und somit $M \cap N = 0$.

Es gilt $1_{\{0\}} \in M$ und für $k \in \mathbb{N}$ ist $1_{\{2k+1\}} \in N \subset M \oplus N$, sowie

$$1_{\{2(k+1)\}} = \left(1_{\{2(k+1)\}} + (k+1)_{\{2k+1\}}\right) - (k+1)_{\{2k+1\}} \in M \oplus N \ .$$

Somit $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})} \subset M \oplus N \subset \ell^2(\mathbb{N}) = \overline{\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}}$, d.h., $\overline{M \oplus N} = \ell^2(\mathbb{N})$.$M \oplus N$ ist aber von $\ell^2(\mathbb{N})$ verschieden, denn

$$\left(\frac{1}{\max(1,l)}\right)_{l\in\mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N}) \setminus (M \oplus N) \ .$$

In der Tat: Die M-Komponente $m = (m_k)_{k\in\mathbb{N}} \in M \subset \ell^2(\mathbb{N})$ dieser Folge wäre durch

$$m_{2k} = \frac{1}{\max(1,2k)} - 0 = \frac{1}{\max(1,2k)} \quad \text{und} \quad m_{2k+1} = (k+1)\cdot m_{2(k+1)} = \frac{k+1}{2(k+1)} = \frac{1}{2}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$ gegeben. Dann wäre aber

$$\infty > \sum_{k=0}^{\infty} |m_k|^2 \geqslant \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{4} = \infty \ ,$$

Widerspruch!

Aufgabe 2

(a) Jede Retraktion ist injektiv. Falls $\psi = R(\varphi) \in R(G) \cap \operatorname{Ker} D$, gilt

$$\psi = R(\varphi) = R(D(R(\varphi))) = R(D(\psi)) = R(0) = 0 \ ,$$

d.h. $R(G) \cap \operatorname{Ker} D = 0$. Falls $\varphi \in F$ ist, kann man

$$\varphi = (\mathrm{Id} - RD)\varphi + RD(\varphi)$$

schreiben. Dabei ist $RD(\varphi) \in R(G)$ und $D(\mathrm{Id} - RD)\varphi = (D - D)\varphi = 0$, also $(\mathrm{Id} - RD)\varphi \in \operatorname{Ker} D$. Somit

$$F = \operatorname{Ker} D \oplus R(G) \ .$$

Der Isomorphiesatz der linearen Algebra liefert die Existenz einer linearen Bijektion

$$\tilde{D} : F/\operatorname{Ker} D \longrightarrow G : \varphi + \operatorname{Ker} D \longmapsto D\varphi \ .$$

Der Quotient $F/\operatorname{Ker} D \cong G \cong R(G)$ erlaubt die Interpretation einer Retraktion als lineare Auswahl von Repräsentanten. Dies ist eine interne Beschreibung eines Komplementärraums zu $\operatorname{Ker} D$.

(b) Betrachte die Einschränkung

$$B_{|\operatorname{Ker} D} : \operatorname{Ker} D \longrightarrow H \ .$$

Wegen $\operatorname{Ker}\left(B_{|\operatorname{Ker} D}\right) = \operatorname{Ker} D \cap \operatorname{Ker} B$ ist die Summe $\operatorname{Ker} D + \operatorname{Ker} B$ genau dann direkt, wenn $B_{|\operatorname{Ker} D}$ injektiv ist.

Hat man eine Zerlegung $F = \operatorname{Ker} D + \operatorname{Ker} B$, und schreibt man dementsprechend $\varphi = \delta + \beta$, so gilt $B\varphi = B\delta$, d.h. $B_{|\operatorname{Ker} D} \operatorname{Ker} D \longrightarrow H$ ist surjektiv, da B surjektiv ist. Umgekehrt erhält man aus der Surjektivität der Einschränkung für jedes $\varphi \in F$ ein $\psi_\varphi \in \operatorname{Ker} D$ mit $B\psi_\varphi = B\varphi$, und somit ist

$$\varphi = \psi_\varphi + \varphi - \psi_\varphi$$

eine Zerlegung entsprechend $F = \operatorname{Ker} D + \operatorname{Ker} B$.

Zusammenfassend hat man genau dann eine direkte Zerlegung

$$F = \operatorname{Ker} D \oplus \operatorname{Ker} B \ ,$$

wenn die Abbildung

$$B_{|\operatorname{Ker} D} : \operatorname{Ker} D \longrightarrow B(F) = H$$

bijektiv ist. Dies ist eine externe Beschreibung eines Komplementärraums zu $\operatorname{Ker} D$.

(c) Jede lineare Abbildung $B : F \longrightarrow \mathbb{K}^n$ ist über

$$pr_j \circ B = \mu_j \quad \text{für alle } j = 1, \ldots, n$$

eineindeutig Linearformen $\mu_1, \ldots, \mu_n \in F^{\circledast}$ zugeordnet.

(d) Betrachte die Abbildung

$$\partial^n : \mathcal{AC}^{(n)} \longrightarrow \mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(J) \ .$$

Aufgrund der Eindeutigkeit der Stammfunktion (bis auf Konstanten) ist offenbar $\mathcal{P}_{n-1}(J) = \operatorname{Ker} \partial^n$. Damit $\mathcal{AC}^{(n)} \big/ \mathcal{P}_{n-1}(J) \cong \mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(J)$. Eine Retraktion von ∂^n ist eine lineare Abbildung

$$R : \mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(J) \longrightarrow \mathcal{AC}^{(n)}$$

mit $\partial^n \circ R = \mathrm{Id}_{\mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(J)}$. Für jedes $g \in \mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(J)$ gilt also $\partial^n (Rg) = g$, d.h. Rg ist Lösung von $\partial^n f = g$. Da die allgemeine Lösung die Form

$$p + \int_\tau^\diamond \left[\int_\tau^{t_1} \ldots \left(\int_\tau^{t_{n-1}} g \, d\lambda \right) \ldots dt_2 \right] dt_1 \quad \text{mit } p \in \mathcal{P}_{n-1}(J)$$

hat, muss man nur noch p derart bestimmen, dass

$$P + \int_\tau^\diamond \left[\int_\tau^{t_1} \ldots \left(\int_\tau^{t_{n-1}} g \, d\lambda \right) \ldots dt_2 \right] dt_1 \in R\left(\mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(J)\right) = \operatorname{Ker} B \ .$$

(e) Fall $n = 1$: Mögliche Linearformen sind die Auswertungen in $\tau \in J$

$$\varepsilon_\tau : f \longmapsto f(\tau) \ .$$

Auf $\operatorname{Ker}(\partial) = \mathbb{K}$, dem Raum der konstanten Funktionen, sind diese Linearformen injektiv und surjektiv auf $\mathbb{K}$. Diese Auswertungen sind also gut geeignet als B .

Eine Randwert-Abbildung der Gestalt $f \longmapsto \lim_{t \longrightarrow \inf J} f(t)$ setzt Existenz voraus, ist also auf $\mathcal{AC}(J)$ nicht ohne weiteres zu verwenden. In der Praxis schränkt man sich oft auf Teilräume ein, auf denen solche Bedingungen sinnvoll anwendbar sind. Bei Intervallen der Form $J = [a, b]$ sei noch bemerkt, dass die Linearform

$$f \longmapsto f(b) - f(a)$$

nicht injektiv auf $\operatorname{Ker}(\partial)$ ist.

Fall $n = 2$: Linearformen der Gestalt

$$\varepsilon_\tau : f \longmapsto f(\tau) \quad \text{und} \quad \varepsilon_\tau \circ \partial : f \longmapsto \partial f(\tau) \quad \text{mit} \quad \tau \in J$$

erlauben die Konstruktion linearer Bijektionen $B : \operatorname{Ker}(\partial^2) \longrightarrow \mathbb{K}^2$ (z.B. durch $B = (\varepsilon_{\tau_0}, \varepsilon_{\tau_1})$ mit $\tau_0 \neq \tau_1$ oder $B = (\varepsilon_{\tau_0}, \varepsilon_{\tau_0} \circ \partial)$). Auch ist also hier eine vollständige Beschreibung der Zerlegung von $\mathcal{AC}^{(2)}(J)$ durch Anfangswerte möglich. Für andere Linearformen gilt Analoges wie im Fall $n = 1$.

Allgemein muss man für eine entsprechende Zerlegung eine Folge $(\mu_k)_{k=1,..,l}$ Linearformen auf $\mathcal{AC}^{(n)}(J)$ derart angeben, daß

$$B_{|\operatorname{Ker}(\partial^n)} = (\mu_1, \ldots, \mu_l)_{|\operatorname{Ker}(\partial^n)} : \mathcal{P}_{n-1}(J) \longrightarrow \mathbb{K}^n$$

bijektiv ist. Offensichtlich muss dazu $l = n$ gelten. Damit $\mu_1, \ldots, \mu_n$ Anlass zu einer Bijektion geben, müssen sie linear unabhängig sein.

Aufgabe 3

(a) Nach Transformationsformel ist $\check{\diamond} : \xi \longmapsto \check{\xi}$ eine lineare Isometrie von $\mathbf{L}^2([-1,1])$ auf $\mathbf{L}^2([-1,1])$, die zu sich selbst invers ist. Damit sind

$$\mathbf{L}^2_g([-1,1]) = \operatorname{Ker}(\operatorname{Id} - \check{\diamond}) \quad \text{und} \quad \mathbf{L}^2_u([-1,1]) = \operatorname{Ker}(\operatorname{Id} + \check{\diamond})$$

abgeschlossene Unterräume von $\mathbf{L}^2([-1,1])$. Für $\xi \in \mathbf{L}^2_g([-1,1])$ und $\eta \in \mathbf{L}^2_u([-1,1])$ gilt ferner

$$(\xi|\eta) = \left(\check{\xi}\,|\check{\eta}\right) = -(\xi|\eta) = 0$$

also ist die Summe orthogonal. Schließlich folgt aus

$$2\operatorname{Id} = (\operatorname{Id} + \check{\diamond}) + (\operatorname{Id} - \check{\diamond}) \quad \text{und} \quad (\operatorname{Id} + \check{\diamond})(\operatorname{Id} - \check{\diamond}) = (\operatorname{Id} - \check{\diamond})(\operatorname{Id} + \check{\diamond}) = \operatorname{Id} - \check{\diamond} \circ \check{\diamond} = 0$$

die Behauptung.

(b) Die Abbildung

$$\Phi : \gamma \longmapsto \frac{1}{\sqrt{2}} \gamma \circ |\cdot| : \mathbf{L}^2([0,1]) \longrightarrow \mathbf{L}^2_g([-1,1])$$

ist wohldefiniert und linear. Sie erfüllt

$$\int_{-1}^1 \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \gamma(|x|) \right|^2 d\lambda = \frac{1}{2} \left(\int_{-1}^0 |\gamma(-x)|^2 \, d\lambda + \int_0^1 |\gamma(x)|^2 \, d\lambda \right) = \int_0^1 |\gamma(x)|^2 \, d\lambda \ ,$$

ist also eine Isometrie. Die Abbildung

$$\Psi : \xi \longmapsto \sqrt{2} \cdot \xi_{|[0,1]} : \mathbf{L}^2_g([-1,1]) \longrightarrow \mathbf{L}^2([0,1])$$

ist ebenfalls wohldefiniert und linear. Es gilt

$$\Phi(\Psi(\xi)) = \xi_{|[0,1]} \circ |\diamond| = \xi \quad \text{für alle } \xi \in \mathbf{L}^2_g([-1,1]) \ ,$$

sowie

$$\Psi(\Phi(\gamma)) = \gamma \quad \text{für alle } \gamma \in \mathbf{L}^2([0,1]) \ .$$

Die angegebenen Abbildungen zwischen $\mathbf{L}^2_g([-1,1])$ und $\mathbf{L}^2([0,1])$ sind also surjektive Isometrien.

Analog zeigt man, dass

$$\gamma \longmapsto \frac{\operatorname{sgn}}{\sqrt{2}} \cdot (\gamma \circ |\diamond|) : \mathbf{L}^2([0,1]) \longrightarrow \mathbf{L}^2_u([-1,1])$$

eine surjektive Isometrie ist.

Schließlich beweist man mittels der Transformationsformel für

$$x \longmapsto 2x - 1 :]0,1[\longrightarrow]-1,1[\ ,$$

dass

$$\gamma \longmapsto \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \gamma \circ \left(\frac{\mathrm{id} + 1}{2} \right) : \mathbf{L}^2\left([0,1]\right) \longrightarrow \mathbf{L}^2\left([-1,1]\right)$$

und

$$\xi \longmapsto \sqrt{2} \cdot \xi \circ (2\,\mathrm{id} - 1) : \mathbf{L}^2\left([-1,1]\right) \longrightarrow \mathbf{L}^2\left([0,1]\right)$$

zueinander inverse Isometrien sind.

Funktionalanalysis 1

Blatt 5, Aufgabe 1

$1)a)$

Es ist zu zeigen, dass $\left(\sqrt{2}\cdot\sin(k\pi\,\cdot)\right)_{k\geq 1}$ und $(1)\cup\left(\sqrt{2}\cdot\cos(k\pi\,\cdot)\right)_{k\geq 1}$ hilbertsche Basen von $\mathrm{L}^2([0,1])$ sind.

Seien F und G Hilberträume (HR), $(\varepsilon_\mathrm{k})_{k\in I}$ hilbertsche Basis (HB) von F,

T: F $\to$ G isometrisch isomorph, d.h. HR-Isomorphismus.

Dann gilt wegen Stetigkeit und Normerhaltung von T, dass $T(\varepsilon_k)_{k\in I}$ HB von G ist.

Def. $\Phi:\mathrm{L}^2([0,1])\ \to\ \mathrm{L}^2([-1,1]):\xi\ \mapsto\ \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\xi\left(\frac{\bullet+1}{2}\right)$ isom. isomorph,

da $\left(e^{2\pi ik\cdot}\right)_{\mathrm{k}\in\mathbb{Z}}$ HB von $\mathrm{L}^2([0,1])$ folgt mit Φ, dass $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot e^{i\pi k\cdot}\right)_{k\in\mathbb{Z}}$ HB von $\mathrm{L}^2([-1,1])$.

Unter Anwendung der stetigen Orthogonalprojektoren $\mathrm{P}_{\mathrm{L}^2_{\mathrm{g(u)}}([-1,1])}$ auf diese HB erhält man unter Berücksichtigung der Normierung die HBen

$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cup\left(\cos(\pi k\,\cdot)\right)_{k\in\mathbb{N}^*}$ von $\mathrm{L_g}^2([-1,1])$ und $\left(\sin(k\pi\,\cdot)\right)_{k\in\mathbb{N}^*}$ von $\mathrm{L_u}^2([-1,1])$.

Mit $\Phi_{\mathrm{g(u)}}:\mathrm{L_{g(u)}}^2([-1,1])\ \to\ \mathrm{L}^2([0,1]):\xi\ \mapsto\ \sqrt{2}\cdot\xi_{[0,1]}$ isom. isomorph, (vgl. Blatt 4, Aufgabe 3)b)) folgt, dass $(1)\cup\left(\sqrt{2}\cdot\cos(k\pi\,\cdot)\right)_{k\in\mathbb{N}^*}$ und $\left(\sqrt{2}\cdot\sin(k\pi\,\cdot)\right)_{k\in\mathbb{N}^*}$ HB von $\mathrm{L}^2([0,1])$ sind. $\square$

b)

Sei f $\in$ $\mathrm{AC}^{(2)}([0,1])$ Lösung des Randwertproblems $\partial^2 f+\lambda f\ =\ 0$ und $f(0)\ =f(1)\ =\ 0$.

Mit $f\ =f(0)+\partial f(0)+\int_0^\bullet\int_0^{t_2}\partial^2 f(t_1)\,d\lambda(t_1)d\lambda(t_2)$ und $\partial^2 f\ =\ -\lambda f\ \in\ \mathrm{C}([0,1])$ ist $f\ \in\ \mathrm{C}^{(2)}([0,1])$, d.h man beschränkt sich auf klassische Lösungen.

Für $\lambda>0$ erhält man als reelles Fundamentalsystem $\left\{\cos\left(\sqrt{\lambda}\,\cdot\right),\sin\left(\sqrt{\lambda}\,\cdot\right)\right\}$, mit der Bedingung $f(0)=0$ ist $f\ =\ const\cdot\sin\left(\sqrt{\lambda}\,\cdot\right)$ und $\left(\mathrm{f}(1)=0\ \Leftrightarrow\ \sqrt{\lambda}\ \in\ \pi\cdot\mathbb{N}^*\text{ oder }f\ =\ 0\right)$,

somit sind die Lösungen $f\ =\ \mu\cdot\sin(k\pi\,\cdot)$, $\mu\ \in\mathbb{C}$, für $\sqrt{\lambda}=k\pi, k\in\mathbb{N}^*$ und $f=0$ für $\lambda>0$, $\sqrt{\lambda}\notin\ \pi\cdot\mathbb{N}^*$.

Dies ist jedoch kein Widerspruch zur Vorlesung Bsp. 1.8.1, da die Voraussetzungen mit $q=-\lambda<0$ nicht erfüllt sind.

Für $\lambda\leq 0$ definiere analog zu den Bezeichnungen aus 1.8.1, $\rho=p=1$ und $q=-\lambda\geq 0$, das RWP ist eindeutig lösbar, somit ist 0 die einzige Lösung.

Da mit Teil a) $\partial^2\left(\sin(k\pi\,\cdot)\right)\ =\ -k^2\pi^2\cdot\sin(k\pi\,\cdot)$ und $\left(\sqrt{2}\cdot\sin(k\pi\,\cdot)\right)_{k\geq 1}$ HB von $\mathrm{L}^2([0,1])$ hat man ∂^2 auf $\mathrm{AC}^{(2)}([0,1])$ diagonalisiert.

$\square$

Philipps-Universität Marburg
Fachbereich Mathematik & Informatik

Claude Portenier
Alexander Alldridge

Funktionalanalysis I

Blatt 5, Aufgabe 2

(a)
Sei $f = 1$, dann gilt:

$$B_n f(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = (x+1-x)^n = 1$$

Sei $f = id$, dann gilt:

$$B_n f(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n}\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} =$$

$$= x\sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} x^{k-1}(1-x)^{n-k} = x\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} x^k (1-x)^{n-1-k} = x$$

(b)
Sei $f = id(1-id)$, dann gilt:

$$B_n f(x) = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)\left(1-\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n}-\frac{k^2}{n^2}\right)\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} =$$

$$= x - \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k^2}{n^2}\right)\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = x - \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n}\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} x^k (1-x)^{n-k} =$$

$$= x - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k+1}{n}\frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} x^{k+1}(1-x)^{n-1-k} = x - x\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k+1}{n}\frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} x^k (1-x)^{n-1-k} =$$

$$= x - x\left(\frac{1}{n} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n}\frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} x^k (1-x)^{n-1-k}\right) =$$

$$= x - x\left(\frac{1}{n} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{n}\frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} x^k (1-x)^{n-1-k}\right) =$$

$$= x - x\left(\frac{1}{n} + \frac{n-1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} \frac{(n-2)!}{(k-1)!(n-1-k)!} x^k (1-x)^{n-1-k}\right) =$$

$$= x - x\left(\frac{1}{n} + \frac{n-1}{n}\sum_{k=0}^{n-2}\frac{(n-2)!}{k!(n-2-k)!}x^{k+1}(1-x)^{n-2-k}\right) =$$

$$= x - x\left(\frac{1}{n} + \frac{n-1}{n}x\sum_{k=0}^{n-2}\frac{(n-2)!}{k!(n-2-k)!}x^{k}(1-x)^{n-2-k}\right) =$$

$$= x - x(\frac{1}{n} + \frac{n-1}{n}x) = x(1-\frac{1}{n})(1+x)$$

Da f als stetige Funktion auf $[0,1]$ beschränkt, existiert ein $M \in \mathbb{R}$ mit

$$|f(x) - B_n f(x)| = |x(1+x)(1-1+\frac{1}{n})| = |f(x)\frac{1}{n}| \leq M\frac{1}{n}$$

für alle x aus $[0,1]$. Damit konvergiert $B_n f$ gleichmäßig gegen f.

(c)
Mit den Resultaten und Rechnungen aus (a) und (b) gilt:

$$\sum_{k=0}^{n}\left(x-\frac{k}{n}\right)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\left(x^2 - 2x\frac{k}{n} + \frac{k^2}{n^2}\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} \underset{(a)}{=}$$

$$= x^2 - 2x^2 + \underbrace{\sum_{k=0}^{n}\frac{k^2}{n^2}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}}_{=x(\frac{1}{n}+\frac{n-1}{n}x)\text{ , vgl. Rechnung in (b)}} = -x^2 + \frac{x}{n} + \frac{n-1}{n}x^2 = \frac{x-x^2}{n}$$

$id - id^2$ nimmt ihr Maximum in $x = \frac{1}{2}$ an, daraus folgt die Behauptung.