Blatt 6
Aufgabe 1

„⇒“: Sei Φ nicht injektiv, d.h. Kern $\Phi \neq \{0\}$. Dann gibt es ein $0 \neq p \in$ Kern Φ mit $p = 0$ μ-f.ü. auf supp μ. Es hat p nur endlich viele Nullstellen $(x_k) \subset X$. Nun gilt für μ-fast alle $x \in$ supp μ, dass $p(x)=0$, d.h. $x = x_k$ für ein $k=0,\ldots,n$. Die Menge supp $\mu \setminus (x_k) \subset \{p \neq 0\}$ ist also eine μ-Nullmenge. Da supp μ das Komplement der größten offenen μ-Nullmenge ist, muss supp $\mu \subset (x_k)$ gelten, und insbesondere ist supp μ endlich. Somit muss μ von der Form

$$\mu = \sum_{k=0}^{n} c_k \delta_{x_k}$$

sein.

„⇐“: Sei

$$\mu = \sum_{k=0}^{n} c_k \delta_{x_k} \quad .$$

Setze

$$p := \prod_{k=0}^{n} (id - x_k) \, .$$

Dann ist $\int |p|^2 \, d\mu = 0$, also Kern $\Phi \neq \{0\}$.

Funktional-Analysis Zettel 6
Aufgabe 2

Diese Aufgabe liefert zusammen mit Aufgabe 3 den Beweisschritt $(ii) \Rightarrow (iii)$ in Hauptsatz (1.13). In Worten heißt dies, dass die durch die Rodrigues-Formel gegebene Polynome p_k jeweils die k-te hypergeometrische Differentialgleichung erfüllen.
In dieser Aufgabe zeigen wir, dass der Grad von p in der Rodriguesformel kleiner gleich zwei ist. Damit können wir dann in Aufgabe 3 mittels eines feinen Tricks (Leibniz) die Behauptung zeigen.

Teil a):

Sei $q = \sum_{j=0}^{n} c_j \operatorname{id}^j$ mit $c_n \neq 0$ und $n \geq 2$ gegeben.
$\Rightarrow \partial^2 q = \sum_{j=2}^{n} c_j j(j-1) \operatorname{id}^{j-2}$
$\Rightarrow \deg(q\partial^2 q) = \deg(\sum_{j=0}^{n} c_j \operatorname{id}^j \sum_{j=2}^{n} c_j j(j-1) \operatorname{id}^{j-2})$
$\overset{\deg\ q \geq 2}{=} \deg(\sum_{j=0}^{2n-2} d_j \operatorname{id}^j) = 2n-2$
Es gilt $d_{2n-2} = c_n^2 \cdot n \cdot (n-1) \neq 0$ da Koeffizienten aus Körper (nullteilerfrei).

Teil b):

Rodrigues-Formel für p_1:

$$p_1 = \frac{1}{d_1 \varrho} \partial(\varrho p) = \frac{(\partial \varrho)p}{d_1 \varrho} + \frac{\partial p}{d_1} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial \varrho}{\varrho} p = d_1 p_1 - \partial p$$

Daraus folgt auch: $\partial^2(\varrho p) = d_1 \partial(\varrho p_1)$

Nun zur Rodrigues-Formel für p_2:

$$\begin{aligned} d_2 \varrho p_2 = \partial^2(\varrho p^2) = \partial^2(\varrho p \cdot p) &= \partial(\partial(\varrho p) \cdot p + \varrho p \partial p) \\ &= \partial^2(\varrho p)p + 2\partial(\varrho p)\partial p + \varrho p \partial^2 p \\ &\overset{R.-F. für\ p_1}{=} d_1 \partial(\varrho p_1)p + 2d_1 \varrho p_1 \partial p + \varrho p \partial^2 p \end{aligned}$$

Teilen durch ϱ liefert:

$$\frac{d_1 p}{\varrho} \partial \varrho p_1 + d_1 p \partial p_1 + 2d_1 p_1 \partial p + p\partial^2 p = d_2 p_2$$

Daraus folgt:

$$p\partial^2 p = d_2 p_2 - 2d_1 p_1 \partial p - d_1 p \partial p_1 - d_1 p \frac{\partial \varrho}{\varrho} p_1$$

Nochmaliges Anwenden der Rodrigues-Formel für p_1 liefert:

$$\begin{aligned} p\partial^2 p &= d_2 p_2 - 2d_1 p_1 \partial p - d_1 p_1 \partial p - d_1 p \partial p_1 - (d_1 p_1)^2 + d_1 p_1 \partial p \\ &= d_2 p_2 - d_1 p_1 \partial p - d_1 p \partial p_1 - d_1^2 p_1^2 \end{aligned}$$

Nehmen wir einmal an, dass $\deg\ p > 2$. Dann können wir erst recht Teil a) anwenden, d.h. $\deg(\partial^2 p \cdot p) = 2\ \deg\ p - 2$:

Folgendes gilt: $p\partial^2 p = \underbrace{d_2 p_2 - d_1^2 p_1^2}_{\deg \leq 2} - \underbrace{d_1 p_1 \partial p - d_1 p \partial p_1}_{\deg \leq \deg\ p}$

Fall $\deg p_1 < 0$: Es folgt sofort ein Widerspruch, denn p_1 ist Nullpolynom.
Fall $\deg p_1 = 0$: Widerspruch, denn es müsste $\deg p\partial^2 p = \deg\ p - 1 = 2\ \deg p - 2 \ \Leftrightarrow\ \deg p = 1$ gelten.
Fall $\deg p_1 = 1$: Widerspruch, denn es müsste $2\ \deg\ p\ - 2 \leq \deg p$
$\Leftrightarrow \deg\ p \leq 2$ gelten.

Insgesamt folgt: $\deg p \leq 2$

Lösungsblatt 6

Aufgabe 3

(a) Es gilt

$$\partial^{k+1}\left(\varrho p^k\right) = \partial\left(\varrho \cdot \frac{1}{\varrho}\partial^k\left(\varrho p^k\right)\right) = \frac{\partial\varrho}{\varrho}\cdot\partial^k\left(\varrho p^k\right) + \varrho\cdot d_k\partial p_k\ ,$$

also folgt

$$-d_k\varrho\cdot Lp_k = \partial\left(\varrho p\cdot d_k\partial p_k\right) = \partial\left(-\frac{p\partial\varrho}{\varrho}\cdot\partial^k\left(\varrho p^k\right) + p\cdot\partial^{k+1}\left(\varrho p^k\right)\right) = (*)\ .$$

Da $\frac{p\partial\varrho}{\varrho} = d_1p_1 - \partial p$,folgt weiter

$$(*) = \left(\partial^2 p - d_1\partial p_1\right)\cdot\partial^k\left(\varrho p^k\right) + \left(2\partial p - d_1p_1\right)\cdot\partial^{k+1}\left(\varrho p^k\right) + p\cdot\partial^{k+2}\left(\varrho p^k\right)\ .$$

(b) Es gilt

$$p\partial\left(\varrho\cdot p^k\right) = \left(p\partial\varrho + k\varrho\partial p\right)\cdot p^k = \left[d_1p_1 + (k-1)\,\partial p\right]\cdot\varrho p^k\ .$$

Insbesondere

$$\partial^{k+1}\left(p\partial\left(\varrho p^k\right)\right) = \partial^{k+1}\left[\left(d_1p_1 + (k-1)\,\partial p\right)\cdot\varrho p^k\right] \qquad (**)$$

Nach Aufgabe 2 (ii) ist $\deg p \leqslant 2$ und folglich $\deg\left[d_1p_1 + (k-1)\,\partial p\right] \leqslant 1$ Durch Anwendung der Leibnizformel auf beiden Seiten der Gleichung $(**)$ folgt

$$p\cdot\partial^{k+2}\left(\varrho p^k\right) + (k+1)\cdot\partial p\cdot\partial^{k+1}\left(\varrho p^k\right) + \frac{k\,(k+1)}{2}\cdot\partial^2 p\cdot\partial^k\left(\varrho p^k\right) =$$

$$= \left(d_1p_1 + (k-1)\,\partial p\right)\cdot\partial^{k+1}\left(\varrho p^k\right) + (k+1)\cdot\left(d_1\partial p_1 + (k-1)\,\partial^2 p\right)\cdot\partial^k\left(\varrho p^k\right)\ .$$

Damit

$$\left(2\partial p - d_1p_1\right)\cdot\partial^{k+1}\left(\varrho p^k\right) + p\cdot\partial^{k+2}\left(\varrho p^k\right) = (k+1)\cdot\left[d_1\partial p_1 + \left(\frac{k}{2} - 1\right)\partial^2 p\right]\cdot\partial^k\left(\varrho p^k\right)\ .$$

Durch Einsetzen in die Gleichung aus (i) folgt

$$Lp_k = -\frac{1}{d_k\varrho}\left[kd_1\partial p_1 + \left(\frac{k\,(k+1)}{2} - k\right)\partial^2 p\right]\cdot\partial^k\left(\varrho p^k\right) = -k\cdot\left[d_1\partial p_1 + \frac{k-1}{2}\partial^2 p\right]\cdot p_k\ ,$$

also die Behauptung.

Fachbereich Mathematik und Informatik
Philipps-Universität Marburg

Lösungsblatt 7

Aufgabe 1 (a) Es gilt

$$L_k^{(\alpha)} = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \left[\prod_{l=0}^{j-1} (\alpha + k - l)\right] \cdot \mathrm{id}^{k-j} \cdot (-1)^{k-j} \quad ,$$

und die Orthogonalitätsrelation. Damit folgt

$$\left(L_k^{(\alpha)} \middle| L_k^{(\alpha)}\right) = \left(\frac{\mathrm{id}^k \cdot (-1)^k}{k!} \middle| L_k^{(\alpha)}\right) =$$

$$= \frac{(-1)^k}{k!} \int_0^\infty \frac{\mathrm{id}^k}{k!} \cdot \partial^k \left(\mathrm{id}^{\alpha+k} \cdot e^{-\mathrm{id}}\right) d\lambda = \frac{1}{k!} \int_0^\infty \frac{\partial^k \left(\mathrm{id}^k\right)}{k!} \cdot \mathrm{id}^{\alpha+k} \cdot e^{-\mathrm{id}} \, d\lambda =$$

$$= \frac{1}{k!} \cdot \int_0^\infty \mathrm{id}^{\alpha+k} \cdot e^{-\mathrm{id}} \, d\lambda = \frac{(\alpha+k)!}{k!}$$

und somit die Behauptung.

(b) Nach Theorem 1.9 genügt es, die Parseval-Gleichung zu zeigen. Die Behauptung folgt, indem man

$$c_k := \left(\widetilde{L}_k^{(\alpha)} \middle| e^{-n \cdot \mathrm{id}}\right)$$

setzt. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\left\|e^{-n\cdot\mathrm{id}}\right\|_{2,\varrho}^2 = \int_0^\infty x^\alpha \cdot e^{-(2n+1)\cdot x} \, dx = \frac{1}{(2n+1)^{\alpha+1}} \cdot \int_0^\infty y^\alpha \cdot e^{-y} \, dy = \frac{\alpha!}{(2n+1)^{\alpha+1}} \quad .$$

Der k-te Fourier-Koeffizient von $e^{-n\cdot\mathrm{id}}$ ergibt sich zu

$$\left(\widetilde{L}_k^{(\alpha)} \middle| e^{-n\cdot\mathrm{id}}\right) = \sqrt{\frac{k!}{(\alpha+k)!}} \cdot \int_0^\infty L_k^{(\alpha)}(x) \cdot e^{-n\cdot x} \cdot \varrho(x) \, dx =$$

$$= \sqrt{\frac{k!}{(\alpha+k)!}} \cdot \frac{1}{k!} \cdot \int_0^\infty \partial^k \left(x^{\alpha+k} \cdot e^{-x}\right) \cdot e^{-n\cdot x} \, dx =$$

$$= \frac{(-1)^k}{\sqrt{k! \cdot (\alpha+k)!}} \cdot \int_0^\infty x^{\alpha+k} \cdot e^{-x} \cdot \partial^k \left(e^{-n\cdot x}\right) dx =$$

$$= \frac{n^k}{\sqrt{k! \cdot (\alpha+k)!}} \cdot \int_0^\infty x^{\alpha+k} \cdot e^{-(n+1)\cdot x} \, dx =$$

$$= \frac{n^k}{\sqrt{k! \cdot (\alpha+k)!}\,(n+1)^{\alpha+k+1}} \cdot \int_0^\infty y^{\alpha+k} \cdot e^{-y}\, dy =$$

$$= \frac{n^k\,(\alpha+k)!}{\sqrt{k! \cdot (\alpha+k)!}\,(n+1)^{\alpha+k+1}} = \sqrt{\frac{(\alpha+k)!}{k!}} \cdot \frac{1}{(n+1)^{\alpha+1}} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^k .$$

Es gilt aber mit $t = \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 \in [0,1]$

$$\frac{(n+1)^{\alpha+1}}{(2n+1)^{\alpha+1}} = (1-t)^{-(\alpha+1)} = \sum_{k=0}^\infty \binom{-\alpha-1}{k} \cdot (-1)^k \cdot t^{2k} = \frac{1}{\alpha!} \sum_{k=0}^\infty \frac{(\alpha+k)!}{k!} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{2k} ,$$

da

$$\binom{\alpha+k}{k} = \prod_{j=1}^k \frac{\alpha+k-j+1}{j} = (-1)^k \cdot \prod_{j=1}^k \frac{-(\alpha+1)-(k-j+1)+1}{j} =$$

$$= (-1)^k \cdot \prod_{i=1}^k \frac{-(\alpha+1)-i+1}{p} = (-1)^k \cdot \binom{-(\alpha+1)}{k} ,$$

wobei die Substitution $i = k-j+1$ angewandt wurde. Dies zeigt die Parsevalrelation und damit die Behauptung.

(c) Offenbar bilden die $\widetilde{L}_k^{(\alpha)}$ ein Orthonormalsystem. Es reicht also Totalität zu zeigen. Die Abbildung

$$\Phi : \mathbf{L}^2\left(]0,1[, (-\ln)^\alpha\right) \longrightarrow \mathbf{L}^2\left(\mathbb{R}_+^*, \varrho\right) : f \longmapsto f \circ e^{-\mathrm{id}}$$

ist eine Isometrie, da

$$e^{-\mathrm{id}}\left[(-\ln)^\alpha \cdot \lambda_{[0,1]}\right] = \mathrm{id}^\alpha \cdot \left|\det \partial e^{-\mathrm{id}}\right| \cdot \lambda_{\mathbb{R}_+} = \varrho \cdot \lambda_{\mathbb{R}_+} .$$

Insbesondere gilt

$$\int_0^1 (-\ln)^\alpha \, d\lambda = \int_0^\infty \mathrm{id}^\alpha \cdot e^{-\mathrm{id}}\, d\lambda .$$

Für $-1 < \alpha < 0$ ist

$$0 \leqslant \int_0^\infty \mathrm{id}^\alpha \cdot e^{-\mathrm{id}}\, d\lambda \leqslant \int_0^1 x^\alpha\, dx + \int_1^\infty e^{-x}\, dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\Big|_{x=0}^1 - e^{-x}\Big|_1^\infty = \frac{1}{\alpha+1} - \frac{1}{e} < \infty .$$

Für $\alpha \geqslant 0$ gibt es ein x_0 , so dass $(1+x^2)\, x^\alpha e^{-x} \leqslant 1$ für alle $x \geqslant x_0$, also

$$0 \leqslant \int_0^\infty \mathrm{id}^\alpha \cdot e^{-\mathrm{id}}\, d\lambda \leqslant \int_0^{x_0} x^\alpha \cdot e^{-x}\, dx + \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} \leqslant x_0 \cdot \|\varrho\|_\infty + \frac{\pi}{2} < \infty .$$

Damit ist das Maß $(-\ln)^\alpha \cdot \lambda_{[0,1]}$ endlich. Das Intervall $]0,1[$ ist beschränkt, also ist $\mathcal{P}$ in $\mathbf{L}^2\left(]0,1[, (-\ln)^\alpha\right)$ dicht, die Folge $\left(\mathrm{id}^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ also total. Deren Bild $\left(e^{-n\,\mathrm{id}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ unter Φ ist in $\mathbf{L}^2\left(\mathbb{R}_+^*, \varrho\right)$ total. Aber $e^{-n\,\mathrm{id}}$ liegt im Abschluss des Aufspanns der $L_k^{(\alpha)}$. Damit folgt die Behauptung.

Aufgabe 2

(a) Definiere

$$S\xi = \check{\xi} \quad \text{für alle} \quad \xi \in \mathbf{L}^2\left(\mathbb{R}, e^{-\mathrm{id}^2}\right) .$$

Es gilt $S^2 = 1$ und

$$\|S\xi\|^2 = \int_{\mathbb{R}} |\xi(-x)|^2 \, e^{-x^2} \, dx = \int_{\mathbb{R}} |\xi(x)|^2 \, e^{-(-x)^2} \, dx = \|\xi\|^2 .$$

Damit gilt für $P_\pm = \frac{1}{2}(1 \pm S)$, dass $P_+ + P_- = 1$,

$$P_\pm^2 = \frac{1}{4}(1 \pm S)^2 = \frac{1}{4}(2 \pm 2S) = P_\pm \quad \text{und} \quad P_+ P_- = (1+S)(1-S) = 1 - S^2 = 0 ,$$

sowie

$$\|P_\pm\| \leqslant \frac{1}{2}(1 + \|S\|) \leqslant 1 ,$$

also sind $P_\pm$ orthogonale Projektionen, deren Bilder $\mathbf{L}_u^2$ bzw. $\mathbf{L}_g^2$ orthogonal aufeinander stehen und deren Summe ganz $\mathbf{L}^2\left(\mathbb{R}, e^{-\mathrm{id}^2}\right)$ ist.

(b) Es gilt $\left(\xi \circ \mathrm{id}^2\right) \circ \sqrt{\cdot} = \xi$ auf $\mathbb{R}_+^*$ für alle $\xi \in \mathbf{L}^2\left(\mathbb{R}_+^*, \mathrm{id}^{-1/2} \cdot e^{-\mathrm{id}}\right)$, also ist die Abbildung surjektiv. Isometrie gilt wegen

$$\int_{\mathbb{R}} \left|\xi\left(x^2\right)\right|^2 e^{-x^2} \, dx = 2 \int_0^\infty \left|\xi\left(x^2\right)\right|^2 e^{-x^2} \, dx = \int_0^\infty |\xi(x)|^2 \, x^{-\frac{1}{2}} e^{-x^2} \, dx$$

(c) Es gilt $\frac{1}{\sqrt{\cdot}} \cdot \left(\mathrm{id} \cdot \xi \circ \mathrm{id}^2\right) \circ \sqrt{\cdot} = \xi$ auf $\mathbb{R}_+^*$ für alle $\xi \in \mathbf{L}^2\left(\mathbb{R}_+^*, \mathrm{id}^{1/2} \cdot e^{-\mathrm{id}}\right)$, also ist die Abbildung surjektiv. Isometre gilt wegen

$$\int_{\mathbb{R}} \left|x \cdot \xi\left(x^2\right)\right|^2 e^{-x^2} \, dx = 2 \int_0^\infty x^2 \left|\xi\left(x^2\right)\right|^2 e^{-x^2} \, dx = \int_0^\infty |\xi(x)|^2 \, x \cdot x^{-1/2} \, e^{-x} \, dx .$$

(d) Bezeichne die Isometrien aus (ii) und (iii) mit $I_\pm$. $\left(\widetilde{L}_k^{\pm 1/2}\right)$ sind hilbertsche Basen von $\mathbf{L}^2\left(\mathbb{R}_+^*, \mathrm{id}^{\mp 1/2} \cdot e^{-\mathrm{id}}\right)$ nach Aufgabe 1, also sind $I_\pm \widetilde{L}_k^{(\pm 1/2)}$ hilbertsche Basen von $\mathbf{L}_{g/u}^2$. Dies ist die Behauptung.

(e) Setze

$$p_{2k} = I_+ \widetilde{L}_k^{(-1/2)} \quad \text{und} \quad p_{2k+1} = I_- \widetilde{L}_k^{(+1/2)} .$$

Die (p_k) sind eine Familie von Orthogonalpolynomen in $\mathbf{L}^2\left(\mathbb{R}, e^{-\mathrm{id}^2}\right)$, ebenso die Hermitepolynome (H_k) . Daher gilt $H_k \in \mathbb{K} \cdot p_k$ und die (H_k) sind total.

(f) Der Leitkoeffizient von H_k ist 2^k , der von $L_k^{(\pm 1/2)}$ ist $\frac{(-1)^k}{k!}$. Da $H_{2k} \in \mathbb{K} \cdot I_+ L_k^{(-1/2)}$ und $H_{2k+1} \in \mathbb{K} \cdot I_- L_k^{(+1/2)}$, reciht es, die Leitkoeffizienten zu vergleichen. Es folgt

$$H_{2k} = (-1)^k \cdot k! \cdot 4^k \cdot L_k^{(-1/2)} \circ \mathrm{id}^2$$

und

$$H_{2k+1} = (-1)^k \cdot k! \cdot 2^{2k+1} \cdot \mathrm{id} \cdot L_k^{(+1/2)} \circ \mathrm{id}^2 .$$

Aufgabe 3 (a) Da μ moderat ist, gibt es μ-integrierbare Mengen $A_k \subset A_{k+1} \subset X$ mit $X \setminus \bigcup_{k=0}^{\infty} A_k \in \mathcal{N}(\mu)$. Es reicht, $f_k = 1_{A_k} \cdot \min(k, f)$ zu setzen.

(b) Sei $\psi \in \mathbf{L}^2(\mu)$ mit $0 < \|\psi\|_2 \leqslant 1$. Es gibt $\varphi_k \in G$ mit $\psi = \lim_k \varphi_k$ in $\mathbf{L}^2(\mu)$. Insbesondere $\|\psi\|_2 = \lim_k \|\varphi_k\|_2$ und für ein $k_0 \in \mathbb{N}$ und alle $k \geqslant k_0$ ist $\varphi_k \neq 0$. Definiere

$$\psi_k = \|\psi\|_2 \cdot \frac{\varphi_k}{\|\varphi_k\|_2} \in G \ .$$

Dann gilt $\|\psi_k\|_2 \leqslant 1$ und aufgrund der Stetigkeit von $\cdot : \mathbb{K} \times \mathbf{L}^2(\mu) \longrightarrow \mathbf{L}^2(\mu)$ folgt $\psi = \lim_k \psi_k$.

(c) Da $|f| \in \mathbf{L}^2(\mu)$ impliziert, dass $f \in \mathbf{L}^2(\mu)$, nehme an, dass $f \geqslant 0$. Sei $\psi \in \mathbf{L}^2(\mu)$ mit $\|\psi\|_2 \leqslant 1$. Mit (ii) gibt es eine Folge $\psi_k \in G$ mit $\|\psi_k\|_2 \leqslant 1$ und $\psi = \lim_k \psi_k$. Nun folgt aus der Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$\int |\psi - \psi_\ell| \cdot f_k \, d\mu \leqslant \|\psi - \psi_\ell\|_2 \cdot \|f_k\|_2 \longrightarrow 0 \quad (\ell \longrightarrow \infty) \ ,$$

also $\int |\psi_\ell f_k| \, d\mu \longrightarrow \int |\psi f_k| \, d\mu$. Es folgt

$$\int^* |\psi| \cdot |f| \, d\mu = \sup_k \lim_\ell \int |\psi_\ell| \cdot |f_k| \, d\mu \leqslant \sup_{\varphi \in G \ , \ \|\varphi\|_2 \leqslant 1} \int^* |\varphi| \cdot |f| \, d\mu < \infty \ ,$$

also folgt die Behauptung aus dem Satz der Vorlesung mit $F = \mathbf{L}^2(\mu)$.

Philipps-Universität Marburg
Fachbereich Mathematik & Informatik

Claude Portenier
Alexander Alldridge

Funktionalanalysis I
Blatt 8, Aufgabe 1

(a) Es ist zu zeigen, dass $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$
Bezeichne $\mathcal{R}$ die Menge aller Halbnormen auf $E \times F$, d.h. $\mathcal{R} := \{p \times_\infty q \,|\, p \in \mathcal{P},\, q \in \mathcal{Q}\}$

Sei zunächst $(x, y) \in \overline{A} \times \overline{B}$. Es ist zu zeigen, dass jede Kugel im Produktraum um (x, y) einen nicht-leeren Durchschnitt mit $A \times B$ hat. Sei also $R \subset \mathcal{R}$ beliebig mit $|R| < \infty$ und ε_R gegeben. Dann gilt:

$$B_R((x,y),\varepsilon_R) = \bigcap_{r \in R} B_r((x,y),\varepsilon_r) = \bigcap_{r \in R} \{(a,b) \in E \times F \,|\, r((a,b)-(x,y)) \leq \varepsilon_r\} =$$

$$= \bigcap_{\max(p,q)=r \in R} \{(a,b) \in E \times F \,|\, \max(p(a-x), q(b-y)) \leq \varepsilon_r\} =$$

$$= \bigcap_{\max(p,q)=r \in R} \{(a,b) \in E \times F \,|\, p(a-x) \leq \varepsilon_r \wedge q(b-y) \leq \varepsilon_r\} =$$

$$= \bigcap_{\max(p,q)=r \in R} B_p(x,\varepsilon_r) \times B_q(y,\varepsilon_r) = \underbrace{\bigcap_{\max(p,q)=r \in R} B_p(x,\varepsilon_r)}_{:=U} \times \underbrace{\bigcap_{\max(p,q)=r \in R} B_q(y,\varepsilon_r)}_{:=V} =$$

Da $x \in \overline{A}$ und $y \in \overline{B}$, existieren $a \in A \cap U$ und $b \in B \cap V$, also $(a,b) \in B_R((x,y),\varepsilon_R) \cap A \times B$.

Sei umgekehrt $(x,y) \in \overline{A \times B}$. Sei weiter $P \subset \mathcal{P}$ mit $|P| < \infty$ und ε_P sowie $Q \subset \mathcal{Q}$ mit $|Q| < \infty$ und ε_Q gegeben. Man definiert $R := \{p \times_\infty q \,|\, p \in P,\, q \in Q\}$ und $\varepsilon := \min_{i \in P \cup Q}(\varepsilon_i)$. Dann gilt:

$$B_P(x,\varepsilon_P) \times B_Q(y,\varepsilon_Q) \supset \bigcap_{p \in P} B_p(x,\varepsilon) \times \bigcap_{q \in Q} B_q(y,\varepsilon) =$$

$$= \{a \in E \,|\, p(a-x) \leq \varepsilon \,\forall\, p \in P\} \times \{b \in F \,|\, q(b-y) \leq \varepsilon \,\forall\, q \in Q\} =$$

$$= \{(a,b) \in E \times F \,|\, \max(p(a-x), q(b-y)) \leq \varepsilon \,\forall\, p \in P \,\forall\, q \in Q\} = \bigcap_{r \in R} B_r((x,y),\varepsilon) = B_R((x,y),\varepsilon)$$

Da $(x,y) \in \overline{A \times B}$, existiert $z \in B_R((x,y),\varepsilon) \cap A \times B$. Daraus folgt die Behauptung.

(b)
Sei $P \subset \mathcal{P}$ mit $|P| \leq \infty$ und $r_P \in \mathbb{R}_+^*$. Für alle $p \in P$ ist $D_p(x, r_p) = p^{-1}([0, r_p[)$ offen, da p

stetig und $[0, r_p[$ offen in $\mathbb{R}_+$. Also ist $D_P(x, r_P)$ als endlicher Schnitt von offenen Mengen selbst offen. Analog folgt, dass $B_P(x, r_P)$ abgeschlossen ist. Daraus folgt dann:

$$D_P(x, r_P) = D_P(x, r_P)^\circ \text{ und } B_P(x, r_P) = \overline{B_P(x, r_P)} \text{ sowie } \overline{D_P(x, r_P)} \subset B_P(x, r_P)$$

Weiter gilt:

$$\mathrm{Rd}(D_P) = \overline{D_P} \setminus D_P = \overline{D_P} \cap F \setminus D_P$$

Ohne Einschränkung betrachtet man Kugeln um 0 und definiert

$$R := \{y \in B_P \,|\, \exists p \in P \text{ mit } p(y) = r_p\}$$

Es ist nun zu zeigen, dass R genau der Rand von D_P ist.

Sei zunächst $y \in R$. Dann existiert $p \in P$ mit $p(y) = r_p$. Es folgt $y \notin D_P(0, r_P)$, also $y \in F \setminus D_P(0, r_P)$. Man zeigt nun noch, dass y im Abschluss von D_P liegt:

Sei M eine endliche Teilmenge aus $\mathcal{P}$ und ε_M aus $\mathbb{R}_+^*$ gegeben. Für alle $m \in M$ existiert ein c aus $]0, 1[$, s.d. $m(y - cy) = m(y)(1 - c) \leq \varepsilon_m$. Für $c = \max_{m \in M}(c_m)$ gilt dann $cy \in B_M(y, \varepsilon_M)$, sowie $p(cy) = cp(y) < r_p$ für alle $p \in P$.

Damit gilt $R \subset \mathrm{Rd}(D_P)$.

Insgesamt gilt also $R = \mathrm{Rd}(D_P)$. Daraus folgt die Behauptung:

$$\overline{D_P} = D_P \cup \mathrm{Rd}(D_P) = D_P \cup R = B_P \ ,$$

somit

$$B_P{}^\circ = \overline{D_P} \setminus \mathrm{Rd}(D_P) = B_P \setminus R = D_P \ .$$

Lösungsblatt 8

Aufgabe 2 Sei $\alpha > 0$ und $\varphi \in F$. Es gilt

$$\wedge_j q_j (\alpha \cdot \varphi) = \inf_{\Sigma_j \frac{\varphi_j}{\alpha} = \varphi} \sum_{j \in J} \alpha \cdot q_j \left(\frac{\varphi_j}{\alpha} \right) = \alpha \cdot \inf_{\Sigma_j \varphi_j = \varphi} \sum_{j \in J} q_j \left(\varphi_j \right) = \alpha \cdot \wedge_j q_j (\varphi) \ .$$

Insbesondere gilt

$$-\infty < 2 \cdot \wedge_j q_j (0) = \wedge_j q_j (0) \leqslant \sum_{j \in J} q_j (0) = 0 \ ,$$

also $\wedge_j q_j (0) = 0$.

Sei weiter $\psi \in F$. Wann immer $\sum_j \psi_j = \psi$ und $\sum_j \varphi_j = \varphi$, gilt $\sum_j \left(\varphi_j + \psi_j \right) = \varphi + \psi$, also

$$\wedge_j q_j (\varphi + \psi) \leqslant \sum_{j \in J} q_j \left(\varphi_j + \psi_j \right) \leqslant \sum_{j \in J} q_j \left(\varphi_j \right) + \sum_{j \in J} q_j \left(\psi_j \right) \ .$$

Indem man zunächst zum Infimum über $\left(\varphi_j \right)$ und dann über $\left(\psi_j \right)$ übergeht, folgt

$$\wedge_j q_j (\varphi + \psi) \leqslant \wedge_j q_j (\varphi) + \wedge_j q_j (\psi) \ .$$

Dies zeigt die Behauptung.

Aufgabe 3

(a) Es gilt mit Analysis, Hauptsatz 17.3,

$$\int_{\mathbb{R}^n}^* \frac{dx}{\left(1 + |x|^2 \right)^{2s}} = \int_0^{\infty *} \int^* \frac{d\lambda_{\mathbb{S}^{n-1}} (\sigma) \ dr}{\left(1 + r^2 \right)^{2s}}$$

$$= \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma (n/2)} \int_0^{\infty *} \frac{r^{n-1} \, dr}{\left(1 + r^2 \right)^{2s}} \leqslant \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma (n/2)} \left(1 + \int_1^{\infty *} \frac{dr}{r^{1+4s-n}} \right) \ .$$

Für $4s > n$ gilt

$$\int_1^{\infty *} \frac{dr}{r^{1+4s-n}} = \frac{1}{n - 4s} \cdot \frac{1}{r^{4s-n}} \Bigg|_{r=1}^{\infty} = \frac{1}{n - 4s} < \infty \ ,$$

also folgt die Behauptung aus dem Integrabilitätssatz.

(b) Es gilt für alle $\alpha \in \mathbb{N}^n$ mit $|\alpha| \leqslant k$

$$\left\| \langle \mathrm{id} \rangle^k \partial^\alpha \varphi \right\|_2^2 = \left\| \langle \mathrm{id} \rangle^{-2s} \langle \mathrm{id} \rangle^{2(k+s)} |\partial^\alpha \varphi|^2 \right\|_1 \leqslant \left\| \langle \mathrm{id} \rangle^{-2s} \right\|_1 \cdot \left\| \langle \mathrm{id} \rangle^{2(k+s)} |\partial^\alpha \varphi|^2 \right\|_\infty$$

$$\leqslant \left\| \langle \mathrm{id} \rangle^{-s} \right\|_2^2 \cdot \left\| \langle \mathrm{id} \rangle^{k + \lceil s \rceil} \partial^\alpha \varphi \right\|_\infty^2 \leqslant \left\| \langle \mathrm{id} \rangle^{-s} \right\|_2^2 \cdot p_{k + \lceil s \rceil} (\varphi) \ ,$$

also folgt die Behauptung.

(c) Sei $k \in \mathbb{N}$ und $|\alpha| \leqslant k$. Zunächst einmal gilt

$$\left\| \langle \mathrm{id} \rangle^k \partial^\alpha \varphi \right\|_\infty \leqslant \left\| \partial^{(1)} \left(\langle \mathrm{id} \rangle^k \partial^\alpha \varphi \right) \right\|_1 .$$

Weiterhin ist

$$\partial^{(1)} \left(\langle \mathrm{id} \rangle^k \partial^\alpha \varphi \right) = \sum_{\beta+\gamma=(1)} \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{\beta_j! \gamma_j!} \cdot \partial^\beta \langle \mathrm{id} \rangle^k \cdot \partial^{\alpha+\gamma} \varphi$$

Nun gilt $\beta_j, \gamma_j \in \{0,1\}$, also $\beta_j! \gamma_j! = 1$. Weiterhin mit $\ell = |\beta|$ und $\operatorname{supp} \beta = \{j_1, \ldots, j_\ell\}$

$$\partial^\beta \langle \mathrm{id} \rangle^k = \partial_{j_1} \cdots \partial_{j_\ell} \left(1 + |\mathrm{id}|^2\right)^k = 2k \partial_{j_1} \cdots \partial_{j_{\ell-1}} \mathrm{pr}_{j_\ell} \left(1 + |\mathrm{id}|^2\right)^{k-1}$$

$$= 4k\,(k-1)\, \partial_{j_1} \cdots \partial_{j_{\ell-2}} \mathrm{pr}_{j_{\ell-1}} \mathrm{pr}_{j_\ell} \left(1 + |\mathrm{id}|^2\right)^{k-2} = \cdots = \frac{2^k k!}{(k - |\beta|)!} \mathrm{id}^\beta \langle \mathrm{id} \rangle^{k-|\beta|} ,$$

falls $|\beta| \leqslant k$ und ansonsten 0 . Es gilt

$$\left| \mathrm{id}^\beta \langle \mathrm{id} \rangle^{k-|\beta|} \cdot \partial^{\alpha+\gamma} \varphi \right| \leqslant \left| \langle \mathrm{id} \rangle^k \cdot \partial^{\alpha+\gamma} \varphi \right| = \left| \langle \mathrm{id} \rangle^{-n} \right| \cdot \left| \langle \mathrm{id} \rangle^{k+n} \cdot \partial^{\alpha+\gamma} \varphi \right| ,$$

also folgt ($|\gamma| \leqslant n$) mit Cauchy-Schwarz

$$\left\| \partial^{(1)} \left(\langle \mathrm{id} \rangle^k \partial^\alpha \varphi \right) \right\|_1 \leqslant \sum_{\beta+\gamma=(1), |\beta| \leqslant k} \frac{2^k k!}{(k - |\beta|)!} \left\| \langle \mathrm{id} \rangle^{-n} \cdot \langle \mathrm{id} \rangle^{k+n} \partial^{\alpha+\gamma} \varphi \right\|_1 \leqslant C \cdot q_{k+n}(\varphi) ,$$

wobei C definiert ist als

$$C = \left\| \langle \mathrm{id} \rangle^{-n} \right\|_2 \cdot \sum_{\beta+\gamma=(1), |\beta| \leqslant k} \frac{2^k k!}{(k - |\beta|)!} .$$

Da α beliebig war, folgt die Behauptung.

(d) Es gibt Konstanten $c, C > 0$ mit

$$q_k \leqslant c \cdot p_{k + \lceil \frac{n+1}{4} \rceil} \quad \text{und} \quad p_k \leqslant C \cdot q_{k+n}$$

als sublineare Funktional auf $\mathcal{C}^{(\infty)}(\mathbb{R}^n)$. Für alle $\varphi \in \mathcal{C}^{(\infty)}(\mathbb{R}^n)$ gilt also genau dann $p_k(\varphi) < \infty$ für alle $k \in \mathbb{N}$, wenn $q_k(\varphi) < \infty$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Also gilt $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{S}_2(\mathbb{R}^n)$. Die Gleichheit der Topologien folgt, da die Systeme (p_k) und (q_k) von Halbnormen auf $\mathcal{S} = \mathcal{S}_2$ äquivalent sind.

Philipps-Universität Marburg
Fachbereich Mathematik & Informatik

Alexander Alldridge
Claude Portenier

FA Blatt 8, Aufgabe 4

Teil (a):
Sei J ein Intervall in $\mathbb{R}$ und $\lambda \in \mathbb{K}$
$A\mathcal{C}(J) = KerD_\lambda \oplus KerB$
$\Leftrightarrow B\mid_{KerD_\lambda}: KerD_\lambda \to B(A\mathcal{C}(J))$ bijektiv ,
wobei $KerD_\lambda = \{f \in A\mathcal{C}(J) \mid \partial f - \lambda f = 0\} = \langle e^{\lambda \cdot} \rangle$
$B\mid_{KerD_\lambda}$ bijektiv $\Leftrightarrow Be^\lambda \neq 0$

Teil (b):
Verwende Variation der Konstanten -Ansatz:
$f(x) = c(x) \cdot e^{\lambda x}$, wobei $c \in A\mathcal{C}(J)$
$\Rightarrow \partial f(x) = \partial c(x) e^{\lambda x} + \lambda c(x) e^{-\lambda x} = \lambda c(x) e^{\lambda x} + g(x)$
$\Rightarrow \partial c(x) = g(x) - e^{-\lambda x}$
$\Rightarrow c(x) = \int_{[\tau,k]} g(y) e^{-\lambda y} d\lambda(y)$, wobei $\tau \in J$
$\Rightarrow f(x) = e^{\lambda x} \cdot \int_{[\tau,x]} g(y) e^{-\lambda y} d\lambda(y)$

Nebenbedingung (i):
$f(\tau_0) = 0$
$\Rightarrow \kappa(x,y) = 1_{(\tau_0,x)}(y) e^{\lambda(x-y)}$

Nebenbedingung (ii):
$f(\tau_0) = f(\tau_1)$
$f(x) = (\xi + \int_{[\tau_0,x]} g(y) e^{-\lambda y} d\lambda(y)) \cdot e^{\lambda x}$
$\Rightarrow \xi e^{\lambda \tau_0} = (\xi + \int_{[\tau_0,\tau_1]} g(y) e^{-\lambda y} d\lambda(y)) \cdot e^{\lambda \tau_1}$
$\Rightarrow \xi = \frac{e^{\lambda \tau_1}}{e^{\lambda \tau_0} - e^{\lambda \tau_1}} \int_{[\tau_0,\tau_1]} g(y) e^{-\lambda y} d\lambda(y)$
$\Rightarrow \kappa(x,y) = (1_{(\tau_0,\tau_1)}(y) \frac{1}{e^{\lambda(\tau_0-\tau_1)}-1} + 1_{(\tau_0,x)}(y)) \cdot e^\lambda (x-y)$

Teil (c):
$S := R - C\mid_{KerD} \subseteq R$
$\forall g \in G : CSg = CRg - CRg = 0$
$DSg = DRg = g$ (Da R Retraktion)

Teil (d):
$f(x) = (Rg)(x) = e^{\lambda x} \int_{(\tau_0,x)} g(y)e^{-\lambda y} d\lambda(y)$
$Ker D_\lambda = \langle e^{\lambda \cdot} \rangle$
$Cf = \int_{(\tau_0,\tau_1)} f(x) d\lambda(x)$
$C^{-1} |_{KerD_\lambda} CRg \stackrel{!}{=} k \cdot e^{\lambda}, k \in \mathbb{K}$
$\Rightarrow k \cdot \int_{(\tau_0,\tau_1)} e^{\lambda x} d\lambda(x) = CRy = \int_{(\tau_0,\tau_1)} e^{\lambda x} \int_{(\tau_0,x)} g(y)e^{-\lambda y} d\lambda(y) d\lambda(x)$
$\Rightarrow k = \frac{1}{\int_{(\tau_0,\tau_1)} e^{\lambda x} d\lambda(x)} \cdot \int_{(\tau_0,\tau_1)} e^{\lambda x} \int_{(\tau_0,x)} g(y)e^{-\lambda y} d\lambda(y) d\lambda(x)$
$\Rightarrow (Sg)(x) = (Rg)(x) - ke^{\lambda x} = e^{\lambda x} \cdot (\int_{(\tau_0,x)} g(y)e^{-\lambda y} d\lambda(y) - \frac{\int_{(\tau_0,\tau_1)} e^{\lambda z} \int_{(\tau_0,z)} g(y)e^{-\lambda y} d\lambda(y) d\lambda(z)}{\int_{(\tau_0,\tau_1)} e^{\lambda z} d\lambda(z)}$
Der Zähler vereinfacht sich zu:
$\int_{(\tau_0,\tau_1)} g(y)(e^{\lambda(\tau_1 - y)} - 1) d\lambda(y)$
Also: $\kappa_s(x,y) = (1_{(\tau_0,x)}(y) \cdot e^{-\lambda y} - \frac{1_{(\tau_0,\tau_1)}(y) e^{\lambda(\tau_1-y)} - 1}{\int_{(\tau_0,\tau_1)} e^{\lambda t} d\lambda t}) \cdot e^{\lambda x}$

Lösungsblatt 9

Aufgabe 1

(a) Die Abbildung d hat sicherlich positive Werte, ist symmetrisch und translationsinvariant. Sind $\varphi \neq \psi$, so existiert $k \in \mathbb{N}$ mit

$$d(\varphi, \psi) \geqslant \min(p_k(\varphi - \psi), 1) > 0 \ .$$

Sind $\varphi, \psi, \gamma \in F$, so gilt für alle $k \in \mathbb{N}$

$$p_k(\varphi - \psi) \leqslant p_k(\varphi - \gamma) + p_k(\gamma - \psi) \ .$$

Falls also $p_k(\varphi - \gamma), p_k(\psi - \gamma) < 1$, folgt

$$\min(p_k(\varphi - \psi), 1) \leqslant p_k(\varphi - \psi) \leqslant p_k(\varphi - \gamma) + p_k(\gamma - \psi)$$

$$= \min(p_k(\varphi - \gamma), 1) + \min(p_k(\gamma - \psi), 1) \ .$$

Falls Œ $p_k(\varphi - \gamma) \geqslant 1$, so gilt

$$\min(p_k(\varphi - \psi), 1) \leqslant 1 \leqslant 1 + \min(p_k(\gamma - \psi), 1) = \min(p_k(\varphi - \gamma), 1) + \min(p_k(\gamma - \psi), 1) \ .$$

In jedem Fall

$$\frac{1}{k+1} \min(p_k(\varphi - \psi), 1) \leqslant d(\varphi, \gamma) + d(\gamma, \psi) \qquad \text{für alle} \quad k \in \mathbb{N} \ .$$

Die Dreiecksungleichung für d folgt sofort.

(b) Sei $0 < r < 1$. Ist k fest, so ist

$$\left\{ \psi \in F \;\middle|\; d(\varphi, \psi) \leqslant \frac{r}{k+1} \right\} \subset B_{p_k}(\varphi, r) \ .$$

Umgekehrt sei $l \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{l+1} \leqslant r$, dann ist

$$\bigcap_{k \leqslant l} B_{p_k}(\varphi, r) \subset \{\psi \in F \mid d(\varphi, \psi) \leqslant r\} \ .$$

Dies liefert die Äquivalenz der Topologien.

(c) Da für jedes $k \in \mathbb{N}$

$$\left\{ \psi \in D \;\middle|\; \delta(0, \psi) < \frac{1}{k+1} \right\}$$

offen ist, existiert eine stetige Halbnorm p_k mit

$$D_{p_k}(0, 1) \subset \left\{ \psi \in F \;\middle|\; \delta(0, \psi) < \frac{1}{k+1} \right\} \ .$$

Aufgrund der Translationsinvarianz der Metrik δ ist $\mathcal{T}_{(p_k)}$ eine feinere lokal konvexe Topologie auf G als $\mathcal{T}_d$. Wegen der Stetigkeit der Halbnormen p_n ist $\mathcal{T}_{(p_k)}$ aber auch gröber als $\mathcal{T}_d$.

(d) Wir verwenden die Metrik d aus Teil (a). Da die Topologien gleich sind, genügt es die Äquivalenz der Cauchy-Eigenschaft zu zeigen.

Sei $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zunächst eine (p_k)-Cauchyfolge. Zu $1 > \varepsilon > 0$ gibt es $l \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{l+1} \leqslant \varepsilon$ und $n_l \in \mathbb{N}$ mit

$$p_k\left(\varphi_m - \varphi_n\right) \leqslant \varepsilon \quad \text{für alle } k < l \text{ und } m, n \geqslant n_l \ .$$

Für alle $m, n \geqslant n_l$ gilt dann

$$d\left(\varphi_m, \varphi_n\right) = \sup_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{k+1} \cdot \min\left(p_k\left(\varphi_m - \varphi_n\right), 1\right) \leqslant$$

$$\leqslant \max\left[\max_{k\leqslant l} p_k\left(\varphi_m - \varphi_n\right) \ , \ \sup_{k\geqslant l} \frac{1}{k+1}\right] \leqslant \varepsilon \ ,$$

d.h. $(\varphi_k)_k$ ist eine d-Cauchy-Folge.

Sei umgekehrt $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine d-Cauchy-Folge. Seien $1 > \varepsilon > 0$ und k gegeben. Es gibt ein $l \in \mathbb{N}$ mit

$$\frac{1}{k+1} p_k\left(\varphi_m - \varphi_n\right) \leqslant d\left(\varphi_m, \varphi_n\right) \leqslant \frac{\varepsilon}{k+1} \quad \text{für alle } m, n \geqslant l \ .$$

Es folgt

$$p_k\left(\varphi_m - \varphi_n\right) \leqslant \varepsilon \quad \text{für alle } m, n \geqslant l \ .$$

Somit folgt die Behauptung.

Funktionalanalysis 1
Aufgabe 2, Blatt 9

9) Es ist zu zeigen: (F folgenvollständig $\Leftrightarrow$ Weierstr. Kriterium gilt, d.h. jede absolut konvergente Reihe konvergiert)

$\Rightarrow$ Satz aus Skript

$\Leftarrow$: Sei $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset$ F Cauchy-Folge. Angenommen der Hinweis gilt

$\Rightarrow \sum_{l=0}^{\infty}\left(\varphi_{\alpha(l+1)}-\varphi_{\alpha(l)}\right)$ konvergent nach Vor. (Weierstr. Kr.)

Es ist: $\sum_{l=0}^{\infty}\left(\varphi_{\alpha(l+1)}-\varphi_{\alpha(l)}\right) = \lim_{n\to\infty}\sum_{l=0}^{n}\left(\varphi_{\alpha(l+1)}-\varphi_{\alpha(l)}\right) = (\text{Teleskop-Summe}) \lim_{n\to\infty}\varphi_{\alpha(n+1)} - \varphi_{\alpha(0)}$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\varphi_{\alpha(n)} = \sum_{l=0}^{\infty}\left(\varphi_{\alpha(l+1)}-\varphi_{\alpha(l)}\right) + \varphi_{\alpha(0)} =: \varphi$$

Es gilt: $p_k(\varphi_n-\varphi) = p_k\left(\varphi_n-\varphi_{\alpha(n)}+\varphi_{\alpha(n)}-\varphi\right) \le p_k\left(\varphi_n-\varphi_{\alpha(n)}\right) + p_k\left(\varphi_{\alpha(n)}-\varphi\right)$,
somit $\lim_{n\to\infty}\varphi_n = \varphi$.

Beweis des Hinweises:
Sei $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-Folge in F
Es gibt ein wachsendes abzählbares System von HN, das die Topologie erzeugt,
$\forall j\in\mathbb{N}\ \exists\ \alpha(j)\ \forall k,l \ge \alpha(j) : p_j(\varphi_k-\varphi_l) \le \frac{1}{2^j}$, OE α Teilfolge.
Sei p_i bel. fest

$$\Rightarrow \sum_{j=i}^{\infty} p_i\left(\varphi_{\alpha(j+1)}-\varphi_{\alpha(j)}\right) \le \sum_{j=i}^{\infty} p_j\left(\varphi_{\alpha(j+1)}-\varphi_{a(j)}\right) \le \sum_{j=i}^{\infty}\frac{1}{2^j} < \infty ,$$

somit $\sum_{l=0}^{\infty}\left(\varphi_{\alpha(l+1)}-\varphi_{\alpha(l)}\right)$ absolut konvergent.

Blatt 9
Aufgabe 3

(i) z.z.: A_k abgeschlossen

Seien $f_j \in A_k$ mit $\lim_j f_j = f \in C([0,1])$ gleichmäßig. Für alle $j \in IN$ existiert ein $t_j \in [0,1]$ mit

$$\sup_{s\in[0,1]\setminus\{t_j\}} \left| \frac{f_j(t_j) - f(s)}{t_j - s} \right| \le k \;.$$

Da [0,1] kompakt ist, existiert eine Teilfolge α von IN, so dass $\lim_j t_{\alpha(j)} = t \in [0,1]$. Für alle $s \in [0,1] \setminus \{t\}$ gilt

$|f(t) – f(s)| = \lim_j |f_{\alpha(j)}(t) - f_{\alpha(j)}(s)| = \limsup_j |f_{\alpha(j)}(t) – f_{\alpha(j)}(t_{\alpha(j)})| + |f_{\alpha(j)}(t_{\alpha(j)}) – f_{\alpha(j)}(s)|$

$= \lim_j k\, |t – t_{\alpha(j)}| + k\, |t_{\alpha(j)} – s| = k\, |t – s|$

d.h.

$$\sup_{s\in[0,1]\setminus\{t\}} \left| \frac{f(t) - f(s)}{t \;- s} \right| \le k$$

also $f \in A_k$.

(ii) z.z: $CA_k \subset C([0,1])$ dicht

Sei $f \in C([0,1])$ und ε > 0. Da $C^{(1)}([0,1]) \subset C([0,1])$ dicht ist, existiert ein $g \in C^{(1)}([0,1])$ mit $||f – g||_8 = ε / 2$. Sei $m > 4 (k + ||g'||_8) / ε$ mit $m / 2 \in IN^*$. Definiere h:= g + ε / 2 sin(p m id).
Es ist $||h – f||_8 = ||h – g||_8 + ||g – f||_8 = ε / 2 + ε / 2 = ε$. Behauptung: $h \in CA_k$.
Nach dem Mittelwertsatz gilt

$$\left|\frac{h(s)-h(t)}{s-t}\right| \ge \frac{e}{2}\left|\frac{\sin(pms)-\sin(pmt)}{s-t}\right| - \left|\frac{g(s)-g(t)}{s-t}\right| \ge \frac{e}{2}\left|\frac{\sin(pms)-\sin(pmt)}{s-t}\right| - \|g'\|_\infty .$$

Sei $t \in [0,1]$. Es gibt ein $s \in [0,1]$ mit $|s – t| = 2 / m$ und $|\sin(pms) – \sin(pmt)| = 1$. Daraus folgt

$$\left|\frac{h(s)-h(t)}{s-t}\right| \ge \frac{e}{2}\,\frac{m}{2} - \|g'\|_\infty > k.$$

(iii) Nach dem Satz von Baire ist $\bigcap_{k\in IN} CA_k \subset C([0,1])$ dicht. Da

$$\bigcap_{k\in IN} CA_k \subset \{f \in C([0,1]) \mid f \text{ nirgends differenzierbar}\} \subset C([0,1])$$

folgt die Behauptung.

Funktional-Analysis Zettel 10
Aufgabe 1

Sei F ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und sei $H \subset F$ (echt enthaltener UVR) eine Hyperebene, d.h. $F = H + \mathbb{K}.\varphi$ für ein $\varphi \in F$.

Teil a):
Zu zeigen: $\forall \varphi \in F \backslash H \ gilt: \ F = H \oplus \mathbb{K}.\varphi$

Beweis: Es ex. ein $\varphi \in F \backslash H$ mit $F = H + \mathbb{K}.\varphi$. (Sonst wäre Voraussetzung „echt enthalten“ verletzt, denn wegen H VR gilt: $\mathbb{K}.\varphi \subset H \ \forall \varphi \in H$.)

(i) Existenz einer Zerlegung:
Sei $\psi \in F \backslash H \subset F \quad \Longrightarrow \psi = \underbrace{c.\varphi}_{\in \mathbb{K} \backslash \{0\}} + \underbrace{\chi}_{\in H}$ Wäre $c = 0$ so wäre $\psi \in H$.
Umformen liefert: $\varphi = \frac{1}{c}(\chi - \psi)$ Sei nun $\eta \in F$ beliebig. Dann gilt:

$$\eta = d.\varphi + \tilde{\chi} = \underbrace{\frac{d}{c}\chi + \tilde{\chi}}_{\in H} - \underbrace{\frac{1}{c}}_{\in \mathbb{K}} \psi$$

(ii) Direktheit:
Angenommen es existiert ein $0 \neq \eta \in H \cap \mathbb{K}.\psi$.

$$\Longrightarrow \eta = c.\psi \ mit \ c \neq 0 \quad \Longrightarrow \underbrace{\frac{1}{c}\eta}_{\in H} = \psi \quad \Longrightarrow \psi \in H$$

Dies ist ein Widerspruch.

Teil b):
Sei F lokal konvex und hausdorffsch. Zu zeigen: $\overline{H} \in \{H, F\}$

Beweis: Angenommen es sei $H \neq \overline{H}$. Dann existiert $\exists \varphi \in \overline{H} \backslash H$.
Mit Teil a) folgt $F = H + \mathbb{K}.\varphi \subset \overline{H}$. Da der Abschluss von H auch in F liegt, folgt $F = \overline{H}$.

Teil c):
Zu zeigen: Für jede Linearform $\mu : F \longrightarrow \mathbb{K}, \mu \neq 0$ und jedes $\varphi \in F$ mit $\mu(\varphi) = 1$ gilt: $F = Ker\mu \oplus \mathbb{K}.\varphi$.

Beweis: Zuerst zeigen wir, dass $\mu|_{\mathbb{K}.\varphi}$ surjektiv ist.
Sei $a \in \mathbb{K}$ und $\varphi \in F$ mit $\mu(\varphi) = 1$. Da F VR, ist auch $a.\varphi \in F$. Da μ linear ist, gilt: $\mu(a.\varphi) = a$.

(i) Existenz der Zerlegung:
Angenommen es existiert ein $\psi \in F$ so dass gilt: $\psi \notin Ker\mu + \mathbb{K}.\varphi$
Dann gilt: $\mu(\psi) = d \in \mathbb{K}\backslash\{0\}$. Da $\mu|_{\mathbb{K}.\varphi}$ surjektiv existiert $\eta \in \mathbb{K}.\varphi$ so dass gilt: $\mu(\eta) = d$.
$\Longrightarrow \psi = \underbrace{(\psi - \eta)}_{\in Ker\mu} + \underbrace{\eta}_{\in \mathbb{K}.\varphi}$ weil $\mu(\psi - \eta) = \mu(\psi) - \mu(\eta) = d - d = 0$
Dies ist ein Widerspruch.

(ii) Direktheit:
siehe Teil a)

Zusatz:
Zu zeigen: μ stetig $\Longleftrightarrow$ $Ker\mu$ abgeschlossen

Beweis:
„ $\Longrightarrow$ “: Klar, da $\{0\}$ abgeschlossen in $\mathbb{K}$ und $Ker\mu = \mu^{-1}(\{0\})$
„ $\Longleftarrow$ “: Sei also $Ker\mu$ abgeschlossen. Mit Hauptsatz (2.8) folgt, dass $F/Ker\mu$ hausdorffsch. Wegen Obigem und wegen des Isomorphiesatzes ist dieser Quotient eindimensional. Also folgt mit Hauptsatz (2.7), dass $F/Ker\mu \cong \mathbb{K}$, d.h. es gibt eine stetige Bijektion $[\mu]$ zwischen $F/Ker\mu$ und $\mathbb{K}$. Da $\pi : F \longrightarrow F/Ker\mu$ stetig ist und da

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{\mu} & \mathbb{K} \\ \downarrow \pi & \nearrow_{[\mu]} & \\ F/Ker\mu & & \end{array}$$

kommutiert ist $\mu = [\mu] \circ \pi$ stetig.

Teil d):
Zu zeigen: Für jedes $\varphi \in \mathcal{K}(\mathbb{R})$ und $\epsilon > 0$ existiert ein $\psi \in \mathcal{K}(\mathbb{R})$ mit

$$\int_{\mathbb{R}} \psi \, d\lambda = 0 \text{ und } \|\varphi - \psi\|_\infty \ \leq \epsilon.$$

Beweis: Hier gibt es viele Konstruktionsmöglichkeiten für ψ.

Eine Möglichkeit ist eine „Punktspiegelung“ an $x = max\ supp\ \varphi$ mit einer anschließenden Dehnung. In Formeln heißt dies

$$\psi(t) := \varphi(t) - \frac{\epsilon}{c} \cdot \varphi(\frac{\epsilon}{c}(t-b)) \quad \text{mit } c := \|\varphi\|_\infty \text{ und } b := max\ supp\ \varphi$$

Man kann sonst auch weit außen Kompakta nehmen und Real- und Imaginärteil des Integrals von φ mit Funkionswerten ϵ und $i\epsilon$ abfeiern. Dabei muss man aber noch auf einen stetigen Auf- und Abstieg der Funktion achten, was das Aufschreiben in Formeln erschwert.

Zusatz:
Was bedeutet dies?

(i) $Ker\mu$ liegt dicht in $\mathcal{K}(\mathbb{R})$ bzgl. $\|\cdot\|_\infty$.

(ii) Da der Abschluss von $Ker\mu$ somit $\mathcal{K}(\mathbb{R})$ wäre, was sicherlich falsch ist, kann $Ker\mu$ nicht abgeschlossen sein, und da $\mathcal{K}(\mathbb{R})$ lokal konvex hausdorffsch ist, kann μ somit nicht stetig sein.

Philipps-Universität Marburg
Fachbereich Mathematik & Informatik

Alexander Alldridge
Claude Portenier

Funktionalanalysis I WS 03/04

Übungsblatt 10, Aufgabe 2

(a) Sei (φ_k) Cauchyfolge in $(\mathcal{K}(X), \mathcal{P})$,
wobei $\mathcal{P} := \{\|\cdot\|_{\infty,\rho} : \rho \in (\mathbb{R}_+^\star)^X\}$
Es gilt: $(\rho\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{C}^0(X), \forall\rho \in \mathcal{P}$
Da $(\rho\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ CF in $(\mathcal{C}^0(X), \|\cdot\|_\infty)$ ist, gilt:
$(\rho\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}} \to \varphi_\rho$ glm. $\forall\rho \in \mathcal{P}$
$\varphi_\rho \in \mathcal{C}^0(X)$, da diese Menge bzgl. der Sup-Norm vollst. ist.
Ferner ist für festes $x \in X (\rho(x)\varphi_k(x))$ eine CF in $\mathbb{R}$
$\Rightarrow \varphi_\rho = \rho \cdot \varphi \forall\rho$
Denn $\rho(x)$ lässt sich aus dem Limes herausziehen.

Noch zu zeigen: $\varphi \in \mathcal{K}(X)$
Bew.: Ann: $\varphi \notin \mathcal{K}(X)$
$\Rightarrow$ *supp*(φ) ist unendliche Menge
$\Rightarrow$ *supp*$(\varphi) \setminus K \neq \varnothing$ für jede endliche Menge K
Definiere nun ein spezielles ρ:
$\rho : X \longrightarrow \mathbb{R}_+^\star, x \longmapsto \frac{1}{|\varphi(x)|} |_{\{\varphi(x)\neq 0\}}$
Da $\rho\varphi \in \mathcal{C}^0(X)$ existiert ein endliches K, so dass $\rho(x)\varphi(x) \leq \frac{1}{2} \forall x \notin K$
im Widerspruch dazu, dass es für jedes endliche K ein Element in supp $(\varphi) \setminus K$ mit $\rho(x)\varphi(x) = 1$ gibt.

(b) Dass die angegebene Norm nach unten halbstetig ist, ist klar:
Betrachte sie als Supremum von entsprechenden Halbnormen bei welchen über endliche Teilmengen von X summiert wird.
Noch zu zeigen: $\|\cdot\|_1$ ist nicht stetig
Bew.: Ann: $\|\cdot\|_1$ ist stetig
$\Rightarrow \exists\tilde{\rho}_1, ..., \tilde{\rho}_n \in (\mathbb{R}_+^\star)^X, c \in \mathbb{R}_+$
mit $\|\varphi\|_1 \leq c \cdot \max_{i=1,...,n} \|\varphi\|_{\infty,\rho_i} \forall\varphi$
Definiere: $\rho := c \cdot \max_{i=1,...,n} \tilde{\rho}_i$
Dann gilt: $c \cdot \max_{i=1,...,n} \|\tilde{\rho}_i\varphi\|_\infty = \max_{i=1,...,n} \max_{x\in K} c \cdot |\tilde{\rho}_i(x)\varphi(x)| \leq \max_{x\in K} |\rho(x)\varphi(x)|$
$\Rightarrow \|\varphi\|_1 \leq \|\rho\varphi\|_\infty = \|\varphi\|_{\rho,\infty}$
Definiere: $M_L := \{x \in X : \rho(x) \leq L\}$
$\Rightarrow card(M_L) \leq L$
Und: $\rho^{-1}(\mathbb{R}_+^\star) = X$
$\Rightarrow \bigcup_{L\in\mathbb{N}} M_L = X$

Dabei ist die linke Seite als abz. Vereinigung von endlichen Mengen abzählbar, die rechte hingegen überabzälbar.
$\Rightarrow$ Widerspruch und somit die Beh.

Fachbereich Mathematik und Informatik
Philipps-Universität Marburg

Lösungsblatt 10

Aufgabe 3

(a) Seien $\chi \in \mathcal{H}$, $\zeta \in \mathcal{G}$ fest. Die in beiden Argumenten semilineare Abbildung

$$\omega_{\chi,\zeta} : (\xi, \eta) \longrightarrow (\xi|\, \chi) \cdot (\eta|\, \zeta) : \mathcal{H} \times \mathcal{G} \longrightarrow \mathbb{K}$$

definiert eine semilineare Abbildung

$$\omega_{\chi,\zeta} : \mathcal{H} \quad \mathcal{G} \longrightarrow \mathbb{K} \quad \text{mit} \quad \omega_{\chi,\zeta} (\xi \quad \eta) = (\xi|\, \chi) \cdot (\eta|\, \zeta) \ .$$

Nun gilt

$$\omega_{\chi+\alpha\cdot\pi,\zeta} (\xi \quad \eta) = (\xi|\, \chi + \alpha \cdot \pi) \cdot (\eta|\, \zeta) = ((\xi|\, \chi) + \alpha \cdot (\xi|\, \pi)) \cdot (\eta|\, \zeta) = (\omega_{\chi,\zeta} + \alpha \cdot \omega_{\pi,\zeta}) (\xi \quad \eta)$$

und analog

$$\omega_{\chi,\zeta+\alpha\cdot\vartheta} = \omega_{\xi,\zeta} + \alpha \cdot \omega_{\pi,\zeta} \ .$$

Das heißt, die Abbildung

$$: \mathcal{H} \times \mathcal{G} \longrightarrow (\mathcal{H} \quad \mathcal{G})^{\circledast}$$

ist bilinear. Sie definiert daher eine lineare Abbildung

$$: \mathcal{H} \quad \mathcal{G} \longrightarrow (\mathcal{H} \quad \mathcal{G})^{\circledast}$$

mit

$$(\chi \quad \zeta) (\xi \quad \eta) = \omega_{\chi,\zeta} (\xi \quad \eta) = (\xi|\, \chi) \cdot (\eta|\, \zeta) \ .$$

Nun definiert man die sesquilineare Abbildung

$$(\cdot|\, \cdot)_{\mathcal{H} \quad \mathcal{G}} : \mathcal{H} \quad \mathcal{G} \times \mathcal{H} \quad \mathcal{G} \longrightarrow \mathbb{K}$$

durch

$$(s|\, t)_{\mathcal{H} \quad \mathcal{G}} = \quad (s) (t) \qquad \text{für alle} \quad s, t \in \mathcal{H} \quad \mathcal{G} \ .$$

Dann ist

$$\overline{(\xi \quad \eta|\, \chi \quad \zeta)_{\mathcal{H} \quad \mathcal{G}}} = \overline{(\xi|\, \chi) \cdot (\eta|\, \zeta)} = (\chi|\, \xi) \cdot (\zeta|\, \eta) = (\chi \quad \zeta|\, \xi \quad \eta)_{\mathcal{H} \quad \mathcal{G}} \ ,$$

also $(\cdot|\, \cdot)_{\mathcal{H} \quad \mathcal{G}}$ hermitesch. Sei nun $t \in \mathcal{H} \quad \mathcal{G}$. Dann ist $t = \sum_i \xi_i \quad \eta_i$. Sei $\left(\chi_j\right)$ eine hilbertsche Basis von $\mathcal{H}$. Dann gibt es (α_{ij}) mit $\xi_i = \sum_j \alpha_{ij} \chi_j$. Es folgt

$$t = \sum\nolimits_{ij} \alpha_{ij} \chi_j \quad \eta_i = \sum\nolimits_j \chi_j \quad \sum\nolimits_i \alpha_{ij} \eta_i = \sum\nolimits_j \chi_j \quad \zeta_j \ ,$$

wobei $\zeta_j = \sum_i \alpha_{ij} \eta_i$. Nun gilt

$$\|s\|^2_{\mathcal{H} \quad \mathcal{G}} = \sum\nolimits_{ij} \left(\chi_i \quad \zeta_i|\, \chi_j \quad \zeta_j\right)_{\mathcal{H} \quad \mathcal{G}} = \sum\nolimits_{ij} \left(\chi_i|\, \chi_j\right) \cdot \left(\zeta_i|\, \zeta_j\right) = \sum\nolimits_i \|\zeta_i\|^2 \ .$$

Falls $\|s\|_{\mathcal{H}\ \ \mathcal{G}} = 0$, folgt also $\zeta_i = 0$ für alle i , somit $s = 0$. Damit ist $(\cdot|\cdot)_{\mathcal{H}\ \ \mathcal{G}}$ ein Skalarprodukt.

(b) Durch

$$\mathbf{L}^2(\mu) \times \mathbf{L}^2(\nu) \longrightarrow \mathbf{L}^2(\mu\ \ \ \nu) : (f,g) \longmapsto f\ \ \ g \ ,$$

wobei

$$(f\ \ \ g)(x,y) = f(x)\, g(y) \qquad \text{für alle} \quad x \in X \ , \ y \in Y \ ,$$

ist eine bilineare Abbildung definiert. Sie ist wohldefiniert nach dem Satz von Tonelli, da $f\ \ \ g$ $\mu\ \ \ \nu$-messbar ist und

$$\int_X^* \int_Y^* |f\ \ \ g|^2 \, d\nu \, d\mu = \int_X |f|^2 \, d\mu \cdot \int_Y |g|^2 \, d\nu < \infty \ .$$

Damit gibt es eine lineare Abbildung

$$\Phi : \mathbf{L}^2(\mu)\ \ \ \mathbf{L}^2(\nu) \longrightarrow \mathbf{L}^2(\mu\ \ \ \nu) : f\ \ \ g \longmapsto f\ \ \ g \ .$$

Weiter gilt nach dem Satz von Fubini

$$\|f\ \ \ g\|^2_{\mathbf{L}^2(\mu\ \ \nu)} = \int_X \int_Y |f\ \ \ g|^2 \, d\nu \, d\mu = \|f\|^2_{\mathbf{L}^2(\mu)} \cdot \|g\|^2_{\mathbf{L}^2(\nu)} = \|f\ \ \ g\|^2_{\mathbf{L}^2(\mu)\ \ \mathbf{L}^2(\nu)}$$

für alle $f \in \mathbf{L}^2(\mu)$ und $g \in \mathbf{L}^2(\nu)$. Falls also $t \in \mathbf{L}^2(\mu)\ \ \ \mathbf{L}^2(\nu)$ beliebig ist, schreibe $t = \sum_i f_i\ \ \ g_i$, wobei (f_j) wie in (a) eine hilbertsche Basis von $\mathbf{L}^2(\mu)$ sei. Dann gilt (Pythagoras)

$$\|t\|^2_{\mathbf{L}^2(\mu)\ \ \mathbf{L}^2(\nu)} = \sum\nolimits_i \|g_i\|^2_{\mathbf{L}^2(\nu)} = \sum\nolimits_i \|f_i\ \ \ g_i\|^2_{\mathbf{L}^2(\mu\ \ \nu)} = \|\Phi(t)\|^2_{\mathbf{L}^2(\mu\ \ \nu)} \ .$$

Damit ist Φ eine Isometrie und setzt sich somit zu einer Isometrie auf die Vervollständigung fort.

Um zu sehen, dass die induzierte Abbildung surjektiv ist, reicht zu zeigen, dass Φ dichtes Bild hat. $\mathcal{K}(X \times Y)$ ist dicht. Sei $\chi \in \mathcal{K}(X \times Y)$ und seien $K \subset X$, $L \subset Y$ kompakt mit $\operatorname{supp} \chi \subset K \times L$. Φ induziert eine Injektion

$$\mathcal{C}^0(K)\ \ \ \mathcal{C}^0(L) \hookrightarrow \mathcal{C}^0(K \times L) = \mathcal{K}(X \times Y, K \times L) \ .$$

Man sieht leicht, dass das Bild dieser Injektion eine Unteralgebra A von $\mathcal{C}^0(K \times L)$ ist. Seien $(x,y), (u,v) \in K \times L$ mit $(x,y) \neq (u,v)$. Dann ist Œ $x \neq u$. Es gibt $\varphi \in \mathcal{C}(K)$ mit $\varphi(x) = 1$ und $\varphi(u) = 0$ und $\psi \in \mathcal{C}^0(L)$ mit $\psi(y) = 1$. Dann ist

$$(\varphi\ \ \ \psi)(x,y) = 1 \neq 0 = (\varphi\ \ \ \psi)(u,v) \ ,$$

also trennt A die Punkte von $K \times L$. Damit ist A dicht in $\mathcal{C}^0(K \times L)$ und χ liegt im Abschluss von $\Phi(\mathbf{L}^2(\mu)\ \ \ \mathbf{L}^2(\nu))$. (Verknüpfung von Abbildungen mit dichtem Bild hat dichtes Bild.) Damit

$$\mathbf{L}^2(\mu\ \ \ \nu) = \overline{\mathcal{K}(X \times Y)} \subset \overline{\Phi(\mathbf{L}^2(\mu)\ \ \ \mathbf{L}^2(\nu))} \ .$$

Philipps-Universität Marburg
Fachbereich Mathematik & Informatik

Alexander Alldridge
Claude Portenier

Funktionalanalysis I WS 03/04

Übungsblatt 11, Aufgabe 1

(a) Zu zeigen: $\varphi \cdot \psi \in \ell^1(X)$
Beweis: $\sum_{x\in X} |\varphi(x) \cdot \psi(x)| \overset{Hoelder\neq}{\leq} (\sum_{x\in X} |\varphi(x)|^p)^{\frac{1}{p}} (\sum_{x\in X} |\psi(x)|^q)^{\frac{1}{q}} < \infty$
Denn $\varphi \in \ell^p(X)$ und $\psi \in \ell^q(X)$.
Dass die Abbildung linear ist folgt aus der Linearität des Integrals.
Noch zu zeigen: μ_ψ stetig.
Beweis: $\|\mu_\psi\| = sup_{\varphi\in\ell^p(X),\|\varphi\|_p\leq 1} |\sum_{x\in X} \varphi(x) \cdot \psi(x)|$
$\leq sup_{...} \sum_{x\in X} |\varphi(x) \cdot \psi(x)| \leq sup_{...} (\sum_{x\in X} |\varphi(x)|^p)^{\frac{1}{p}} (\sum_{x\in X} |\psi(x)|^q)^{\frac{1}{q}}$
Dabei ist der erste Term ≤ 1 und der zweite $= \|\psi\|_q$
Insbesondere ist $\|\mu_\psi\| < \infty$, μ_ψ also stetig.

(b) Nach Teil (a) gilt bereits: $\|\mu_\psi\| \leq \|\psi\|_q$
Bleibt also zu zeigen: $\|\mu_\psi\| \geq \|\psi\|_q$
Beweis: Finde ein φ mit $\|\varphi\|_p \leq 1$ so dass $|\sum_{x\in X} \varphi(x) \cdot \psi(x)| = \|\psi\|_q$
Ist $\psi = 0$, so setze $\varphi = 0 \Rightarrow$ Behauptung.
Ist $\psi \neq 0$, dann definiere:
$\varphi := \frac{\bar{\psi}}{\|\psi\|_q} \cdot \frac{|\psi|^{q-1}}{\|\psi\|_q^{q-1}}$
Dann gilt:
(I) $\|\varphi\|_p^p = \sum_{x\in X,\psi(x)\neq 0} (\frac{|\psi(x)|^{q-1}}{\|\psi\|_q^{q-1}})^p = \sum_{x\in X} \frac{|\psi(x)|^q}{\|\psi\|_q^q} = \|\psi\|_q^{-q} \cdot \sum_{x\in X} |\psi(x)|^q = 1$
(II) $|\sum_{x\in X} \varphi(x) \cdot \psi(x)| = \frac{1}{\|\psi\|_q^{q-1}} \cdot |\sum_{x\in X} \frac{\bar{\psi}(x)}{|\psi(x)|} \cdot |\psi(x)|^{q-1} \cdot \psi(x)|$
$= \frac{1}{\|\psi\|_q^{q-1}} \cdot |\sum_{x\in X} |\psi(x)|^q| = \|\psi\|_q$
$\Rightarrow T$ ist Isometrie.

(c) Zu zeigen: T surjektiv.
Beweis: Sei $\mu \in \ell^p(X)'$
Definiere: $\psi(x) := \mu(1_{\{x\}})$ und zeige (i) $\psi(x) \in \ell^q(X)$ und (ii) $\mu_\psi = \mu$
Ad (i) :
Sei $K \subset X$ eine endliche Teilmenge.
$\sum_{x\in K} |\psi(x)|^q = \sum_{x\in K} \psi(x)\bar{\psi}(x) \cdot |\psi(x)|^{q-2} = \sum_{x\in K} \mu(1_{\{x\}}) \cdot \bar{\psi}(x) \cdot |\psi(x)|^{q-2}$
$\overset{\mu\ linear}{=} \mu(\sum_{x\in K} 1_{\{x\}} \cdot \ \bar{\psi}(x) \cdot |\psi|^{q-2}(x))$
$\overset{\mu\ stetig}{=} \|\mu\| \cdot \|\sum_{x\in K} 1_{\{x\}} \cdot \ \bar{\psi}(x) \cdot |\psi|^{q-2}(x)\|_p$
$\overset{p-Norm}{=} \|\mu\| \cdot (\sum_{y\in X} |\sum_{x\in K} 1_{\{x\}}(y) \cdot \ \bar{\psi}(x) \cdot |\psi|^{q-2}(x)|^p)^{\frac{1}{p}}$
$= \|\mu\| \cdot (\sum |\bar{\psi}(x) \cdot |\psi|^{q-2}(x)|^p)^{\frac{1}{p}}$

$= \|\mu\| \cdot (\sum_{x\in K} |\psi(x)|^q)^{\frac{1}{p}}$
$\Rightarrow \frac{\sum_{x\in K} |\psi(x)|^q}{(\sum_{x\in K} |\psi(x)|)^{\frac{1}{p}}} \leq \|\mu\|$
$\Rightarrow (\sum_{x\in K} |\psi(x)|^q)^{\frac{1}{q}} \leq \|\mu\|$
Übergehen zum Supremum über alle endlichen Mengen liefert die Behauptung.

Ad (ii): Da $(1_{\{x\}})_{x\in X}$ total in $\ell^p(X)$, genügt es die Behauptung für diese Funktionen zu zeigen:
Sei x_0 beliebig:
$\mu_\psi(1_{\{x_0\}}) = \sum_{x\in X} 1_{\{x_0\}}(x) \cdot \mu(1_{\{x\}}) = \mu(1_{\{x_0\}})$

Lösungsblatt 11

Aufgabe 2 Sei $f : X \longrightarrow \mathbb{K}$. Es gilt

$$\varphi \cdot f \in \ell^1(X) \quad \Longleftrightarrow \quad \varphi \cdot |f| \in \ell^1(X)$$

und

$$f \in \ell^q(X) \quad \Longleftrightarrow \quad |f| \in \ell^q(X) \ .$$

Demzufolge kann Œ $f \geqslant 0$ angenommen werden. Für jede endliche Teilmenge $K \subset X$ ist $1_K \cdot f \in \ell^q(X)$ und somit $\mu_K = \mu_{1_K \cdot f} \in \ell^p(X)'$ nach Aufgabe 1. Nach Voraussetzung gilt

$$\sup\nolimits_{K \in \mathfrak{K}(X)} |\mu_K(\varphi)| = \sup\nolimits_{K \in \mathfrak{K}(X)} \left| \sum_{x \in K} \varphi(x) \cdot f(x) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sup\nolimits_{K \in \mathfrak{K}(X)} \sum_{x \in K} |\varphi(x) \cdot f(x)| = \|\varphi \cdot f\|_1 < \infty \ ,$$

so dass $(\mu_K)_{K \in \mathfrak{K}(X)}$ in $\mathcal{L}_s(\ell^p(X), \mathbb{K})$ beschränkt ist. Nach dem Satz über die gleichmäßige Beschränktheit ist $p = \sup_K |\mu_K|$ eine stetige Halbnorm auf $\ell^p(X)$. Es gibt also eine Konstante $c \in \mathbb{R}_+$ mit

$$c \cdot \|\varphi\|_p \geqslant p(|\varphi|) \geqslant |\mu_K(|\varphi|)| = \sum_{x \in K} |\varphi(x)| \cdot f(x) \geqslant \left| \sum_{x \in K} \varphi(x) \cdot f(x) \right| \ .$$

für alle endlichen $K \subset X$ und $\varphi \in \ell^p(X)$. Dies zeigt, dass $\nu_f : \varphi \longmapsto \sum_{x \in X} (f \cdot \varphi)(x)$ eine stetige Linearform ist, also $\nu_f = \mu_\psi$ für ein $\psi \in \ell^q(X)$. Dann folgt aber

$$f(x) = \nu_f\left(1_{\{x\}}\right) = \mu_\psi\left(1_{\{x\}}\right) = \psi(x) \qquad \text{für alle} \quad x \in X \ .$$

Damit ist $f = \psi \in \ell^q(X)$.

Aufgabe 3

(a) Zu $x \in X$ sei

$$A_{x,l} = \left\{ |\varkappa(x, \diamond)| \geqslant \frac{1}{l} \right\} \ .$$

Wegen (a) ist die Integrierbarkeit klar und die Limeseigenschaft aus dem Hinweis folgt mit dem Satz von Lebesgue.

Ist $x \in X$ und A eine ν-integrierbare Menge, so ist mit

$$\operatorname{sgn} z = \begin{cases} \frac{z}{|z|} & z \neq 0 \\ 0 & z = 0 \end{cases}$$

die Funktion $1_A \cdot \operatorname{sgn} \overline{\varkappa(x, \diamond)}$ ν-integrierbar und es gibt eine Folge $\left(\psi_{x,k}\right)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathcal{K}(Y)$ mit $1_A \cdot \operatorname{sgn} \overline{\varkappa(x, \diamond)} = \lim_k \psi_{x,k}$ in $\mathbf{L}^1(\nu)$. Durch Schneiden und mittels des Satzes von Riesz-Fischer kann $\left|\psi_{x,k}\right| \leqslant 1$ für alle k sowie punktweise Konvergenz ν-fast überall angenommen werden. Dann erfüllt die Folge $\left(\varkappa(x, \cdot) \cdot \psi_{x,k}\right)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbf{L}^1(\nu)$ die Voraussetzungen des Satzes von Lebesgue und es folgt

$$\lim\nolimits_{k\to\infty} \left| \int \varkappa(x,y) \cdot \psi_{x,k}(y)\, d\nu(y) \right| = \left| \int \lim\nolimits_{k\to\infty} \varkappa(x,y) \cdot \psi_{x,k}(y)\, d\nu(y) \right| =$$

$$= \int_A |\varkappa(x,y)|\, d\nu(y) \ .$$

Zusammen erhält man für jedes $x \in X$ und für jede der Mengen $A_{x,l}$ eine Folge $\left(\psi_{x,k}^{(l)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$, so dass

$$\int |\varkappa(x,y)|\, d\nu(y) = \lim\nolimits_{l\to\infty} \int_{A_l} |\varkappa(x,y)|\, d\nu(y) =$$

$$= \lim\nolimits_{l\to\infty} \lim\nolimits_{k\to\infty} \left| \int \varkappa(x,y) \cdot \psi_{x,k}^{(l)}(y)\, d\nu(y) \right| \leqslant$$

$$\overset{(d)}{\leqslant} \lim\nolimits_{l\to\infty} \lim\nolimits_{k\to\infty} \|K\| \left\|\psi_{x,k}^{(l)}\right\|_\infty \leqslant \|K\| \ .$$

Dies liefert die noch fehlende Ungleichung für die Behauptung.

(b) Der Kern $|f\rangle\langle g|$ erfüllt die Bedingungen (a) und (b) trivialerweise und wegen

$$|f(x) \cdot g| \leqslant \|f\|_\infty \cdot |g| \quad \text{für alle } x$$

auch Bedingung (c). Man rechnet sofort

$$\sup\nolimits_{x\in X} \int \big| |f\rangle\langle g|(x,y) \big|\, d\nu(y) = \sup\nolimits_{x\in X} |f(x)| \cdot \int |g(y)|\, dy = \|f\|_\infty \cdot \|g\|_1 < \infty$$

und erhält damit die Norm des Integraloperators.

(c) Hier sind ebenfalls alle Bedingungen (a), (b) und (c) erfüllt. Wir fassen die Familien von Vektoren $(f_j)_{j=1,\ldots,m}, (g_j)_{j=1,\ldots,m} \subset \mathbb{K}^n$ zu Matrizen $F, G \in \mathbb{K}^{n\times m}$ zusammen:

$$F_{kj} = f_j(k) \quad \text{und} \quad G_{kj} = g_j(k) \ .$$

Für $k = 1, \ldots, n$ gilt

$$\int \left| \sum_{j=1}^m |f_j\rangle\langle g_j|(k,l) \right| d\#(l) = \sum_{l=1}^n \left| \sum_{j=1}^m f_j(k) \cdot \overline{g_j(l)} \right| = \sum_{l=1}^n \left| \sum_{j=1}^m F_{kj} G_{jl}^* \right| =$$

$$= \sum_{l=1}^n \left| (FG^*)_{k,l} \right| = \|h_k\|_1 \ ,$$

wenn

$$h_k(l) = (FG^*)_{kl} \ .$$

Damit ist

$$\|K\| = \max_{k=1}^{n} \|h_k\|_1 \ ,$$

das Maximum der Zeilen-1-Normen.

Blatt 12
Aufgabe 1

a) Definiere T: $l^1(X) \to c^0(X)_\beta'$: f $|\!\to$ Tf mit

$$(Tf)(g) := \sum_{x\in X} f(x)g(x)$$

für alle $g \in c^0(X)$. Dann folgt mit der Hölder-Ungleichung

$$|(Tf)(g)| \le \sum_{x\in X} |f(x)g(x)| = \|fg\|_1 \le \|f\|_1 \|g\|_\infty < \infty$$

d.h. die Reihe ist absolut konvergent für alle $f \in l^1(X)$und $g \in c^0(X)$. Weiter ist $\|Tf\| = \|f\|_1 < 8$, d.h. Tf ist stetig und T ist wohldefiniert.
Beh.: T ist ein isometrischer Isomorphismus.
Wenn T isometrisch ist, ist T automatisch injektiv und T^{-1} stetig wegen Normerhaltung. Es bleibt also nur Surjektivität und Isometrie zu zeigen.
Surjektivität: Sei $\mu \in c^0(X)_\beta'$. Setze $f(x) := \mu(1_{\{x\}})$ für alle $x \in X$ und $h(x) := |f(x)| / f(x)$ falls $f(x) \neq 0$ und 0 sonst. Sei $K \subset X$ endlich. Es gilt

$$\sum_{x\in K} |f(x)| = \sum_{x\in K} |m(1_{\{x\}})| = \sum_{x\in K} h(x)m(1_{\{x\}}) = |m(\sum_{x\in K} h(x)1_{\{x\}})| \le \|m\| \left\|\sum_{x\in K} h(x)1_{\{x\}}\right\| \le \|m\| < \infty$$

und somit $\|f\|_1 = \|\mu\| < 8$, d.h. $f \in l^1(X)$. Nach Definition ist $(Tf)(1_{\{x\}}) = f(x) = \mu(1_{\{x\}})$, d.h. $Tf = \mu$ auf $\mathrm{lin}(1_{\{x\}})$. Aus Stone-Weierstraß folgt, dass $\mathrm{lin}(1_{\{x\}}) \subset c^0(X)$ dicht ist. Durch Stetigkeit ist $Tf = \mu$ auf ganz $c^0(X)$.
Isometrie: Für $f \in l^1(X)$ wurde schon $\|Tf\| = \|f\|_1$ und $\|f\|_1 = \|Tf\|$ gezeigt, woraus die Gleichheit folgt.
b) Definiere T: $l^8(X) \to$: $l^1(X)_\beta'$ wie oben. Bleibt z.z.: T surjektive Isometrie.
Surjektivität: Sei $\mu \in l^1(X)_\beta'$, $f(x) := \mu(1_{\{x\}})$ für alle $x \in X$. Wegen $|\mu(1_{\{x\}})| = \|\mu\| \, \|1_{\{x\}}\|_1 = \|\mu\|$ folgt

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in X} |m(1_{\{x\}})| \le \|m\| < \infty$$

d.h. $f \in l^8(X)$. Es ist wieder $Tf = \mu$ auf $\mathrm{lin}(1_{\{x\}}) = K(X) \subset L^1(X,\#) = l^1(X)$ dicht, d.h. $Tf = \mu$ auf $l^1(X)$.
c) Beh.: Die Norm von μ wird genau dann nicht angenommen, wenn supp f = supp $T^{-1}\mu = \{ x \in X \mid \mu(1_{\{x\}}) \neq 0 \}$ =: M unendlich ist.
"$\Rightarrow$": Ist M endlich, so gilt für

$$j := \sum_{x\in M} \overline{\operatorname{sgn} m(1_{\{x\}})} 1_{\{x\}}$$

$$m(j) = \sum_{x\in M} |m(1_{\{x\}})| = \sum_{x\in X} |m(1_{\{x\}})| = \|f\| = \|Tf\| = \|m\|$$

"$\Leftarrow$": Sei $\varphi \in c^0(X)$ mit $\|\varphi\| = 1$, $(K_l) \subset k(X)$ wachsend und

$$j_l := \sum_{x\in K_l} j(x)1_{\{x\}}$$

Dann gilt $\lim_l \|\varphi_l - \varphi\|_8 = 0$. Sei $0 < \varepsilon < 1$. Es gibt ein $N \in |N$, so dass für alle $x \in X \setminus K_N$ gilt $|\varphi(x)| = \varepsilon$. Damit gilt die Abschätzung

$$
|m(j)| = \lim_{l} \left| \sum_{x \in K_k} j(x) m(1_{\{x\}}) \right| \leq \lim_{l} \sum_{x \in K_l} |j(x)| \, |m(1_{\{x\}})|
$$

$$
= \lim_{l \geq N} \left(\sum_{x \in K_l \setminus K_N} |j(x)| \, |m(1_{\{x\}})| + \sum_{x \in K_l} |j(x)| \, |m(1_{\{x\}})| \right) \leq e \sum_{x \in X \setminus K_N} |m(1_{\{x\}})| + \sum_{x \in K_N} |m(1_{\{x\}})|
$$

$$
< \sum_{x \in X} |m(1_{\{x\}})| = \| f \| = \| Tf \| = \| m \|
$$

d.h. $|\mu(\varphi)| < \|\mu\|$.

Funktional-Analysis Zettel 12
Aufgabe 2

In dieser Aufgabe geht es um die schwache Topologie und das induktive Tensorprodukt. Dabei seinen zunächst F und G lokal konvexe Räume.

Wir zeigen, dass $|F_\sigma\rangle_i\langle G_\sigma|_\sigma$ homöomorph zu $|F\rangle_i\langle G|_\sigma$ ist. Dazu betrachten wir die Bijektion

$$id : |F_\sigma\rangle_i\langle G_\sigma|_\sigma \longrightarrow |F\rangle_i\langle G|_\sigma \ .$$

Wir müssen also jeweils die schwache Stetigkeit zeigen. Dabei werden wir benutzen, dass $(F_\sigma)^\dagger = F^\dagger$ gilt.

Beweis:

Sei p eine der die Topologie erzeugenden Halbnormen auf $|F\rangle_i\langle G|_\sigma$.

$\Leftrightarrow p = |\mu|$, wobei μ stetige Linearform auf $|F\rangle_i\langle G|$ ist.

$\Leftrightarrow \mu \circ |\cdot\rangle\langle\gamma|$ ist eine stetige Linearform auf F für alle γ aus G und $\mu \circ |\varphi\rangle\langle\cdot|$ ist eine stetige Linearform auf G für alle φ aus F.

$\Leftrightarrow \mu \circ |\cdot\rangle\langle\gamma|$ ist eine stetige Linearform auf F_σ für alle γ aus G und $\mu \circ |\varphi\rangle\langle\cdot|$ ist eine stetige Linearform auf G_σ für alle φ aus F.

$\Leftrightarrow \mu$ ist eine stetige Linearform auf $|F_\sigma\rangle_i\langle G_\sigma|$.

$\Leftrightarrow p = |\mu|$ ist eine der die schwache Topologie von $|F_\sigma\rangle_i\langle G_\sigma|_\sigma$ erzeugenden Halbnormen.

Zusatz:

Es gilt die folgende Kette:

$$|F\rangle_i\langle G| \overset{stetig}{\longrightarrow} |F_\sigma\rangle_i\langle G_\sigma| \overset{stetig}{\longrightarrow} |F\rangle_i\langle G|_\sigma = |F_\sigma\rangle_i\langle G_\sigma|_\sigma$$

Fachbereich Mathematik und Informatik
Philipps-Universität Marburg

Lösungsblatt 12

Aufgabe 3 (a) Ist μ eine solche Linearform, so gilt für alle endlichen Teilmengen $K \subset J$ und alle $\left(\beta_j\right)_{j \in K} \subset \mathbb{R}_+$

$$p\left(-\sum_{j \in K} \beta_j \cdot \varphi_j\right) \geqslant \mu\left(-\sum_{j \in K} \beta_j \cdot \varphi_j\right) = -\sum_{j \in K} \beta_j \cdot \mu\left(\varphi_j\right) \geqslant$$

$$\geqslant -\sum_{j \in K} \beta_j \cdot \alpha_j \ .$$

Umgekehrt gelte die Ungleichung. Man definiere $q_j = r_j^\infty$, $j \in J$, wobei

$$r_j : \mathbb{R}_+ \cdot \varphi_j \longrightarrow \mathbb{R} : a \cdot \varphi_j \longmapsto a \cdot \alpha_j \ .$$

Œ sei $0 \notin J$. Sei $\widetilde{J} := J \cup \{0\}$ und $q_0 := p$. Es ist die Existenz einer Linearform μ mit $\mu \leqslant q_j$ für alle $j \in \widetilde{J}$ zu zeigen. Dies wird mittels des Orlicz-Prinzips durchgeführt. Es bleibt, die Voraussetzungen hierfür zu prüfen.

Offensichtlich gilt $\bigwedge_{j \in \widetilde{J}} q_j \leqslant p < \infty$ auf F . Sei $\varphi \in F$. Da andere Zerlegungen außer

$$\varphi = \left(\varphi - \sum_{j \in K} \beta_j \cdot \varphi_j\right) + \sum_{j \in K} \beta_j \cdot \varphi_j \quad (\text{mit } K \text{ endlich, } \subset J\ )$$

den Wert ∞ liefern, reduziert sich das Infimum in der Definition von $\bigwedge_{j \in \widetilde{J}} q_j$ auf

$$\bigwedge_{j \in \widetilde{J}} q_j\left(\varphi\right) = \inf_{K \in \mathfrak{K}(J), \left(\beta_j\right) \subset \mathbb{R}_+} \left[p\left(\varphi - \sum_{j \in K} \beta_j \cdot \varphi_j\right) + \sum_{j \in K} q_j\left(\beta_j \cdot \varphi_j\right)\right] \geqslant$$

$$\geqslant \inf_{K \in \mathfrak{K}(J), \left(\beta_j\right) \subset \mathbb{R}_+} \left[p\left(-\sum_{j \in K} \beta_j \cdot \varphi_j\right) + \sum_{j \in K} \beta_j \cdot \alpha_j - p\left(-\varphi\right)\right] \geqslant -p\left(-\varphi\right) > -\infty \ .$$

Das Orlicz-Prinzip ist also anwendbar.

(b) Sei zunächst ein entsprechendes μ gegeben. Für beliebige endlichen $\mathbb{R}$-Linearkombinationen muss

$$\sum_{j \in K} \beta_j \cdot \alpha_j = \mu\left(\sum_{j \in K} \beta_j \cdot \varphi_j\right) \leqslant p\left(\sum_{j \in K} \beta_j \cdot \varphi_j\right)$$

gelten, d.h. die Bedingung

$$p\left(\sum_{j \in K} \beta_j \cdot \varphi_j\right) \geqslant \sum_{j \in K} \beta_j \cdot \alpha_j \qquad (*)$$

für alle endlichen Teilmengen $K \subset J$ und alle $\left(\beta_j\right)_{j\in K} \subset \mathbb{R}$ ist notwendig. Ist diese Bedingung erfüllt, so gilt

$$p\left(-\sum_{j\in K}\beta_j\cdot\varphi_j-\sum_{j\in L}\gamma_j\cdot\left(-\varphi_j\right)\right)\geqslant-\sum_{j\in K}\beta_j\cdot\alpha_j-\sum_{j\in L}\gamma_j\cdot\left(-\alpha_j\right)$$

für alle endlichen Teilmengen $K, L \subset J$ und alle $(c_j)_{j\in K}, (b_j)_{j\in L} \subset \mathbb{R}_+$. Dies entspricht der Bedingung in (a) für die Familien $\left(\varphi_j\right)_{j\in J} \cup \left(-\varphi_j\right)_{j\in J}$ und $(\alpha_j)_{j\in J} \cup (-\alpha_j)_{j\in J}$. Mit (a) folgt aus dieser Bedingung bereits die Existenz von μ mit $\mu \leqslant p$ und

$$-\alpha_j \leqslant -\mu\left(-\varphi_j\right) = \mu\left(\varphi_j\right) \leqslant \alpha_j \ .$$

Die Bedingung $(*)$ ist also notwendig und hinreichend.

(c) Wie in der Vorlesung gezeigt, ist eine $\mathbb{C}$-Linearform μ durch ihren Realteil $\nu = \operatorname{Re}\mu$ eindeutig bestimmt. Dieser muss

$$\nu\left(\varphi_j\right) = \operatorname{Re}\alpha_j \quad \text{und} \quad \nu\left(i\varphi_j\right) = -\operatorname{Im}\alpha_j \qquad \text{für alle} \quad j \in J$$

erfüllen. Nach (b) ist die Existenz einer solchen $\mathbb{R}$-Linearform ν dazu äquivalent, dass

$$\sum_{j\in K}\beta_j\cdot\operatorname{Re}\alpha_j \leqslant p\left(\sum_{j\in K}\beta_j\cdot i\varphi_j\right) = p\left(\sum_{j\in K}\beta_j\cdot\varphi_j\right) \geqslant \sum_{j\in K}\beta_j\cdot\operatorname{Im}\alpha_j$$

für alle endlichen Teilmengen $K \subset J$ und alle $\left(\beta_j\right)_{j\in K} \subset \mathbb{R}$. Hat man eine solche $\mathbb{R}$-Linearform ν gegeben, so definiert

$$\mu(\varphi) = \nu(\varphi) - i\nu(-i\varphi) \quad \text{für alle} \quad \varphi \in F$$

eine $\mathbb{C}$-Linearform μ mit

$$\mu\left(\varphi_j\right) = \nu\left(\varphi_j\right) - i\nu\left(i\varphi_j\right) = \alpha_j$$

und

$$\left|\mu(\varphi)\right| = \sqrt{\nu(\varphi)^2 + \nu(i\varphi)^2} \leqslant \sqrt{p(\varphi)^2 + p(\varphi)^2} = p(\varphi)$$

für alle $\varphi \in F$.

Fachbereich Mathematik und Informatik
Philipps-Universität Marburg

Lösungsblatt 13

Aufgabe 1 Die Inklusionen $F \cap G \hookrightarrow F$ und $F \cap G \hookrightarrow G$ sind stetig, injektiv und haben dichtes Bild. Analoges gilt somit für die adjungierten Abbildungen, so dass $F^\dagger$ und $G^\dagger$ sinnvoll in $(F \cap G)^\dagger$ addiert werden können:

$$F^\dagger + G^\dagger \subset (F \cap G)^\dagger \ .$$

Für die umgekehrte Inklusion sei $\lambda \in (F \cap G)^\dagger$, d.h. es existieren stetige Halbnormen p, q auf F bzw. G mit $|\lambda| \leqslant p + q$ auf $F \cap G$. Nach Beispiel 3.6.3 der Vorlesung existieren Semilinearformen μ bzw. ν auf $F \cap G$ mit

$$\lambda = \mu + \nu \quad , \quad |\mu| \leqslant p \quad \text{und} \quad |\nu| \leqslant q \ .$$

Offensichtlich sind $\mu \in F^\dagger$ und $\nu \in G^\dagger$ und somit gilt die Behauptung.

Aufgabe 2

(a) Es gilt $\operatorname{Ker} B_k = \bigcap_{j=1}^k \operatorname{Ker} \mu_j$ und die Surjektivität aller B_k auf $\mathbb{K}^k$ folgt aus dem Lemma 3.4.

(b) Seien $\left(\varphi_j\right)_{j=1,\ldots,n}$ und $\left(\psi_j\right)_{j=1,\ldots,n}$ zwei Familien, die den Bedingungen

$$\varphi_j, \psi_j \in H_j \quad \text{und} \qquad \varphi_j \big| \mu_k \big\rangle_F = \quad \psi_j \big| \mu_k \big\rangle_F = \delta_{j,k} \quad \text{für alle } j, k = 1, \ldots, n$$

genügen. Dann ist $\varphi_j - \psi_j \big| \mu_k \big\rangle_F = 0 \ j, k = 1, \ldots, n$. Mit anderen Worten

$$\varphi_j - \psi_j \in H_j \cap \operatorname{Ker} B_n \subset H_j \cap \operatorname{Ker} B_j = \{0\} \ .$$

Dies zeigt die Eindeutigkeit.

Für die Existenz gehen wir induktiv vor, wobei der Induktionsanfang $(H_0 = 0)$ klar ist. Seien

$$\varphi_j \in H_j \quad \text{mit} \qquad \varphi_j \big| \mu_k \big\rangle_F = \delta_{j,k} \quad \text{für alle } j, k = 1, \ldots, l$$

gegeben. Nach Lemma 3.4 existiert ein $\varphi_{l+1} \in \operatorname{Ker} B_l \smallsetminus \operatorname{Ker} \mu_{l+1}$. In der Zerlegung $\varphi_{l+1} = \psi_{l+1} + \phi_{l+1} \in H_{l+1} \oplus \operatorname{Ker} B_{l+1}$ ist $\psi_{l+1} \in (H_{l+1} \cap \operatorname{Ker} B_l) \smallsetminus \operatorname{Ker} \mu_{l+1}$. Œ $\psi_{l+1} \big| \mu_{l+1} \big\rangle = 1$. Weiter gilt $\psi_{l+1} \big| \mu_j \big\rangle_F = 0$ für alle $j = 1, \ldots, l$. Man setzt

$$\varphi_{l+1} = \psi_{l+1} - \sum_{j=1}^{l} \overline{\psi_{l+1} \big| \mu_j \big\rangle} \cdot \varphi_j \in H_{l+1} \ .$$

Es gilt

$$\varphi_{l+1} \big| \mu_k \big\rangle = \quad \psi_{l+1} \big| \mu_k \big\rangle_F - \sum_{j=1}^{l} \ \psi_{l+1} \big| \mu_j \big\rangle \cdot \delta_{j,k} = 0 \quad \text{für alle } k = 1, \ldots, l \ ,$$

und wegen $\varphi_1, \ldots, \varphi_l \in H_l \subset \operatorname{Ker} \mu_{l+1}$

$$\varphi_j \big| \mu_{l+1} \big\rangle = 0 \quad \text{für alle } j = 1, \ldots, l \ ,$$

sowie

$$\varphi_{l+1}| \, \mu_{l+1}\rangle = \quad \psi_{l+1}| \, \mu_{l+1}\rangle_F - \sum_{j=1}^{l} \quad \psi_{l+1}| \, \mu_j\rangle \cdot 0 = 1 \ .$$

(c) Es gilt

$$\operatorname{Ker} B_k = \left\{ f \in \mathcal{AC}^{(n)}(J) \ \middle| \ f^{(j)}(\tau) = 0 \text{ für } j = 0, \ldots, k \right\}$$

und $H_1 = \mathbb{K} \cdot 1$ ist ein geeigneter Komplementärraum. Es gilt $\varphi_1 = 1$. Induktiv erhält man

$$H_k = \mathcal{P}_{k-1} = \operatorname{Ker} \partial^k$$

(Polynome vom Grade $\leqslant k$) und

$$\varphi_k = \frac{(\mathrm{id} - \tau)^{k-1}}{(k-1)!} \ .$$

Die Bedingungen sind erfüllt und lassen sich leicht nachprüfen. Die Abbildung

$$R : \mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(J) \longrightarrow \operatorname{Ker} B_{n-1} \subset \mathcal{AC}^{(n)}(J) : g \longmapsto \int_\tau^\diamond \left(\int_\tau^{t_n} \ldots \left(\int_\tau^{t_2} g(t_1) \, dt_1 \right) \ldots dt_{n-1} \right) dt_n$$

ist die Retraktion von ∂^n nach $\operatorname{Ker} B_{n-1}$. Mit Fubini folgt

$$\int_\tau^t \left(\int_\tau^{t_n} \ldots \left(\int_\tau^{t_2} g(t_1) \, dt_1 \right) \ldots dt_{n-1} \right) dt_n =$$

$$= \int_{J^n} 1_{\tau,t_2}(t_1) \cdot \ldots \cdot 1_{\tau,t_n}(t_{n-1}) \cdot 1_{\tau,t}(t_n) \cdot g(t_n) \, d(t_1, \ldots, t_{n-1}, t_n) =$$

$$= \int_\tau^t \left(\int_{t_1}^t \ldots \int_{t_{n-2}}^t \left(\int_{t_{n-1}}^t 1 \, dt_n \right) dt_{n-1} \ldots dt_2 \right) \cdot g(t_1) \, dt_1 =$$

$$= \int_J 1_{\tau,t}(s) \cdot \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot g(s) \, ds \ ,$$

also ist R der Integralkernoperator mit Kernfunktion

$$\varkappa(t,s) := 1_{\tau,t}(s) \cdot \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!} \ .$$

Aufgabe 3

(a) Es gilt für jedes $\xi \in \mathcal{H}$, dass $((\epsilon_k| \, \xi))_{k \in \mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N}) \subset c^0(\mathbb{N})$.

(b) Sei $\eta \in \mathcal{H}$ mit $\|\eta\|_2 \leqslant 1$. Da

$$\sum_{j \in \mathbb{N} \smallsetminus \{k\}} |(\epsilon_j| \, \eta)|^2 \leqslant \|\eta\|_2^2 \leqslant 1 \ ,$$

gibt es $1 \geqslant \alpha_k \geqslant 0$, so dass

$$\eta_k = \eta + (a_k - (\epsilon_k | \, \eta)) \cdot \epsilon_k \in \mathbb{S} \ ,$$

nämlich

$$\alpha_k^2 = 1 - \sum_{j \in \mathbb{N} \setminus \{k\}} |(\epsilon_j | \, \eta)|^2 \ .$$

Für jedes $\xi \in \mathcal{H}$ gilt

$$|(\eta - \eta_k | \, \xi)| \leqslant |\alpha_k - (\epsilon_k | \, \eta)| \cdot |(\epsilon_k | \, \xi)| \leqslant 2 \cdot |(\epsilon_k | \, \xi)| \longrightarrow 0 \ ,$$

also folgt die Behauptung.