**Fachbereich Mathematik und Informatik**
**Philipps-Universität Marburg**

# PROTOKOLLE

# ZU DEN ÜBUNGEN DER

# FUNKTIONALANALYSIS II

## Claude Portenier

Marburg
Sommersemester 2004

Fassung vom 4. August 2004

Fachbereich Mathematik und Informatik
Philipps-Universität Marburg Sommersemester 2004

# Funktionalanalysis II

## Lösungsblatt 1

### Aufgabe 1 (Die Hilbert-Schmidt-Operatoren)

(a) Beh.: $T \in \mathcal{L}^2(\mathcal{H}, \mathcal{G}) \Longleftrightarrow T^* \in \mathcal{L}^2(\mathcal{G}, \mathcal{H})$ .

Sei $(\eta_i)_{i \in I}$ Hilbertsche Basis von $\mathcal{G}$ . Es gilt mit Parseval: Genau dann gilt $T \in \mathcal{L}^2(\mathcal{H}, \mathcal{G})$ , wenn

$$\infty > \sum_{j \in J} \|T\epsilon_j\|_{\mathcal{G}}^2 = \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} \left|(T\epsilon_j | \eta_i)_{\mathcal{G}}\right|^2 = \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} \left|(\epsilon_j | T^*\eta_i)_{\mathcal{H}}\right|^2 =$$

$$= \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \left|(\epsilon_j | T^*\eta_i)_{\mathcal{H}}\right|^2 = \sum_{i \in I} \|T^*\eta_i\|_{\mathcal{H}}^2 \ ,$$

d.h. wenn $T^* \in \mathcal{L}^2(\mathcal{G}, \mathcal{H})$ .

(b) *Sei* $(\widetilde{\epsilon_k})_{k \in K}$ H.-B. von $\mathcal{H}$

$$\Rightarrow \sum_{j \in J} \|T\epsilon_j\|_{\mathcal{G}}^2 \underset{a)}{=} \sum_{i \in I} \|T^*\eta_i\|_{\mathcal{H}}^2 \underset{a)\ T^{**}=T}{=} \sum_{k \in K} \|T\widetilde{\epsilon_k}\|_{\mathcal{G}}^2 .$$

(c) Def. auf $\mathcal{L}^2(\mathcal{H}, \mathcal{G})$:

$$(T, S) \longmapsto (T | S) := \sum_{j \in J} (T\epsilon_j | S\epsilon_j)_{\mathcal{G}}$$

Beh.: *Abb. definiert Skalarprodukt auf* $\mathcal{L}^2(\mathcal{H}, \mathcal{G})$ .

$\mathcal{L}^2(\mathcal{H}, \mathcal{G})$ ist ein U-VR von $\mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{G})$ ; es bleibt die Abgeschlossenheit bzgl. Addition zu zeigen: Für $S, T \in \mathcal{L}^2(\mathcal{H}, \mathcal{G})$ gilt:

$$\|(S+T)\epsilon_j\|_{\mathcal{G}}^2 = \|S\epsilon_j + T\epsilon_j\|_{\mathcal{G}}^2 \leqslant \left(\|S\epsilon_j\|_{\mathcal{G}} + \|T\epsilon_j\|_{\mathcal{G}}\right)^2 \leqslant 2 \cdot \|S\epsilon_j\|_{\mathcal{G}}^2 + 2 \cdot \|T\epsilon_j\|_{\mathcal{G}}^2$$

Somit ist $(S+T) \in \mathcal{L}^2(\mathcal{H}, \mathcal{G})$ .

Beh.: $\sum_{j \in J} (T\epsilon_j | S\epsilon_j)_{\mathcal{G}}$ *ist absolut konvergent,* denn mit der Polarisationsformel gilt:

$$\sum_{j \in J} (T\epsilon_j | S\epsilon_j)_{\mathcal{G}} = \sum_{j \in J} \frac{1}{4} \cdot \sum_{\varepsilon^{2 \cdot \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{K}} = 1} \varepsilon \cdot \|T\epsilon_j + \overline{\varepsilon} \cdot S\epsilon_j\|_{\mathcal{G}}^2$$

und $(T + \overline{\varepsilon} S) \in \mathcal{L}^2(\mathcal{H}, \mathcal{G})$ . Dies zeigt auch, dass nach (b) die Definition unabhängig von der Wahl der Basis in $\mathcal{H}$ ist.

Sesquilinearität ist klar, hermitesch:

$$(S | T) = \sum_{j \in J} (S\epsilon_j | T\epsilon_j)_{\mathcal{G}} = \sum_{j \in J} \overline{(T\epsilon_j | S\epsilon_j)} = \overline{(S | T)}$$

positiv definit:

$$(T | T) = \sum_{j \in J} (T\epsilon_j | T\epsilon_j)_{\mathcal{G}} = \sum_{j \in J} \|T\epsilon_j\|_{\mathcal{G}}^2 \geqslant 0$$

nicht ausgeartet: aus $(T|\,T) = 0$ folgt $T\epsilon_j = 0\ \forall j \in J \Rightarrow T = 0$ , somit ein SP.

*Beweis der Ungleichung:* Sei $\xi \in \mathcal{H}$ mit $\|\xi\| = 1$, ergänzt zu ONB $\xi \cup (\epsilon_j)_{j\in J}$ von $\mathcal{H}$. Es gilt:

$$\|T\|^2 = \sup_{\varphi\in\mathcal{H},\|\varphi\|=1} \|T\varphi\|_{\mathcal{G}}^2$$

und

$$\|T\xi\|_{\mathcal{G}}^2 \leqslant \sum_{j\in J} \|T\epsilon_j\|_{\mathcal{G}}^2 + \|T\xi\|_{\mathcal{G}}^2 = \|T\|_2^2 \ ,$$

somit $\|T\|^2 \leqslant \|T\|_2^2$ .

(d) Beh.: *$\mathcal{L}^2(\mathcal{H},\mathcal{G})$ ist bezüglich $\|\cdot\|_2$ vollständig.*

Sei $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ C.-F. in $(\mathcal{L}^2(\mathcal{H},\mathcal{G}), \|\cdot\|_2)$ . Da $\|T_n - T_m\| \leqslant \|T_n - T_m\|_2$ ist $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auch C.-F. in $(\mathcal{L}(\mathcal{H},\mathcal{G}), \|\cdot\|)$ . Somit exisitiert $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H},\mathcal{G})$ mit $\lim_n \|T - T_n\| = 0$ . Es bleibt zu zeigen: $T \in \mathcal{L}^2(\mathcal{H},\mathcal{G})$ und $\lim_n \|T_n - T\|_2 = 0$ .

*Beweis:* Sei $K$ eine obere Schranke für $\{\|T_n\|_2\}$ und $J_1 \subset J$ endl.. Dann folgt:

$$\sum_{j\in J_1} \|T\epsilon_j\|_{\mathcal{G}}^2 = \lim_n \sum_{j\in J_1} \|T_n\epsilon_j\|_{\mathcal{G}}^2 \leqslant K^2 \ ,$$

also

$$\|T\|_2^2 = \sum_{j\in J} \|T\epsilon_j\|_{\mathcal{G}}^2 \leqslant K^2 \ ,$$

und somit $T \in \mathcal{L}^2(\mathcal{H},\mathcal{G})$ . Sei $\varepsilon > 0$ . Es existiert nach Voraussetzung ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n, m \geq N$ gilt: $\|T_n - T_m\|_2 \leqslant \varepsilon$ . Sei $m > N$ . Es folgt

$$\sum_{j\in J_1} \|(T - T_m)\epsilon_j\|_{\mathcal{G}}^2 = \lim_n \sum_{j\in J_1} \|(T_n - T_m)\epsilon_j\|_{\mathcal{G}}^2 \leqslant$$

$$\leqslant \limsup_n \|T_n - T_m\|_2^2 \leqslant \varepsilon^2$$

und somit ist $\|T - T_m\|_2 \leqslant \varepsilon$ , d.h. $\lim_n \|T_n - T\|_2 = 0$ .

Alternativ betrachte man folgenden isometrischen Isomorphismus:

$$\mathcal{L}^2(\mathcal{H},\mathcal{G}) \longrightarrow \ell^2(J,\mathcal{G}) : T \longmapsto (T\epsilon_j)_{j\in J} \ .$$

Da $\ell^2(J,\mathcal{G})$ vollständig ist, folgt ebenfalls die Vollständigkeit von $\mathcal{L}^2(\mathcal{H},\mathcal{G})$ .

**Aufgabe 2 (Dirac-Folgen)** Die Abbildung $\Phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n : x \longmapsto \varepsilon x$ ist ein Diffeomorphismus mit $|\det D\Phi(x)| = \varepsilon^n$ . Somit folgt aus der Transformationsformel

$$\int g f_\varepsilon \, d\lambda = \int g(x) \frac{1}{\varepsilon^n} f\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) d\lambda(x) = \int g(\varepsilon y) f(y) \, d\lambda(y) \ .$$

Da $g$ in 0 stetig ist, gilt

$$\lim_{\varepsilon\to 0} g(\varepsilon y) f(y) = g(0) f(y) \ .$$

Weiter ist

$$|g(\varepsilon\cdot)\, f| \leqslant \|g\|_{\infty,\lambda}\, |f| \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^n) \ .$$

Also folgt mit dem Satz von Lebesgue

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int g(\varepsilon y)\, f(y)\; d\lambda(y) = \int g(0)\, f(y)\; d\lambda(y) = g(0) \ .$$

Alle $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ bzw. $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ sind insbesondere beschränkt und stetig in $0$ . Nach obiger Rechnung gilt

$$\lim_{\varepsilon\to 0} |\langle \varphi\, | f_\varepsilon \lambda - \delta_0 \rangle| = \left| \lim_{\varepsilon\to 0} \int \overline{\varphi} f_\varepsilon \, d\lambda - \overline{\varphi(0)} \right| = 0$$

für alle $\varphi$ , d. h.

$$\delta_0 = \lim_{\varepsilon\to 0} f_\varepsilon$$

in $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)'$ bzw. $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'$ .

**Aufgabe 3 (Funktionen und Distributionen)**

(a) $\exp \in \mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{D}(\mathbb{R})'$ .
Noch zu zeigen: $\exp \notin \mathcal{S}'$ .
*Beweis:* Sei $\varphi \in \mathcal{D}$ , $\operatorname{supp}\varphi \in [0,1]$ , $\varphi \geqslant 0$ und $\varphi_l := \varphi(\cdot - l)$ für $l \in \mathbb{N}$ .

(b) Es gilt für alle $k, l \in \mathbb{N}$ :

$$p_k(\varphi_l) = \max_{\alpha\leqslant k} \left\| \langle \mathrm{id} \rangle^k \cdot \partial^\alpha \varphi(\cdot - l) \right\|_\infty \leqslant \langle l+1 \rangle^k \cdot \max_{\alpha\leqslant k} \|\partial^\alpha \varphi\|_{\infty,[0,1]} =$$

$$= \langle l+1 \rangle^k \cdot p_{[0,1],k}(\varphi) < \infty \ .$$

Und es ist:

$$|\langle \varphi_l | \exp \rangle| = \int_l^{l+1} \overline{\varphi(\cdot - l)} \cdot \exp\; d\lambda = \int_0^1 \overline{\varphi} \cdot \exp(\cdot - l)\; d\lambda = e^l \cdot \int_0^1 \overline{\varphi} \cdot \exp\; d\lambda \ .$$

Angenommen exp wäre auf $\mathcal{D}$ bzgl $\mathcal{T}_{\mathcal{S}}$ stetig, dann gäbe es für jedes $\psi \in \mathcal{D}$ ein $c \in \mathbb{R}_+$ und ein $k \in \mathbb{N}$ , so dass

$$|\langle \psi | \exp \rangle| \leqslant c \cdot p_k(\psi) \ .$$

Aber dann wäre

$$e^l \cdot \int_0^1 \varphi \cdot \exp\; d\lambda = |\langle \varphi_l | \exp \rangle| \leqslant c \cdot p_k(\varphi_l) = \langle l+1 \rangle^k \cdot p_{[0,1],k}(\varphi)$$

und dies ist widersprüchlich, da $e^l$ schneller wächst als $\langle l+1 \rangle^k$ . D.h. exp ist auf $\mathcal{S}$ nicht stetig.

(c) $\exp \cdot \cos(\exp) \in \mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{D}$ .
Noch zu zeigen: " $\exp \cdot \cos(\exp)$ " $\in \mathcal{S}'$ , besser es gibt $\mu \in \mathcal{S}'$ , so dass $\mu_{|\mathcal{D}} = \exp \cdot \cos(\exp)$
*Beweis:* Sei $\varphi$ in $\mathcal{D}$ . Es folgt

$$|\langle \varphi | \exp \cdot \cos(\exp) \rangle| = \left| \int \overline{\varphi} \cdot \exp \cdot \cos(\exp)\; d\lambda \right| \overset{P.I.}{=}$$

$$= \left| \Big[ \sin(\exp) \cdot \overline{\varphi} \Big]_{-\infty}^{\infty} - \int \overline{\partial\varphi} \cdot \sin(\exp)\ d\lambda \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int \left|\overline{\partial\varphi}\right| \cdot |\sin(\exp)|\ d\lambda \leqslant \int \left|\overline{\partial\varphi}\right|\ d\lambda = \int \langle \mathrm{id} \rangle \cdot \left|\overline{\partial\varphi}\right| \cdot \frac{1}{\langle \mathrm{id} \rangle}\ d\lambda \leqslant p_1(\varphi) \cdot \int \frac{1}{\langle \mathrm{id} \rangle} d\lambda \ .$$

Somit ist $\exp \cdot \cos(\exp)$ bzgl. der induzierten Topologie von $\mathcal{S}$ stetig, d.h. " $\exp \cdot \cos(\exp)$" $\in \mathcal{S}'$ .

(d) Nach (b) gilt: $\exists \mu \in \mathcal{S}'$ , so dass $\langle \varphi | \mu \rangle = \int \overline{\varphi} \cdot \exp \cdot \cos(\exp)\ d\lambda\ \forall \varphi \in \mathcal{D}$ .
*Frage:* Gilt die Formel $\forall \varphi \in \mathcal{S}$ ??
In jedem Fall gilt: $\varphi \in \mathcal{S} \Rightarrow \partial\varphi \in \mathcal{S}$ , also ist $\left| \int \overline{\partial\varphi} \cdot \sin(\exp)\ d\lambda \right|$ sinnvoll und

$$\left| \int \overline{\partial\varphi} \cdot \sin(\exp)\ d\lambda \right| \leqslant \int \frac{1}{\langle \mathrm{id} \rangle}\ d\lambda \cdot p_1(\varphi) \ ,$$

d.h.

$$\varphi \longmapsto -\int \overline{\partial\varphi} \cdot \sin(\exp)\ d\lambda : \mathcal{S} \longrightarrow \mathbb{K}$$

ist stetig und setzt

$$\varphi \longmapsto \int \exp \cdot \cos(\exp)\ d\lambda : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{K}$$

fort. D.h.$\mu$ ist diese Abb., also

$$\langle \varphi | \mu \rangle = -\int \overline{\partial\varphi} \cdot \sin(\exp)\, d\lambda = \langle \partial\varphi | \sin(\exp) \rangle = \Big\langle \varphi \,\Big|\, \partial(\sin(\exp) \Big\rangle$$

da $\sin(\exp) \in \mathbf{L}^{\infty} \subset \mathbf{L}^1_{\mathrm{mod}} \subset \mathcal{S}'$ .

# Funktionalanalysis II

## Lösungsblatt 2

**Aufgabe 1** Wir zeigen zunächst: $\ln|\mathrm{id}| : \mathbb{R} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}} \in \mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}) \hookrightarrow \mathcal{D}(\mathbb{R})'$ .
Betrachte dazu (einzige Problemstelle ist 0 ):

$$\int_{-1}^{1} \ln|x| \; dx = 2\int_0^1 \ln x \, dx = \lim_{\varepsilon\to 0} 2 \cdot \int_\varepsilon^1 \ln x \, dx =$$

$$= 2\lim_{\varepsilon\to 0} \Big[ x\cdot(\ln x - 1)\Big]_\varepsilon^1 = 2 \cdot \lim_{\varepsilon\to 0} \Big[ -1 - \varepsilon \cdot (\ln\varepsilon - 1)\Big] =$$

$$= -2\cdot \lim_{\varepsilon\to 0}\Big[\varepsilon\ln\varepsilon\Big] = -2 \; .$$

Dies erlaubt uns Folgendes zu schreiben:

$$\langle\varphi|\partial\ln|\mathrm{id}|\rangle = -\langle\partial\varphi|\ln|\mathrm{id}|\rangle = -\int_{-\infty}^{\infty} \overline{\partial\varphi}\cdot\ln|\mathrm{id}| \; d\lambda =$$

$$= -\left(\int_{-\infty}^{0} \overline{\partial\varphi}\cdot\ln|x| \; dx + \int_0^\infty \overline{\partial\varphi}\cdot\ln|x| \; dx\right) =$$

$$= -\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \overline{\partial\varphi}\cdot\ln|x| \; dx + \int_\varepsilon^\infty \overline{\partial\varphi}\cdot\ln|x| \; dx\right) =$$

$$\overset{\text{P.I.}}{=} -\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\Big[\overline{\varphi(x)}\cdot\ln|x|\Big]_{-\infty}^{\varepsilon} - \int_{-\infty}^{-\varepsilon}\overline{\varphi(x)}\cdot\frac{1}{x}\,dx + \Big[\overline{\varphi(x)}\cdot\ln|x|\Big]_\varepsilon^\infty - \int_\varepsilon^\infty \overline{\varphi(x)}\cdot\frac{1}{x}\,dx\right)$$

Es genügt also zu zeigen:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\Big[\overline{\varphi(x)}\cdot\ln|x|\Big]_{-\infty}^{-\varepsilon} + \Big[\overline{\varphi(x)}\cdot\ln|x|\Big]_\varepsilon^\infty\right) = 0 \; .$$

Beweis.:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\Big[\overline{\varphi(x)}\cdot\ln|x|\Big]_{-\infty}^{-\varepsilon} + \Big[\overline{\varphi(x)}\cdot\ln|x|\Big]_\varepsilon^\infty\right) = \lim_{\varepsilon\to 0}\Big[\overline{\varphi(-\varepsilon)} - \overline{\varphi(\varepsilon)}\Big]\cdot\ln|\varepsilon|$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\overline{\varphi(-\varepsilon)} - \overline{\varphi(\varepsilon)}}{\frac{1}{\ln\varepsilon}} \overset{\text{l'Hospital}}{=} \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\overline{\partial\varphi(-\varepsilon)} - \overline{\partial\varphi(\varepsilon)}}{-\frac{1}{\varepsilon\cdot\ln^2\varepsilon}} = 0 \; ,$$

da

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon\cdot\ln^2\varepsilon = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\ln^2\varepsilon}{\frac{1}{\varepsilon}} \overset{\text{l'Hospital}}{=} \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{2\ln\varepsilon\cdot\frac{1}{\varepsilon}}{-\frac{1}{\varepsilon^2}} = -2\cdot\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon\cdot\ln\varepsilon = 0 \; .$$

**Aufgabe 2** Es ist zunächst zu zeigen, dass $\left(\ln\frac{1}{|\mathrm{id}|}\right)^s \in \mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{D})$ . Sei $K \subset$ kompakt, dann ist $K \subset B(0,a)$ für ein $a \in \mathbb{R}^*_+$ und es gilt

$$\int_K \left(\ln\frac{1}{|\mathrm{id}|}\right)^s d\lambda \leqslant \int_{B(0,a)} \left(\ln\frac{1}{|\mathrm{id}|}\right)^s d\lambda = 2\pi \cdot \int_0^a \left(\ln\frac{1}{r}\right)^s dr \; .$$

Da $\lim_{r\to 0}\left(\ln\frac{1}{r}\right)^s = 0$ , ist sie stetig in 0 fortsetzbar, also existiert das Intergal.

Für die partiellen Ableitungen (im klassischen Sinn) von $\left(\ln\frac{1}{|\mathrm{id}|}\right)^s$ auf $\mathbb{D} \smallsetminus \{0\}$ gilt:

$$\partial_j\left(\ln\frac{1}{|\mathrm{id}|}\right)^s = s\cdot\left(\ln\frac{1}{|\mathrm{id}|}\right)^{s-1}|\mathrm{id}|\left(-\frac{1}{|\mathrm{id}|^2}\right)\frac{\mathrm{pr}_j}{|\mathrm{id}|} = -s\cdot\left(\ln\frac{1}{|\mathrm{id}|}\right)^{s-1}\left(\frac{\mathrm{pr}_j}{|\mathrm{id}|^2}\right) \; .$$

Für jede Kugel $B(0,a)$ hat man dann

$$\int_{B(0,a)}\left|\partial_j\left(\ln\frac{1}{|\mathrm{id}|}\right)^s\right| d\lambda = \int_{B(0,a)}\left|s\cdot\left(\ln\frac{1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}\right)^{s-1}\left(\frac{x_j}{x_1^2+x_2^2}\right)\right| d(x_1,x_2) =$$

$$\underset{\text{Trafo}}{=} \int_{B(0,a)}\left|s\cdot\left(\ln\frac{1}{r}\right)^{s-1}\left(\frac{r\left\{\begin{matrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\end{matrix}\right\}}{r^2}\right) r\right| d(r,\varphi) =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^a\left|s\left(\ln\frac{1}{r}\right)^{s-1}\left\{\begin{matrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\end{matrix}\right\}\right| dr d\varphi \leqslant s\int_0^{2\pi}\underbrace{\left(\int_0^a\left(\ln\frac{1}{r}\right)^{s-1} dr\right)}_{\leqslant c<\infty\text{ , vgl. oben}} d\varphi < \infty \; .$$

Also sind die (klassischen) partiellen Ableitungen in $\mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{D}\setminus\{0\})$ . Für die distributiven Ableitungen gilt

$$\left\langle\varphi\left|\partial_j\left(\ln\frac{1}{|\mathrm{id}|}\right)^s\right.\right\rangle = -\left\langle\partial_j\varphi\left|\left(\ln\frac{1}{|\mathrm{id}|}\right)^s\right.\right\rangle = -\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{D}\smallsetminus B_\varepsilon}\overline{\partial_j\varphi}\left(\ln\frac{1}{|\mathrm{id}|}\right)^s d\lambda =$$

$$= -\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{D}\smallsetminus B_\varepsilon}\operatorname{grad}\overline{\varphi}\bullet\left(\ln\frac{1}{|\mathrm{id}|}\right)^s\cdot e_j\, d\lambda \; .$$

Der $\operatorname{grad}_{\mathbb{D}\smallsetminus B_\varepsilon}$ Gradient auf der Untermannigfaltigkeit $\mathbb{D}\smallsetminus B_\varepsilon$ stimmt mit dem gewöhnliche Gradienten überein (vgl. Analysis, HS 17.5).

Auch stimmt die Divergenz $\operatorname{div}_{\mathbb{D}\smallsetminus B_\varepsilon}$ mit der normalen Divergenz überein (vgl. Analysis, HS 17.6). Man kann daher den Satz über die partielle Integration (Analysis 17.7) anwenden und erhält:

$$-\int_{\mathbb{D}\smallsetminus B_\varepsilon}\operatorname{grad}\overline{\varphi}\bullet\left(\ln\frac{1}{|\mathrm{id}|}\right)^s\cdot e_j\, d\lambda =$$

$$= \int_{\mathbb{D}\smallsetminus B_\varepsilon}\overline{\varphi}\cdot\operatorname{div}\left(\ln\frac{1}{|\mathrm{id}|}\right)^s\cdot e_j\, d\lambda - \int_{\partial B_\varepsilon}\overline{\varphi}\cdot\left(\ln\frac{1}{|\mathrm{id}|}\right)^s\cdot e_j\bullet\nu\, d\lambda_{\partial B_\varepsilon} =$$

Dabei bezeichnet $\nu$ den äußeren normalen Vektor an $\partial\left(\mathbb{D}\setminus B_\varepsilon\right)$ . Es gilt

$$\nu(x)=\frac{-x}{|x|}\ .$$

Somit gilt im Fall $j=1$:

$$e_1\bullet\nu=\cos(\varphi)\ .$$

$\varphi$ bezeichnet das Argument aus der Polardarstellung von $x$ . Da $\operatorname{div}\left(\ln\frac{1}{|\mathrm{id}|}\right)^s\cdot e_1=\partial_1\left(\ln\frac{1}{|\mathrm{id}|}\right)^s$ , erhält man somit insgesamt

$$=-\lim\nolimits_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{D}\setminus B_\varepsilon}\operatorname{grad}\overline{\varphi}\bullet\left(\ln\frac{1}{|\mathrm{id}|}\right)^s\cdot e_1\,d\lambda=$$

$$=\lim\nolimits_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{D}\setminus B_\varepsilon}\overline{\varphi}\cdot\partial_1\left(\ln\frac{1}{|\mathrm{id}|}\right)^s d\lambda-\underbrace{\lim\nolimits_{\varepsilon\to 0}\int_0^{2\pi}\overline{\varphi}\left(\varepsilon\cos\varphi,\varepsilon\sin\varphi\right)\left(\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)^s\cdot\varepsilon\cdot\cos\varphi\,d\varphi}_{=0}=$$

$$=\left\langle\varphi\left|-s\left(\ln\frac{1}{|\mathrm{id}|}\right)^{s-1}\frac{\mathrm{pr}_1}{|\mathrm{id}|}\right.\right\rangle$$

Im Fall $j=2$ schließt man analog.

## Aufgabe 3

(a) Sei $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$ mit $0\leqslant\varphi\leqslant 1_{[-1,1]}$ und $\varphi\left(\frac{3}{4}\right)=1$. Definiere

$$\varphi_n=\exp(-n)\cdot\varphi\left(\frac{\mathrm{id}}{2n}\right)$$

Es ist zu zeigen, dass $\varphi_n$ nicht in $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ gegen 0 konvergiert. Da die Konvergenz bezüglich einer lokal konvexen Topologie die Konvergenz bezüglich der dazugehörigen schwachen Topologie impliziert, genügt es zu zeigen, dass $\langle\varphi_n,\mu\rangle\nrightarrow 0$ für ein $\mu\in\mathcal{D}(\mathbb{R})'$ .

Es ist exp lokal integriebar, also $\exp\in\mathcal{D}(\mathbb{R})'$ . Da $\varphi$ stetig ist, existiert $U=[a,b]$ Umgebung von $\frac{3}{4}$ mit $\varphi|_U\geqslant\frac{1}{2}$ . Ohne Einschränkung kann dabei $a\geqslant\frac{1}{2}$ gewählt werden. Es gilt dann

$$\langle\varphi_n,\exp\rangle=\int\varphi_n\cdot\exp\,d\lambda=e^{-n}\cdot\int\varphi\left(\frac{x}{2n}\right)\cdot e^x\,dx\geqslant$$

$$\geqslant e^{-n}\cdot\int_{2na}^{2nb}\underbrace{\varphi\left(\frac{x}{2n}\right)}_{\geqslant\frac{1}{2}}\cdot e^x\,dx\geqslant e^{-n}\cdot\int_{2na}^{2nb}\frac{1}{2}\cdot e^n=n\cdot(b-a)\to\infty\ .$$

Also gilt nicht $\lim_n\varphi_n=0$ in $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ .

Es gilt jedoch $\lim_n\varphi_n=0$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ : Sei $q_k$ für ein $k\in\mathbb{N}$ gegeben. Es ist zu zeigen, dass

$$\lim\nolimits_n q_k(\varphi_n)=0\quad\text{mit }q_k(\varphi_n)=\max\nolimits_{l=0,\dots,k}\left\|\left(1+\mathrm{id}^2\right)^k\cdot\partial^l\varphi_n\right\|_2$$

Sei $0 \leqslant l \leqslant k$ . Dann ist

$$\partial^l \varphi_n(x) = e^{-n} \cdot \partial^l \varphi \left( \frac{x}{2n} \right) \cdot \frac{1}{(2n)^l} .$$

Es folgt

$$\int_{\mathbb{R}} \left| \left(1+x^2\right)^k \cdot e^{-n} \cdot \partial^l \varphi \left( \frac{x}{2n} \right) \cdot \frac{1}{(2n)^l} \right|^2 dx = \left( \frac{e^{-n}}{(2n)^l} \right)^2 \cdot \int_{-2n}^{2n} \left| \left(1+x^2\right)^k \cdot \partial^l \varphi \left( \frac{x}{2n} \right) \right|^2 dx \leqslant$$

$$\leqslant \left( \frac{\left(1+4n^2\right)^k}{e^n \cdot (2n)^l} \right)^2 \cdot \int_{-2n}^{2n} \left| \partial^l \varphi \left( \frac{x}{2n} \right) \right|^2 dx \underset{x=y2n}{=} \underbrace{\left( \frac{\left(1+4n^2\right)^k}{e^n \cdot (2n)^l} \right)^2 \cdot 2n}_{\to 0} \cdot \underbrace{\int_{-1}^{1} \left| \partial^l \varphi \left( \frac{x}{2n} \right) \right|^2 dy}_{<\infty} .$$

D.h. für alle $l$ gilt $\lim_n \left\| (1+\mathrm{id}^2)^k \cdot \partial^l \varphi_n \right\|_2 = 0$ , also $\lim_n q_k\left(\varphi_n\right) = 0$ . Das ist die Behauptung.

(b) Definiere

$$P_n(x) = \sum_{l=0}^{n} \frac{\left(x^2\right)^l}{l!}$$

Es ist zu zeigen, dass

$$\lim_n \int \varphi \cdot P_n \, d\lambda = \int \varphi(x) \cdot \exp\left(x^2\right) dx \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) .$$

Sei also $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ . Dann gilt

$$\left| \varphi \cdot P_n \right| \leqslant \left| \varphi \cdot \exp \right| \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R})$$

sowie

$$\lim_n \varphi(x) \cdot P_n(x) = \varphi(x) \cdot \exp\left(x^2\right) \quad \forall x \in \mathbb{R} .$$

Die Behauptung folgt mit Lebesgue.

Es liegt jedoch keine Konvergenz in $\mathcal{S}(\mathbb{R})'$ vor: Mit der Daniell-Eigneschaft gilt für $\exp(-\mathrm{id}) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$

$$\lim_n \int e^{-x} \cdot P_n(x) \, dx = \sup_n \int e^{-x} \cdot P_n(x) \, dx = \int^* e^{-x} \cdot \sup_n P_n(x) \, dx =$$

$$= \int^* e^{-x} \cdot \exp\left(x^2\right) dx = \infty .$$

## Aufgabe 4

(a) Da $f \in \mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ ist, ist $1_{[-k,k]} \cdot f \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R})$ und somit in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ für alle $k \in \mathbb{N}$ . Folglich gilt für alle $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$

$$\lim_k \left\langle \varphi \middle| 1_{[-k,k]} \cdot f \right\rangle = \lim_k \int_{-k}^{k} \overline{\varphi(x)} \cdot f(x) \, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\varphi(x)} \cdot f(x) \, dx .$$

Damit konvergieren die Semilinearformen $\left(1_{[-k,k]} \cdot f\right)_{k \in \mathbb{N}}$ punktweise auf $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ gegen die Abbildung

$$\varphi \longmapsto \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\varphi(x)} \cdot f(x)\ dx\ .$$

Nach dem Satz von Banach-Steinhaus ist diese Abbildung stetig, d.h. sie ist in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ . Weiter ist ihre Einschränkung auf $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ wieder $f$ . Insgesamt ist sie also die Fortsetzung von $f$ auf $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ , und es gilt

$$\langle \varphi | f \rangle = \lim_{\substack{a \to -\infty \\ b \to \infty}} \int_a^b \overline{\varphi(x)} \cdot f(x)\ dx\ .$$

(b) Für alle $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ gilt

$$\int_a^b \overline{\varphi} \cdot \exp\cos(\exp) = \left[\overline{\varphi} \cdot \sin(\exp)\right]_a^b - \int_a^b \overline{\partial\varphi} \cdot \sin(\exp)\ .$$

Da im Limes $a \to -\infty$ , $b \to \infty$ der erste Summand verschwindet, folgt

$$\langle \varphi | \exp\cos(\exp) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\varphi} \cdot \exp\cos(\exp) = -\int_{-\infty}^{\infty} \overline{\partial\varphi} \cdot \sin(\exp)\,.$$

Diese Gleichung zeigt, dass $\exp\cos(\exp) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ ist, einerseits mit einem uneigentlichen Integral und andererseits mit einem Lebesgueschen Integral.

# Funktionalanalysis II

## Lösungsblatt 3

### Aufgabe 1

(a) Sei $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ . Dann gilt

$$\left|\int f \cdot \varphi \, d\lambda\right| \leqslant \|f\|_\infty \cdot \underbrace{\int |\varphi| \, d\lambda}_{<\infty} ,$$

also ist

$$f \longmapsto \left|\int f \cdot \varphi \, d\lambda\right|$$

eine stetige Halbnorm auf $\mathcal{C}^b(\mathbb{R})$ , d.h. $\mathcal{C}^b(\mathbb{R}) \hookrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R})' : f \longmapsto f \cdot \lambda$ ist stetig.

(b) Da $\|e_k\|_\infty = 1$ , ist $\sum_{k=1}^\infty k^s e_k$ für $s < -1$ in $\left(\mathcal{C}^b(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty\right)$ konvergent (Weierstraß-Kriterium), mit (a) also auch in $\mathcal{S}(\mathbb{R})'$ . Sei nun $s \geqslant -1$ . Dann existiert $j \in$ mit $s - j < -1$ und es ist

$$\sum_{k=1}^\infty k^{s-j} (2\pi i)^{-j} e_k$$

gleichmäßig konvergent. Da $\partial^j : \mathcal{S}(\mathbb{R})' \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R})'$ stetig, gilt

$$\mathcal{S}(\mathbb{R})' \ni \partial^j \sum_{k=1}^\infty k^{s-j} (2\pi i)^{-j} e_k = \sum_{k=1}^\infty \partial^j k^{s-j} (2\pi i)^{-j} e_k = \sum_{k=1}^\infty k^s e_k .$$

### Aufgabe 2

(a) Es sei $f \in \mathcal{AC}(J)$ und $\varphi \in \mathcal{D}(J)$ . Dann gilt

$$\langle \varphi | \partial (f \cdot \lambda) \rangle = -\int_J \overline{\partial \varphi} \cdot f = -\left[\overline{\varphi} \cdot f\right]_{\inf J}^{\sup J} + \int_J \overline{\varphi} \cdot \partial f = \langle \varphi | \partial f \cdot \lambda \rangle$$

wegen $\varphi(\sup J) = \varphi(\inf J) = 0$ .

(b) Nun sei $\mu \in \mathcal{D}(J)'$ mit $\partial \mu = f \cdot \lambda$ für ein $f \in \mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(J)$ . Da

$$\int_\tau^\cdot f \in \mathcal{AC}(J)$$

erhält man mit Teil (a)

$$\partial \left[\left(\int_\tau^\cdot f\right) \cdot \lambda\right] = \left(\partial \int_\tau^\cdot f\right) \cdot \lambda = f \cdot \lambda = \partial \mu .$$

In $\mathcal{D}(J)'$ ist also die Differentialgleichung

$$\partial\left[\mu - \left(\int_\tau^\cdot f\right)\cdot\lambda\right] = 0$$

zu lösen. Nach Aufgabe 3) ist sie bis auf eine Konstante eindeutig lösbar. Da

$$\mu = \left(\int_\tau^\cdot f\right)\cdot\lambda$$

eine Lösung ist, erhält man alle Lösungen in der Form

$$\mu = \left(\int_\tau^\cdot f + c\right)\cdot\lambda$$

mit einem $c \in \mathbb{R}$ . Wegen

$$\int_\tau^\cdot f + c \in \mathcal{AC}\left(J\right)$$

folgt die Behauptung.

**Aufgabe 3** Sei $J \subset \mathbb{R}$ offen und $\nu \in \mathcal{D}\left(J\right)'$ . Es ist zu zeigen: $\partial\mu = \nu$ ist in $\mathcal{D}\left(J\right)'$ bis auf eine Konstante eindeutig lösbar.

**Existenz einer Lösung:** Um eine Lösung angeben zu können, betrachten wir den Kern der stetigen Abbildung

$$\lambda : \mathcal{D}\left(J\right) \longrightarrow \mathbb{K} : \varphi \longmapsto \int_J \varphi\, d\lambda$$

Die Behauptung ist, dass $\operatorname{Ker}\lambda$ gleich $\partial\left(\mathcal{D}\left(J\right)\right)$ ist. Sei $\varphi \in \partial\left(\mathcal{D}\left(J\right)\right)$ mit $\varphi = \partial\psi$ und $\psi \in \mathcal{D}\left(J\right)$. Dann gilt

$$\int_J \varphi\, d\lambda = \int \partial\psi\, d\lambda = \Big[\psi\Big]_{\inf J}^{\sup J} = 0\ ,$$

da $\operatorname{supp}\psi \subset J$ kompakt ist. Dies zeigt $\partial\left(\mathcal{D}\left(J\right)\right) \subset \operatorname{Ker}\lambda$ . Umgekehrt, für $\varphi \in \mathcal{D}\left(J\right)$ mit $\lambda\left(\varphi\right) = 0$ und $\operatorname{supp}\varphi \subset [a,b] \subset J$ gilt für alle $x \geqslant b$ :

$$\int_{\inf J}^x \varphi = \int_{\inf J}^b \varphi = \int_J \varphi d\lambda = 0\ ,$$

d.h. $\int_{\inf J}^\cdot \varphi$ hat kompakten Träger und ist somit in $\mathcal{D}\left(J\right)$. Zusätzlich gilt

$$\partial\left(\int_{\inf J}^\bullet \varphi\right) = \varphi\ ,$$

damit ist $\varphi$ in $\partial\left(\mathcal{D}\left(J\right)\right)$ und die Gleichheit von $\operatorname{Ker}\lambda$ und $\partial\left(\mathcal{D}\left(J\right)\right)$ ist gezeigt.

Da die Kodimension von $\operatorname{Ker}\lambda$ in $\mathcal{D}\left(J\right)$ eins ist, exisitiert ein $\chi \in \mathcal{D}\left(J\right)$ mit $\int \chi = 1$ und

$$\mathcal{D}\left(J\right) = \partial\left(\mathcal{D}\left(J\right)\right) \oplus \mathbb{K}\cdot\chi = \operatorname{Ker}\lambda \oplus \mathbb{K}\cdot\chi\ .$$

Die eindeutige Zerlegung von $\varphi \in \mathcal{D}(J)$ ist

$$\varphi = \left(\varphi - \left(\int \varphi\right) \cdot \chi\right) + \left(\int \varphi\right) \cdot \chi \,.$$

Man kann somit eine Lösung der Differentialgleichung in $\mathcal{D}(J)'$ angeben:

$$\mu : \mathcal{D}(J) \longrightarrow \mathbb{K} : \varphi \longmapsto -\left\langle \int_{\inf J}^{\bullet} \left(\varphi - \left(\int \varphi\right) \chi\right) \middle| \nu \right\rangle \,.$$

Die Definition macht Sinn, da $\varphi - \left(\int \varphi\right) \chi$ in $\partial(\mathcal{D}(J))$ liegt und somit $\int_{\inf J}^{\bullet} \left(\varphi - \left(\int \varphi\right) \chi\right)$ in $\mathcal{D}(J)$ ist. Es ist eine Lösung, da für $\varphi \in \mathcal{D}(J)$ gilt:

$$\langle \varphi | \, \partial\mu \rangle = -\langle \partial\varphi | \, \mu \rangle = \left\langle \int_{\inf J}^{\bullet} \left(\partial\varphi - \left(\int \partial\varphi\right) \cdot \chi\right) \middle| \nu \right\rangle = \langle \varphi | \, \nu \rangle \,,$$

d.h. $\partial\mu = \nu$ . Es bleibt zu zeigen, dass $\mu$ stetig ist. Da $\nu$ stetig ist, müssen wir nur die Stetigkeit der Abbildung

$$\varphi \longmapsto \int_{\inf J}^{\bullet} \left[\varphi - \left(\int \varphi\right) \cdot \chi\right] : \mathcal{D}(J) \longrightarrow \mathcal{D}(J)$$

zeigen. $\mathcal{D}(J)$ ist über die induktive Topologie der $\mathcal{D}(J, K)$ definiert, somit nehmen wir ein Kompaktum $K \subset [a, b] \subset J$ , definieren $L := K \cup \operatorname{supp} \chi$ und zeigen die Stetigkeit von

$$\varphi \longmapsto \int_{\inf J}^{\bullet} \left[\varphi - \left(\int \varphi\right) \cdot \chi\right] : \mathcal{D}(J, K) \longrightarrow \mathcal{D}(J, L) \underset{stetig}{\hookrightarrow} \mathcal{D}(J)$$

Sei $k \in \mathbb{N}$ und $\varphi \in \mathcal{D}(J, K)$ . Es gilt

$$p_{L,k}\left(\int_{\inf J}^{\bullet} \left[\varphi - \left(\int \varphi\right) \cdot \chi\right]\right) = \max\nolimits_{\alpha \leqslant k} \left\| \partial^\alpha \int_{\inf J}^{\bullet} \left[\varphi - \left(\int \varphi\right) \cdot \chi\right] \right\|_{\infty, L} =$$

$$= \max\left(\max\nolimits_{1 \leqslant \alpha \leqslant k} \left\| \partial^{\alpha - 1} \left[\varphi - \left(\int \varphi\right) \cdot \chi\right] \right\|_{\infty, L}, \left\| \varphi - \left(\int \varphi\right) \cdot \chi \right\|_{\infty, L}\right) \,.$$

Da

$$\left\| \varphi - \left(\int \varphi\right) \cdot \chi \right\|_{\infty, L} \leqslant \|\varphi\|_{\infty, K} + \|\chi\|_\infty \cdot \left| \left(\int \varphi\right) \right| \leqslant \|\varphi\|_{\infty, K} + \|\chi\|_\infty \cdot \|\varphi\|_{\infty, K} \cdot (b - a) =$$

$$= c_1 \cdot \|\varphi\|_{\infty, K} \leqslant c_1 \cdot p_{K,0}(\varphi) \leqslant c_1 \cdot p_{K,k}(\varphi)$$

und

$$\left\| \partial^{\alpha - 1} \left[\varphi - \left(\int \varphi\right) \cdot \chi\right] \right\|_{\infty, L} \leqslant \left\| \partial^{\alpha - 1} \varphi \right\|_{\infty, K} + \left\| \partial^{\alpha - 1} \chi \right\|_\infty \cdot \|\varphi\|_{\infty, K} \cdot (b - a) \leqslant$$

$$\leqslant c_2 \cdot p_{K,k}(\varphi)$$

folgt

$$p_{L,k}\left(\int_{\inf J}^{\bullet} \left[\varphi - \left(\int \varphi\right) \cdot \chi\right]\right) \leqslant c_3 \cdot p_{K,k}(\varphi)$$

und somit die Stetigkeit der Abbildung. Insgesamt ist $\mu \in \mathcal{D}(J)'$ und löst die Differentialgleichung $\partial\mu = \nu$ .

**Beweis der Eindeutigkeit:** Sei $\mu \in \mathcal{D}(J)'$ und $\partial\mu = 0$ . Es ist zu zeigen, dass $\mu = const$ .
Da $\partial\mu = 0$ ist $\mu = 0$ auf $\partial(\mathcal{D}(J))$ , da für $\psi \in \mathcal{D}(J)$ folgt

$$\langle \partial\psi |\, \mu\rangle = -\langle \psi |\, \partial\mu\rangle = 0$$

Da $\partial(\mathcal{D}(J)) = \operatorname{Ker}\lambda$ ist $\operatorname{Ker}\lambda \subset \operatorname{Ker}\mu$ . Für $\mu = 0$ ist nichts mehr zu zeigen, für $\mu \neq 0$ exisitiert ein $\xi \in \mathbb{K}\cdot\chi$ mit $\langle \xi |\, \mu\rangle \neq 0$ , somit ist $\operatorname{Ker}\mu = \operatorname{Ker}\lambda$ . Daraus folgt:

$$\langle \varphi |\, \mu\rangle_{\mathcal{D}(J)} = \left\langle \left[\int \varphi\right]\cdot\chi \middle|\, \mu\right\rangle = \int \overline{\varphi}\cdot\langle \chi |\, \mu\rangle = \langle \varphi |\, \lambda\rangle\,\langle \chi |\, \mu\rangle =$$

$$= \langle \varphi |\, \langle \chi |\, \mu\rangle\cdot\lambda\rangle$$

und schliesslich haben wir

$$\mu = \langle \chi |\, \mu\rangle\cdot\lambda = const\cdot\lambda\ ,$$

d.h. $\mu = const$ .