Fachbereich Mathematik und Informatik
Philipps-Universität Marburg

PROTOKOLLE

ZU DEN ÜBUNGEN DER

FUNKTIONALANALYSIS II

Claude Portenier

Marburg
Sommersemester 2004

Fassung vom 4. August 2004

Funktionalanalysis II

Lösungsblatt 10

Aufgabe 1

(a) Es gilt

$$\rho\left(e-ab\right) \leqslant \|e-ab\| \leqslant \frac{q}{2} < 1$$

also ist $e-(e-ab)=ab$ invertierbar. Da a invertierbar, ist auch $a^{-1}(ab)=b$ invertierbar.

(b) Es gilt

$$\|e-a\Phi(b)\| = \|e-2ab+abab\| = \left\|(e-ab)^2\right\| \leqslant \|e-ab\|^2 \leqslant \frac{q^2}{4} \leqslant \frac{q}{2}$$

also $\Phi(b) \in B$.

Sei $b_1, b_2 \in B$. Dann gilt

$$\|\Phi(b_1)-\Phi(b_2)\| = \|2b_1 - b_1 a b_1 - 2b_2 + b_2 a b_2\| =$$

$$= \|(b_1-b_2)(e-ab_1) - 2b_2 + b_2ab_2 + b_1 + b_2 - b_2ab_1\| =$$

$$= \|(b_1-b_2)(e-ab_1) + (e-b_2a)(b_1-b_2)\| \leqslant q\,\|(b_1-b_2)\| \;\; .$$

Also ist Φ q-lipschitzstetig. a^{-1} ist ein Fixpunkt von Φ. Die Eindeutigkeit des Fixpunktes zeigt man mit Hilfe des Banachschen Fixpunktsates. Dafür muss jedoch gelten, dass B vollständig ist. Da jedoch

$$B = \max\left(\|e-a\cdot\|, \|e-a\cdot\|\right)^{-1}\left(\left]-\infty, \frac{1}{2}\right]\right)$$

ist $B \subset \mathcal{A}$ abgeschlossen, also vollständig.

(c) Die erste Formel beweist man durch Indukion. Der Fall $n=0$ ist klar. Sei also die Behauptung für n bewiesen. Dann gilt

$$\Phi(b_n) = 2b_n - b_nab_n = 2\sum_{k=0}^{2^n-1}(e-b_0a)^k b_0 - \sum_{k=0}^{2^n-1}(e-b_0a)^k b_0 a \sum_{k=0}^{2^n-1}(e-b_0a)^k b_0 =$$

$$= \left(2e - \sum_{k=0}^{2^n-1}(e-b_0a)^k \underbrace{b_0a}_{=e-(e-b_0a)}\right)\sum_{k=0}^{2^n-1}(e-b_0a)^k b_0 =$$

$$= \left(2e - \left(e-(e-b_0a)^{2n}\right)\right)\sum_{k=0}^{2^n-1}(e-b_0a)^k b_0 = \sum_{k=0}^{2^{n+1}-1}(e-ba)^k b_0$$

Also gilt die Beh. für $n+1$. Die zweite Formel ist wieder der Banachsche Fixpunktsatz.

Aufgabe 2 (Die Banach-Algebra $\ell^1(\mathbb{Z})$) Es ist zu zeigen, dass durch

$$\varphi * \psi = \sum_{l\in\mathbb{Z}} \varphi(k-l)\,\psi(l) \text{ für alle } k\in\mathbb{Z} \text{ und } \varphi\,,\psi\in\ell^1(\mathbb{Z})$$

$(\ell^1(\mathbb{Z}), \|\cdot\|_1, *)$ eine komplexe kommutative Banach-Algebra wird.

Nach Riesz-Fischer ist $(\ell^1(\mathbb{Z}), \|\cdot\|_1) = \mathcal{L}^1(\mathbb{Z}, \#)$ ein Banach-Raum mit der Norm

$$\|\varphi\|_1 = \sum_{z\in\mathbb{Z}} |\varphi(z)| = \int_{\mathbb{Z}} |\varphi(z)|\; d\#(z) =: \int |\varphi(z)|\; dz\ .$$

Wir zeigen zuerst, dass $*$ auf $\ell^1(\mathbb{Z})$ eine Verknüpfung definiert. Dazu zeigen wir die Norm-Abschätzung, die man für eine Banach-Algebra braucht:

$$\|\varphi*\psi\|_1 = \left\|\sum_{l\in\mathbb{Z}}\varphi(k-l)\,\psi(l)\right\|_1 = \sum_{k\in\mathbb{Z}}\left|\sum_{l\in\mathbb{Z}}\varphi(k-l)\,\psi(l)\right| \leqslant \sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{l\in\mathbb{Z}}|\varphi(k-l)|\cdot|\psi(l)| =$$

$$= \int^*\left(\int^*|\varphi(k-l)\,\psi(l)|\;dl\right)dk \overset{\text{Tonelli}}{=} \int^*\left(\int^*|\varphi(k-l)|\;dk\right)|\psi(l)|\;dl =$$

$$= \|\varphi\|_1\cdot\|\psi\|_1 < \infty\ ,$$

wobei wir im letzten Schritt die Translationsinvarianz des Integrals ausgenutzt haben. Damit ist $\varphi*\psi$ wieder in $\ell^1(\mathbb{Z})$ und $*$ wohldefiniert. Zu zeigen ist die Assoziativität:

$$[\varphi*(\psi*\xi)](k) = \int\varphi(k-l)\,(\psi*\xi)(l)\;dl = \int\varphi(k-l)\cdot\left(\int\psi(l-m)\,\xi(m)\;dm\right)dl =$$

$$\overset{m\longleftrightarrow l}{=} \int\varphi(k-m)\cdot\left(\int\psi(m-l)\,\xi(l)\;dl\right)dm \overset{\text{Fubini}}{=} \int\left(\int\varphi(k-m)\,\psi(m-l)\;dm\right)\xi(l)\;dl =$$

$$\overset{m\longrightarrow m+l}{=} \int\left(\int\varphi(k-l-m)\,\psi(m)\;dm\right)\xi(l)\;dl = [(\varphi*\psi)*\xi](k)\ .$$

Zu zeigen ist noch die Kommutativität. Es gilt:

$$[\varphi*\psi](k) = \int\varphi(k-l)\,\psi(l)\;dl \overset{n=k-l}{=} \int\psi(k-n)\,\varphi(n)\;dn = [\psi*\varphi](k)\ .$$

Das Einselement ist $e := 1_{\{0\}}$, denn es ist

$$\varphi*e(k) = \sum_{l\in\mathbb{Z}}\varphi(k-l)\,e(l) \overset{l\overset{!}{=}0}{=} \varphi(k)$$

und genauso

$$e*\varphi(k) = \sum_{l\in\mathbb{Z}} e(k-l)\,\varphi(l) \overset{k-l\overset{!}{=}0}{=} \varphi(k)\ .$$

Aufgabe 3 Injektivität: Sei $\varepsilon_x = \varepsilon_y$, d.h. $\langle \varepsilon_x | \varphi \rangle = \langle \varepsilon_y | \varphi \rangle$ für alle $\varphi \in \mathcal{C}(X)$. Dann folgt $\varphi(x) = \varphi(y)$ für alle $\varphi \in \mathcal{C}(X)$, und da $\mathcal{C}(X)$ die Punkte trennt $x = y$.

Surjektivität: Sei $\chi \in \operatorname{Sp}\mathcal{C}(X)$. Beh.: Es gibt ein $x \in X$, so dass für alle $\varphi \in \operatorname{Ker}\chi$ gilt $\varphi(x) = 0$. Denn angenommen, dem wäre nicht so, d.h. für alle $x \in X$ existierte ein $\varphi_x \in \operatorname{Ker}\chi$ mit $\varphi_x(x) \neq 0$. Dann können wir o.E. annehmen, dass in einer Umgebung U_x von x gilt $\varphi_x > 0$. Da $\operatorname{Ker}\chi$ ein Ideal ist folgt $\operatorname{Ker}\chi \ni \varphi_x\overline{\varphi_x} > 0$ auf U_x . Da X kompakt ist existieren $x_1, \ldots, x_n$ mit $X = \bigcup_{i=1}^n U_{x_i}$. Nun definiere $f := \sum_{i=1}^n \left|\varphi_{x_i}\right|^2$ mit $\operatorname{Ker}\chi \ni f > 0$. Damit ist auch $\frac{1}{f}$ stetig und

$$\langle \chi | 1 \rangle = \langle \chi | f \rangle \left\langle \chi \middle| \frac{1}{f} \right\rangle = 0 ,$$

also $\chi = 0$, Widerspruch. Damit ist die Beh. bewiesen. Sei nun $\varphi \in \mathcal{C}(X)$ beliebig. Es existiert eine Darstellung $\mathcal{C}(X) = \operatorname{Ker}\chi \oplus \mathbb{K}\cdot\psi$ mit $\langle \chi | \psi \rangle = 1$. Somit kann man $\varphi = \varphi - \langle \chi | \varphi \rangle \cdot \psi + \langle \chi | \varphi \rangle \cdot \psi$ schreiben, und wegen $\varphi - \langle \chi | \varphi \rangle \psi \in \operatorname{Ker}\chi$ folgt

$$\langle \varepsilon_x | \varphi \rangle = \langle \varepsilon_x | \varphi - \langle \chi | \varphi \rangle \psi \rangle + \langle \varepsilon_x | \langle \chi | \varphi \rangle \psi \rangle = \langle \chi | \varphi \rangle \langle \varepsilon_x | \psi \rangle = \langle \langle \psi | \varepsilon_x \rangle \chi | \varphi \rangle$$

für alle φ , d.h. $\varepsilon_x = \langle \psi | \varepsilon_x \rangle \chi$. Wegen

$$\langle \varepsilon_x | \psi \rangle^2 = \left\langle \varepsilon_x \middle| \psi^2 \right\rangle = \left\langle \langle \psi | \varepsilon_x \rangle \chi \middle| \psi^2 \right\rangle = \langle \varepsilon_x | \psi \rangle \langle \chi | \psi \rangle^2 = \langle \varepsilon_x | \psi \rangle$$

folgt $\langle \varepsilon_x | \psi \rangle = 1$, also $\varepsilon_x = \chi$.

Die Stetigkeit von ε folgt aus der Definition der schwachen Toplogie auf $\operatorname{Sp}\mathcal{C}(X) \subset \mathcal{C}(X)'$, und die Stetigkeit von ε^{-1}aus der Kompaktheit von X .

Funktionalanalysis II

Lösungsblatt 11

Aufgabe 1 (Das Spektrum von $\ell^1(\mathbb{Z})$ und der Satz von Wiener)

(a) Es ist zu zeigen, dass eine Semilinearform $\chi : \ell^1(\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{C}$ genau dann ein Charakter ist, falls ein $z \in \mathbb{U}$ exisitiert mit

$$\langle \chi | \varphi \rangle = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \varphi(k) \cdot z^k \quad \text{für alle } \varphi \in \ell^1(\mathbb{Z}) \ .$$

Mit der Definition

$$e_k : l \longmapsto \delta_{k,l} : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C}$$

gilt

$$\varphi = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \varphi(k) \cdot e_k \quad \text{in } \ell^1(\mathbb{Z}) \ ,$$

denn es ist

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \varphi(k) \cdot \underbrace{e_k(l)}_{=\delta_{k,l}} = \varphi(l) \ .$$

Für $k, l \in \mathbb{Z}$ wird das Faltungsprodukt $e_k * e_l$ berechnet:

$$(e_k * e_l)(m) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e_k(m-n)\, e_l(n) \overset{n \overset{!}{=} l}{=} e_k(m-l)$$

$$= \delta_{k,m-l} = \delta_{k+l,m} = e_{k+l}(m) \ .$$

Somit ist das Faltungsprodukt

$$e_k * e_l = e_{k+l} \ .$$

Zum Beweis der Behauptung gebe es nun ein $z \in \mathbb{U}$ mit der angegebenen Eigenschaft. Daraus folgt die Linearität von χ , somit ist nur zu zeigen, dass χ ein Charakter ist. Für $\varphi, \psi \in \ell^1(\mathbb{Z})$ gilt:

$$\langle \chi | \varphi * \psi \rangle = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (\varphi * \psi)(k) \cdot z^k = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \varphi(k-l)\, \psi(l) \cdot z^k =$$

$$\underset{k \longmapsto k+l}{\overset{\text{Fubini auf Summe angewendet}}{=}} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \varphi(k) \cdot z^{k+l} \cdot \psi(l) = \langle \chi | \psi \rangle \langle \chi | \varphi \rangle \ ,$$

somit ist χ ein Charakter. Für die Umkehrung folgt mit der obigen Darstellung für φ:

$$\langle \chi | \varphi \rangle = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \varphi(k) \cdot \langle \chi | e_k \rangle \ ,$$

da χ stetig ist. Definiere nun

$$z := \langle \chi |\, e_1 \rangle \ .$$

Die Behauptung ist, dass $\langle \chi |\, e_k \rangle = z^k$ ist für alle $k \in \mathbb{Z}$. Sei $k \in \mathbb{Z}$, dann gilt für $k \geqslant 1$:

$$\langle \chi |\, e_k \rangle = \left\langle \chi \,\middle|\, \underbrace{e_1 * \ldots * e_1}_{k-mal} \right\rangle = \langle \chi |\, e_1 \rangle^k = z^k \ .$$

Für $k = 0$ folgt

$$\langle \chi \,|e_0 \rangle = 1 = z^0 \ ,$$

da e_0 die Einheit von $\ell^1(\mathbb{Z})$ ist. Schliesslich ist für $k \leqslant -1$:

$$1 = \langle \chi |\, e_0 \rangle = \langle \chi |\, e_k * e_{-k} \rangle = \langle \chi |\, e_k \rangle \cdot \langle \chi |\, e_{-k} \rangle$$

und somit

$$\langle \chi |\, e_k \rangle = \frac{1}{\langle \chi |\, e_{-k} \rangle} = z^k \ .$$

Damit hat man ein $z \in \mathbb{C}$ gefunden, so dass

$$\langle \chi |\, \varphi \rangle = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \varphi(k) \cdot z^k \quad \text{für alle } \varphi \in \ell^1(\mathbb{Z}) \ .$$

Es bleibt noch zu zeigen, dass z in $\mathbb{U}$ ist. Dazu verwendet man folgende Abschätzung:

$$|\langle \chi |\, e_k \rangle| \leqslant \underbrace{\|\chi\|}_{=1} \cdot \underbrace{\|e_k\|_1}_{=1} = 1 \ .$$

Weiterhin gilt mit obigen:

$$1 = \underbrace{|\langle \chi |\, e_k \rangle|}_{\leq 1} \cdot \underbrace{|\langle \chi |\, e_{-k} \rangle|}_{\leq 1} \ .$$

Da beide Faktoren kleiner gleich eins sind, das Produkt jedoch eins ergibt, folgt daraus, dass

$$|\langle \chi |\, e_k \rangle| = 1$$

gelten muss, somit ist $z \in \mathbb{U}$.

(b) Es sei $f : \mathbb{U} \longrightarrow \mathbb{C}$ stetig mit absolut konvergenter Fourier-Reihe. Wegen

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \left\| \mathcal{F}f(k) \cdot \mathrm{id}^k \right\|_{2,\mathbb{U}} \leqslant \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left\| \mathcal{F}f(k) \cdot \mathrm{id}^k \right\|_{\infty,\mathbb{U}} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\mathcal{F}f(k)| < \infty$$

ist $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathcal{F}f(k) \cdot \mathrm{id}^k$ gleichmäßig konvergent auf $\mathbb{U}$ und konvergent in $\mathbf{L}^2(\mathbb{U})$. Da $\left(\mathrm{id}^k\right)_{k \in \mathbb{Z}}$ eine Hilbert-Basis von $\mathbf{L}^2(\mathbb{U})$ ist und nach

$$\left(\mathrm{id}^l \,\middle|\, \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathcal{F}f(k) \cdot \mathrm{id}^k \right)_{\mathbf{L}^2(\mathbb{U})} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathcal{F}f(k) \cdot \left(\mathrm{id}^l \,\middle|\mathrm{id}^k \right)_{\mathbf{L}^2(\mathbb{U})} = \mathcal{F}f(l) = \left(\mathrm{id}^l \middle|\, f \right)_{\mathbf{L}^2(\mathbb{U})}$$

die Fourier-Koeffizienten von f und $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathcal{F}f\,(k)\cdot \mathrm{id}^k$ gleich sind, gilt

$$f = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathcal{F}f\,(k)\cdot \mathrm{id}^k$$

in $\mathbf{L}^2\,(\mathbb{U})$ bzw. punktweise $\lambda_{\mathbb{U}}$-f.ü. Da die Menge

$$\left\{ f \neq \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathcal{F}f\,(k)\cdot \mathrm{id}^k \right\}$$

eine offene Nullmenge ist, kann sie nur leer sein, und damit folgt die Behauptung.

(c) Es sei $\mathcal{A}$ die Unteralgebra der stetigen Funktionen mit absolut konvergenter Fourier-Reihe. Betrachte

$$\mathcal{F} : \mathcal{A} \longrightarrow \ell^1\,(\mathbb{Z}) : f \longmapsto \mathcal{F}f\ .$$

$\ell^1\,(\mathbb{Z})$ ist eine Banach-Algebra, und nach Teil (a) gilt $\mathrm{Sp}\,\ell^1\,(\mathbb{Z}) = \{\chi_z \mid z \in \mathbb{U}\}$. Man kann zeigen, dass

$$z \longmapsto \chi_z : \mathbb{U} \longrightarrow \mathrm{Sp}\,\ell^1\,(\mathbb{Z})$$

ein Homöomorphismus ist; dies ist aber hier nicht nötig.

Die Gelfand-Abbildung

$$\mathcal{G} : \ell^1\,(\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathcal{C}(\mathrm{Sp}\,\ell^1\,(\mathbb{Z})) : \varphi \longmapsto \langle \chi_\cdot\,|\varphi\rangle = \sum_{l\in\mathbb{Z}} \varphi\,(l)\cdot \mathrm{id}^l$$

ist ein Algebra-Isomorphismus auf $\mathcal{A}$: Die Surjektivität folgt mit (b) wegen

$$(\mathcal{G}\circ\mathcal{F})(f) = \sum_{l\in\mathbb{Z}} (\mathcal{F}f)(l)\,\mathrm{id}^l = f\ .$$

Ist $\mathcal{G}\varphi = 0$, d.h. $\varphi\,(k) = \left(\mathrm{id}^k \middle|\, \mathcal{G}\varphi\right)_{\mathbf{L}^2(\mathbb{U})} = 0$ für alle $k \in \mathbb{Z}$, so ist auch $\varphi = 0$ und somit $\mathcal{G}$ injektiv.

Ist nun $f(z) \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{U}$, so ist $\mathcal{F}f$ nach Gelfand in $\ell^1\,(\mathbb{Z})$ invertierbar. Da $\mathcal{G}$ ein Algebra-Isomorphismus ist, folgt die Invertierbarkeit von f in $\mathcal{A}$, d.h. $\frac{1}{f} \in \mathcal{A}$. Folglich hat $\frac{1}{f}$ eine absolut konvergente Fourier-Reihe.

Aufgabe 2

(a) Sei T normal und $\mathcal{A}\,(T)$ die von T erzeugte Stern-Unteralgebra in $\mathcal{L}\,(\mathcal{H})$. Wir betrachten den aus der Vorlesung bekannten isometrischen Morphismus von involutiven Stern-Algebren mit Eins: das Spektralintegral

$$\Phi : \mathcal{C}\,(\mathrm{Sp}\,T) \longrightarrow \mathcal{L}\,(\mathcal{H})\ .$$

Es gilt $\Phi\,(\mathcal{C}\,(\mathrm{Sp}\,T)) = \mathcal{A}\,(T)$, $\Phi 1 = \mathrm{Id}_{\mathcal{H}}$ und $\Phi\,\mathrm{id} = T$. Insbesondere ist $\Phi : \mathcal{C}\,(\mathrm{Sp}\,T) \longrightarrow \mathcal{A}\,(T)$ bijektiv. Also werden $\mathrm{Id}_{\mathcal{H}}$ und T durch $\Phi^{-1}\,(\mathrm{Id}_{\mathcal{H}}) = 1$ bzw. $\Phi^{-1}\,(T) = \mathrm{Id}_{\mathrm{Sp}\,T}$ dargestellt.

(b) Zu zeigen ist die Äquivalenz:

$$1_{\{x\}} : \begin{array}{l} X \longrightarrow \mathbb{C} \\ y \longmapsto \delta_{x,y} \end{array} \ \text{stetig} \quad \Longleftrightarrow \quad \{x\} \text{ ist abgeschlossen und offen in } X\ .$$

Die Bedingung ist notwendig, da aus $\complement\{1\} \in \mathcal{T}_{\mathbb{C}}$, $1_{\{x\}}^{-1}\left(\complement\{1\}\right) = \complement\{x\}$ und $\left\{|y| > \frac{1}{2}\right\} \in \mathcal{T}_{\mathbb{C}}$, $1_{\{x\}}^{-1}\left(\left\{|y| > \frac{1}{2}\right\}\right) = \{x\}$, folgt $\{x\}$ ist abgeschlossen und offen in X .

Umgekehrt sei $A \in \mathcal{T}_{\mathbb{C}}$. Dann gilt:

$$1_{\{x\}}^{-1}(A) = \begin{cases} \emptyset & \\ \{x\} & \\ \{x\}^c & \\ X & \end{cases} \text{, falls } \begin{array}{l} 0 \notin A\,, 1 \notin A \\ 0 \notin A\,, 1 \in A \\ 0 \in A\,, 1 \notin A \\ 0 \in A\,, 1 \in A \end{array} .$$

Die leere Menge und X sind in jedem topologischen Raum offen. $\{x\}$ und $\{x\}^c$ sind nach Voraussetzung offen.

(c) $\operatorname{Sp} T \subset \mathbb{C}$ ist endlich. Es ist $1_{\operatorname{Sp} T} = \sum_{\lambda \in \operatorname{Sp} T} 1_{\{\lambda\}}$ und $\operatorname{id}_{\operatorname{Sp} T} = \sum_{\lambda \in \operatorname{Sp} T} \lambda \cdot 1_{\{\lambda\}}$ in $\mathcal{C}(\operatorname{Sp} T)$, da alle Einpunktmengen abgeschlossen und offen in $\operatorname{Sp} T$ sind.

(d) Setze $P_\lambda := \Phi\left(1_{\{\lambda\}}\right)$. Es gilt

$$\operatorname{Id}_{\mathcal{H}} = \Phi\left(1_{\operatorname{Sp} T}\right) = \sum_{\lambda \in \operatorname{Sp} T} \Phi\left(1_{\{\lambda\}}\right) = \sum_{\lambda \in \operatorname{Sp} T} P_\lambda$$

und

$$T = \Phi \operatorname{id}_{\operatorname{Sp} T} = \Phi\left(\sum_{\lambda \in \operatorname{Sp} T} \lambda \cdot 1_{\{\lambda\}}\right) = \sum_{\lambda \in \operatorname{Sp} T} \lambda \cdot \Phi\left(1_{\{\lambda\}}\right) = \sum_{\lambda \in \operatorname{Sp} T} \lambda \cdot P_\lambda .$$

(e) Da

$$T P_\lambda = \Phi \operatorname{id}_{\operatorname{Sp} T} \Phi\left(1_{\{\lambda\}}\right) = \Phi\left(\operatorname{id}_{\operatorname{Sp} T} \cdot 1_{\{\lambda\}}\right) = \Phi\left(1_{\{\lambda\}}\right) = P_\lambda ,$$

folgt

$$(T - \operatorname{Id}) P_\lambda(\mathcal{H}) = (T P_\lambda - P_\lambda)(\mathcal{H}) = \{0\} ,$$

d.h. $P_\lambda(\mathcal{H}) \subset \operatorname{Ker}(T - \operatorname{Id})$. Umgekehrt sei $\xi \in \operatorname{Ker}(T - \lambda \cdot \operatorname{Id})$. Für alle $\lambda' \neq \lambda$ gilt:

$$\lambda' \cdot P_{\lambda'}\xi = T P_{\lambda'}\xi = P_{\lambda'} T \xi = P_{\lambda'}(\lambda \cdot \xi) = \lambda \cdot P_{\lambda'}\xi ,$$

da $\mathcal{A}(T)$ commutativ ist. Daraus folgt $(\lambda' - \lambda) \cdot P_{\lambda'}\xi = 0$ und somit $P_{\lambda'}\xi = 0$, da $\lambda' - \lambda \neq 0$. Aus

$$\xi = \operatorname{Id}_{\mathcal{H}} \xi = \sum_{\lambda' \in \operatorname{Sp} T} P_{\lambda'}\xi = P_\lambda \xi \in P_\lambda(\mathcal{H}) .$$

Nach FA I, Blatt2, Aufgabe 3, bleibt zu zeigen, dass P_λ eine s.a. Projektion ist:

$$P_\lambda^2 = \Phi\left(1_{\{\lambda\}}\right)^2 = \Phi\left(1_{\{\lambda\}}^2\right) = \Phi\left(1_{\{\lambda\}}\right) = P_\lambda$$

und

$$P_\lambda^* = \Phi\left(1_{\{\lambda\}}\right)^* = \Phi\left(\overline{1_{\{\lambda\}}}\right) = \Phi\left(1_{\{\lambda\}}\right) = P_\lambda .$$

(f) Da für $\lambda \neq \lambda'$ gilt

$$P_\lambda P_{\lambda'} = \Phi\left(1_{\{\lambda\}}\right) \Phi\left(1_{\{\lambda'\}}\right) = \Phi\left(1_{\{\lambda\}} \cdot 1_{\{\lambda'\}}\right) = \Phi(0) = 0 ,$$

sind die Eigenräume $P_\lambda(\mathcal{H}) = \operatorname{Ker}(T - \lambda \cdot \operatorname{Id})$ paarweise orthogonal, da

$$(P_\lambda \xi | P_{\lambda'}\eta) = (\xi | P_\lambda P_{\lambda'}\eta) = 0 .$$

Wegen $\sum_{\lambda \in \operatorname{Sp} T} P_\lambda = \operatorname{Id}_{\mathcal{H}}$ folgt

$$\mathcal{H} = \boxplus_{\lambda \in \operatorname{Sp} T} \operatorname{Ker}(T - \lambda \cdot \operatorname{Id}) \ .$$

Wählt man in jedem Eigenraum $\operatorname{Ker}(T - \lambda \cdot \operatorname{Id})$ eine Orthonormalbasis, so erhält man eine Orthonormalbasis von $\mathcal{H}$, bezüglich derer die Matrixdarstellung von T Diagonalgestalt hat.

Funktionalanalysis II

Lösungsblatt 12

Aufgabe 1 Wir betrachten den Operator $\partial : \mathcal{C}^{(1)}([0,1]) \longrightarrow \mathcal{C}([0,1])$, mit $\mathcal{C}^{(1)}([0,1]) \subset \mathcal{C}([0,1])$. Dass die letztgenannte Menge nur mit Banach- und nicht mit Hilbertraumstruktur versehen ist, stört uns nicht.

(a) Zu zeigen: $\operatorname{Gr}\partial \subset \mathcal{C}^{(1)}([0,1]) \times \mathcal{C}([0,1])$ ist abgeschlossen. In der Tat: Wir betrachten $(f_k) \subset \mathcal{C}^{(1)}([0,1])$ mit $\lim f_k = f \in \mathcal{C}([0,1])$ und $\lim_k \partial f_k =: g \in \mathcal{C}([0,1])$. Damit gilt

$$f_k(x) = f(0) + \int_0^x \partial f_k \ ,$$

also folgt

$$f(x) = \lim_k f_k(x) = f(0) + \lim_k \int_0^x \underbrace{\partial f_k}_{\text{glm kgt}} = f(0) + \int_0^x \underbrace{g}_{\text{stetig}}$$

und somit $f \in \mathcal{C}^{(1)}$ sowie $\partial f = g$.

Es bleibt noch zu zeigen, dass $\partial : \left(\mathcal{C}^{(1)}, \|\cdot\|_\infty\right) \longrightarrow (\mathcal{C}, \|\cdot\|)$ nicht stetig ist. Dazu betrachten wir:

$$f_k(x) = \frac{1}{k} \cdot \sin(kx) \quad \text{für } k \in \mathbb{N} \ .$$

Für diese Folge gilt: $\|f_k\|_\infty \leqslant \frac{1}{k}$ und somit $f_k \xrightarrow{\text{glm}} 0$. Aber:

$$\partial f = \cos(k\cdot) \overset{\text{glm}}{\nrightarrow} 0 \ .$$

(b) Betrachte

$$\mathcal{D}(\not\partial) := \left(\mathcal{H}^{(1)}(]0,1[), (\cdot|\cdot)_{(1)}\right) := \left(\mathcal{H}^{(1)}(]0,1[), (\cdot|\cdot) + (\partial\cdot|\partial\cdot)\right) \ .$$

Nach Hauptsatz 1.7 handelt es sich um einen Hilbertraum und nach Korollar 1.7 ist $\mathcal{H}^{(1),0}(]0,1[)$ ein Unterhilbertraum davon. Nach HS 7.1 ist $\not\partial$ also abgeschlossen. Mithilfe von Satz 7.1 sehen wir, dass $\not\partial$ auf $\mathcal{H}^{(1)}(]0,1[)$ bzgl. $\|\cdot\|_2$ genau dann stetig ist, wenn $\mathcal{H}^{(1)}(]0,1[)$ in $\mathbf{L}^2([0,1])$ abgeschlossen ist. Ferner liegen die Elemente der hilbertschen Basis $\left(\sqrt{2}\cdot\sin(\pi k\cdot)\right)_{k\geq 1}$ alle in $\mathcal{H}^{(1)}(]0,1[)$. Insbesondere ist $\mathcal{H}^{(1)}(]0,1[)$ dicht in $\mathbf{L}^2([0,1])$. Also kann $\mathcal{H}^{(1)}(]0,1[)$ nicht in $\mathbf{L}^2([0,1])$ abgeschlossen sein, sonst wäre

$$\mathcal{H}^{(1)}(]0,1[) = \mathbf{L}^2([0,1]) \ .$$

Dies führt also zum Widerspruch. Für $\mathcal{H}^{(1),0}(]0,1[)$ lässt sich analog schließen.

Aufgabe 2 (Die (unbeschränkten) Multiplikationsoperatoren)

(a) Es ist zu zeigen, dass $M_f^* = M_{\overline{f}}$. Man betrachtet folgendes Tripel:

$$\mathcal{D}(f) \hookrightarrow \mathbf{L}^2(\mu) \hookrightarrow \mathcal{D}(f)^\dagger \ ,$$

wobei der Definitionsbereich $D(f)$ mit der Graphennorm versehen ist. M_f ist in $\mathbf{L}^2(\mu)$ dicht definiert. Sei dazu $\xi \in \mathbf{L}^2(\mu)$, def.

$$\xi_k := 1_{\{|f| \leqslant k\}} \cdot \xi \in \mathbf{L}^2(\mu) \ .$$

Es gilt:

$$\|f \cdot \xi_k\|_2 \leqslant k \cdot \|\xi\|_2 < \infty \ ,$$

d.h. $\xi_k \in D(f)$. Mit Lebesgue folgt

$$\lim_k \xi_k = \xi \quad \text{in } \mathbf{L}^2(\mu) \ ,$$

somit ist M_f in $\mathbf{L}^2(\mu)$ dicht definiert. Um die Adjungierte von M_f zu berechnen, betrachtet man zuerst die formal Adjungierte

$$M_f^\dagger : \mathbf{L}^2(\mu) \longrightarrow \mathcal{D}(f)^\dagger \ .$$

Um den stetigen Semidualraum von $\mathcal{D}(f)$ zu charakterisieren, geht man vom Graphenskalarprodukt aus. Für ξ und $\eta \in D(f)$ gilt:

$$(\xi|\,\eta)_D = (\xi|\,\eta)_{\mathbf{L}^2(\mu)} + (f\cdot\xi|\,f\cdot\eta)_{\mathbf{L}^2(\mu)}$$

$$= \int \overline{\xi}\eta\,d\mu + \int \overline{f}\cdot\overline{\xi}\cdot f\eta\,d\mu = \int \overline{\xi}\eta\cdot\left(1+|f|^2\right) \ .$$

Nach Definition ist ξ genau dann in $D(f)$, wenn ξ und $f\xi$ in $\mathbf{L}^2(\mu)$ sind. Mit obiger Gleichheit ist dies dazu äquivalent, dass ξ in $\mathbf{L}^2\left(\mu, 1+|f|^2\right)$ ist, d.h.

$$\mathcal{D}(f) = \mathbf{L}^2\left(\mu, 1+|f|^2\right)$$

und somit

$$\mathcal{D}(f)^\dagger = \mathbf{L}^2\left(\mu, \frac{1}{1+|f|^2}\right)$$

nach 3.4, Beispiel 5. Zur Berechnung von $M_f^\dagger$ sei nun $\xi \in D(f)$ und $\eta \in \mathbf{L}^2(\mu)$. Es ist $\overline{f}\eta \in \mathcal{D}(f)^\dagger$, da

$$\int \left|\overline{f}\eta\right|^2 \cdot \frac{1}{1+|f|^2}\,d\mu = \int \frac{|f|^2}{1+|f|^2}\cdot|\eta|^2\,d\mu \leqslant \int |\eta|^2\,d\mu < \infty \ .$$

Somit folgt

$$\left\langle \xi|\,M_f^\dagger\eta\right\rangle_{D(f)} = (M_f\xi|\,\eta)_{\mathbf{L}^2(\mu)} = (f\xi|\,\eta)_{\mathbf{L}^2(\mu)} = \int \overline{\xi f}\cdot\eta\,d\mu = \left\langle \xi|\,\overline{f}\eta\right\rangle_{D(f)} \ ,$$

d.h.

$$M_f^\dagger\eta = \overline{f}\eta \ .$$

Der Definitionsbereich von M_f^* ist somit

$$D\left(M_f^*\right) = \left\{\eta \in \mathbf{L}^2(\mu) \mid \overline{f}\eta \in \mathbf{L}^2(\mu)\right\} = D\left(\overline{f}\right) = D(f) \ .$$

Daraus folgt

$$M_f^* = M_{\overline{f}} \ .$$

(b) Es gilt: $D\left(|f|^2\right) \subset D(f)$. Denn sei $\xi \in D\left(|f|^2\right)$, dann ist zu zeigen, dass $\|f\xi\|_2^2 < \infty$, da die Messbarkeit erfüllt ist. Zur Abschätzung der Norm wird die Hölderungleichung verwendet:

$$\|f\xi\|_2^2 = \left\|f^2\xi \cdot \xi\right\|_1 \leqslant \left\|f^2\xi\right\|_2 \cdot \|\xi\|_2 < \infty \ ,$$

somit folgt die Behauptung. Es ist zu zeigen, dass M_f und $M_{\overline{f}}$ kommutieren und gleich $M_{|f|^2}$ ist:

$$D\left(M_{\overline{f}}M_f\right) = \left\{\psi \in D(f) \mid f\psi \in D\left(\overline{f}\right)\right\} = \left\{\psi \in \mathbf{L}^2(\mu) \mid f\psi \in \mathbf{L}^2(\mu) \ \text{ und } \overline{f}f\psi \in \mathbf{L}^2(\mu)\right\}$$

$$\overset{\text{Symmetrie}}{=} D\left(M_fM_{\overline{f}}\right) \subset D\left(|f|^2\right) \subset D(f) \cap D\left(|f|^2\right) = D\left(M_{\overline{f}}M_f\right) \ ,$$

somit ist $M_{\overline{f}}M_f = M_fM_{\overline{f}} = M_{|f|^2}$.

(c) Es ist zu zeigen, dass M_f normal ist. Da $M_{\overline{f}} = M_f^*$ ist, folgt aus (b)

$$M_f^*M_f = M_fM_f^* \ ,$$

d.h. M_f ist normal.

(d) M_f ist genau dann selbstadjungiert, wenn f μ-fast überall reell ist:
Sei f μ-fast überall reell . Für $\xi \in \mathbf{L}^2(\mu)$ und $\eta \in D\left(\overline{f}\right)$ gilt:

$$\left(\xi \middle| M_f^*\eta\right) = \left(\xi \middle| M_{\overline{f}}\eta\right) = \int \overline{\xi f} \cdot \eta \, d\mu = \int \overline{\xi} f\eta \, d\mu = (\xi| M_f\eta) \ ,$$

somit ist $M_f^* = M_f$. Umgekehrt ist

$$\int \overline{\xi f} \cdot \eta \, d\mu = \left(\xi \middle| M_f^*\eta\right) \overset{M_f \text{ s.a.}}{=} (\xi| M_f\eta) = \int \overline{\xi} f\eta \, d\mu \ .$$

Somit ist

$$\int \overline{\xi}\eta \cdot \left(\overline{f} - f\right) \, d\mu = 0$$

und da $\mathbf{L}^2(\mu)$ ein Testraum ist folgt

$$\eta \cdot \left(\overline{f} - f\right) = 0 \quad \text{für } \eta \in D\left(\overline{f}\right) = D(f) \ .$$

Für $\xi \in \mathbf{L}^2(\mu)$ exisitert wegen der Dichtheit des Definitionsbereiches von M_f eine Folge $(\eta_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset D(f)$ mit $\xi = \lim_k \eta_k$ in $\mathbf{L}^2(\mu)$, ohne Einschränkung konvergiert diese Folge punktweise. Dann folgt

$$\xi \cdot \left(\overline{f} - f\right) = \lim\nolimits_k \underbrace{\eta_k \cdot \left(\overline{f} - f\right)}_{=0} = 0 \ ,$$

somit ist

$$\overline{f} - f = 0 \quad \text{in } \mathbf{L}^2(\mu) \ ,$$

d.h. f ist μ-fast überall reell.

(e) $\|M_f\| = \|f\|_{\infty,\mu}$:
Für die eine Abschätzung benutzt man

$$\|M_f\xi\|_2^2 = \|f\xi\|_2^2 \leqslant \|f\|_{\infty,\mu}^2 \cdot \|\xi\|_2^2 \ ,$$

d.h.

$$\|M_f\| \leqslant \|f\|_{\infty,\mu} \ .$$

Für $\|M_f\xi\|_2 \geqslant \inf\{N \in \mathbb{R}_+ \mid |f| \leqslant N \text{ lokal } \mu\text{-f.ü.}\}\cdot\|\xi\|_2$ ist zu zeigen, dass für jedes $N < \|f\|_{\infty,\mu}$ ein $\xi \in D(f)$ exisitert mit $\|M_f\xi\|_2 \geqslant N \cdot \|\xi\|_2$. Definiere für $N < \|f\|_{\infty,\mu}$ die Menge $B := \{|f| \geqslant N\}$. Da B μ-messbar, aber keine lokal Nullmenge ist, existiert $K \subset B$, $K \in \mathfrak{K}(X)$ mit $\mu(K) =: \delta > 0$. Definiere weiterhin

$$\xi := \frac{1}{\sqrt{\delta}} \cdot 1_K \in \mathbf{L}^2(\mu) \ .$$

Es gilt:

$$\|\xi\|_2^2 = \frac{1}{\delta} \cdot \mu(K) = 1$$

und

$$\|f\xi\|_2^2 = \int_K |\xi f|^2 \, d\mu \geqslant \int_K \frac{1}{\delta} \cdot N^2 \, d\mu = \frac{N^2}{\delta} \cdot \mu(K) = N^2 \ ,$$

somit ist $\|M_f\xi\|_2 \geqslant N \cdot \|\xi\|_2$. Insgesamt ist $\|M_f\| = \|f\|_{\infty,\mu}$.

(f) Falls $\lambda \in \mathrm{Sp}_p\, M_f$, gibt es $\xi \in D(f) \setminus \{0\}$ mit $f \cdot \xi = \lambda \cdot \xi$. Somit ist $f = \lambda$ μ-f.ü. auf $\{\xi \neq 0\}$, d.h.

$$\mu^*\left(\overset{-1}{f}(\lambda)\right) \geqslant \mu^*(\{\xi \neq 0\}) > 0 \ .$$

Ist andererseits $\mu^*\left(\overset{-1}{f}(\lambda)\right) > 0$, so existiert $\xi \in \mathbf{L}^2(\mu) \setminus \{0\}$ mit $1_{X \setminus \overset{-1}{f}(\lambda)} \cdot \xi = 0$ μ-f.ü. Es gilt

$$\int |f \cdot \xi|^2 \, d\mu = \int_{\overset{-1}{f}(\lambda)} |f \cdot \xi|^2 \, d\mu = |\lambda|^2 \cdot \|\xi\|_2^2 < \infty \ ,$$

d.h. $\xi \in D(f)$. Weiter gilt für μ-fast alle $x \in X$

$$(f \cdot \xi)(x) = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & x \in X \setminus \overset{-1}{f}(\lambda) \\ \lambda\xi(x) & x \in \overset{-1}{f}(\lambda) \end{array} \right\} = \lambda\xi(x) \ ,$$

d.h. $\lambda \in \mathrm{Sp}_p\, M_f$.

(g) Sei $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathrm{Sp}_p\, M_f$. Es gilt offenbar

$$M_{f-\lambda}(D(f)) = \left\{\xi \in \mathbf{L}^2(\mu) \;\middle|\; \frac{1}{f-\lambda} \cdot \xi \in \mathbf{L}^2(\mu)\right\} = D\left(\frac{1}{f-\lambda}\right) \ ,$$

also, da $M_{f-\lambda}$ genau dann surjektiv ist, wenn $M_{(f-\lambda)^{-1}}$ beschränkt ist, folgt mit dem Theorem vom abgeschlossenen Graphen, dass

$$\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathrm{Sp}\, M_f \quad \Longleftrightarrow \quad \left\|(f-\lambda)^{-1}\right\|_{\infty,\mu} < \infty$$

$$\iff \quad |f - \lambda| \geqslant \varepsilon \quad \mu\text{-f.ü. für ein } \varepsilon > 0$$

$$\iff \quad \mu\left(\overset{-1}{f}(U)\right) = 0 \quad \text{für eine Umgebung} \quad \lambda \in U \subset \mathbb{C}\ .$$

Dies zeigt die erste Behauptung.

Ist nun $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \operatorname{Sp} M_f$, so existiert eine Umgebung $\lambda \in U \subset \mathbb{C}$, so dass $\mu\left(\overset{-1}{f}(U)\right) = 0$. Definiere

$$A = X \setminus \overset{-1}{f}(U)\ .$$

Dann ist A messbar mit $\mu(X \setminus A) = 0$ und $U \cap f(A) = \emptyset$, also $\lambda \notin \overline{f(A)}$. Damit ist

$$\lambda \in \mathbb{C} \setminus \bigcap_{\mu(X \setminus A)} \overline{f(A)}\ .$$

Ist umkehrt dies der Fall, so existiert $A \subset X$ messbar mit $\mu(X \setminus A) = 0$ und eine Umgebung $\lambda \in U \subset \mathbb{C}$ mit $U \cap f(A) = \emptyset$. Also ist

$$\mu\left(\overset{-1}{f}(U)\right) \leqslant \mu(X \setminus A) = 0\ ,$$

somit also $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \operatorname{Sp} M_f$.

(h) Es gilt

$$\|(f+g)\,\xi\|_2 \leqslant \|f\xi\|_2 + \|g\xi\|_2\ ,$$

d.h.

$$D(M_f + M_g) = D(f) \cap D(g) \subset D(f+g) = D(M_{f+g})\ .$$

Sei für alle $k \in \mathbb{N}$

$$A_k = \{|f|, |g| \leqslant k\}\ .$$

Es gilt für $\xi \in D(f+g)$ und $k \in \mathbb{N}$

$$\int |g \cdot 1_{A_k} \cdot \xi|^2 \, d\mu \leqslant k^2 \cdot \|\xi\|_2^2 < \infty\ ,$$

also $1_{A_k} \cdot \xi \in D(g)$ und analog $\in D(f)$. Nun ist

$$\|\xi - 1_{A_k} \cdot \xi\|_{f+g}^2 = \int \left(1 + |f+g|^2\right) |\xi|^2 \left(1 - 1_{A_k}\right) d\mu\ .$$

Da der Integrand punktweise $\leqslant \left(1 + |f+g|^2\right) |\xi|^2 \in \mathbf{L}^1(\mu)$ ist und punktweise μ-f.ü. gegen 0 konvergiert, folgt

$$\xi = \lim\nolimits_k 1_{A_k} \cdot \xi \quad \text{in} \quad \mathcal{D}(f+g)\ ,$$

somit liegt also $D(f) \cap D(g)$ in dieser Menge dicht. Da offenbar $M_f + M_g \subset M_{f+g}$, folgt die erste Behauptung. Die zweite folgt analog.

(i) Nach Voraussetzung ist $\left(1 + |f|^2\right) \cdot \mu$ ein Radonintegral, also ist

$$\mathcal{D}(f) = \mathbf{L}^2\left(\left(1 + |f|^2\right) \cdot \mu\right)$$

mit Gleichheit der Normen. Damit liegt $\mathcal{K}(X)$ dicht, und $\mathcal{D}(X)$ ist dicht in $\mathcal{K}(X)$ mit Stone-Weierstrass.

Fachbereich Mathematik und Informatik
Philipps-Universität Marburg **Sommersemester 2004**

Funktionalanalysis II

Lösungsblatt 13

Aufgabe 1 Es gilt folgende Gleichheit von $\mathbb{C}$-Vektorräumen

$$D(P^*) = \left\{\xi \in \mathbf{L}^2([0,1]) \;\middle|\; \partial\xi \in \mathbf{L}^2([0,1])\right\} = \mathcal{H}^{(1)}(]0,1[) \ .$$

Da $P \subset P_\alpha$ (denn $P \subset P^*$ und $\mathcal{D}(X) \subset D(P_\alpha)$) , gilt $P_\alpha^* \subset P^*$, d.h.

$$P_\alpha^* = \not{\partial}|_{D(P_\alpha^*)} \quad \text{und} \quad D(P_\alpha^*) \subset \mathcal{H}^{(1)}(]0,1[) \ .$$

Es folgt weiter $\not{\partial}\xi \in \mathbf{L}^2([0,1])$ für $\xi \in D(P_\alpha)$, also ist $D(P_\alpha) \subset D(P_\alpha^*)$. Für $\xi, \eta \in D(P_\alpha)$ gilt

$$(\eta\,|P_\alpha\xi) = \frac{1}{2\pi i}\cdot\int_0^1 \overline{\eta}\cdot\partial\xi = -\frac{1}{2\pi i}\cdot\int_0^1 \partial\overline{\eta}\cdot\xi = (P_\alpha\xi\,|\eta) \ ,$$

denn

$$\Big[\overline{\eta}\cdot\xi\Big]_0^1 = \left(1-|\alpha|^2\right)\cdot\overline{\eta(1)}\cdot\xi(1) = 0 \ .$$

Also ist $P_\alpha \subset P_\alpha^*$. Zur Selbstadjungiertheit reicht zu zeigen, dass $D(P_\alpha) = D(P_\alpha^*)$.

Aber für $\varphi \in D(P_\alpha), \gamma \in D(P_\alpha^*)$ gilt

$$(P_\alpha\varphi\,|\gamma) = (\varphi\,|P_\alpha^*\gamma) = \frac{1}{2\pi i}\cdot\int_0^1 \overline{\varphi}\cdot\partial\gamma = \overline{\varphi(1)}\cdot(\gamma(1)-\overline{\alpha}\gamma(0)) - \frac{1}{2\pi i}\cdot\int_0^1 \partial\overline{\varphi}\cdot\gamma =$$

$$= \overline{\varphi(1)}\,(\gamma(1)-\overline{\alpha}\gamma(0)) + (P_\alpha\varphi\,|\gamma) \ ;$$

wähle $\varphi \in D(P_\alpha)$ mit $\varphi(1) \neq 0$, dann folgt

$$\alpha\gamma(1) = \gamma(0) \ ,$$

denn $\frac{1}{\overline{\alpha}} = \alpha$. Damit ist $P_\alpha^* = P_\alpha \supset P$.

Sei nun $Q^* = Q \supset P$. Es folgt $Q = Q^* \subset P^* = \not{\partial}|_{\mathcal{H}^{(1)}(]0,1[)}$. Es gilt für alle $\xi, \eta \in D(Q)$

$$0 = (\xi\,|Q\eta) - (Q\xi\,|\eta) = \frac{1}{2\pi i}\cdot\left(\int_0^1 \overline{\xi}\cdot\partial\eta - \int_0^1 \partial\overline{\xi}\cdot\eta\right) = \frac{1}{2\pi i}\cdot\Big[\overline{\xi}\cdot\eta\Big]_0^1 \ ,$$

d.h.

$$\overline{\xi(0)}\eta(0) = \overline{\xi(1)}\eta(1) \ .$$

Da $Q \supset \overline{P}$, existiert $\xi \in D(Q)$ mit $\xi(0) \neq 0$. Also gilt es $\alpha \in \mathbb{U}$ mit $\xi(0) = \alpha\xi(1)$. Für alle $\eta \in D(Q)$ folgt

$$\eta(0) = \frac{\overline{\xi(1)}}{\overline{\xi(0)}}\cdot\eta(1) = \alpha\cdot\eta(1) \ .$$

Damit ist

$$P_\alpha \supset Q = Q^* \supset P_\alpha^* = P_\alpha \ ,$$

das ist die Behauptung.

Aufgabe 2

(a) Offenbar ist $\xi \in D(P_\alpha)$ genau dann Eigenvektor zum Eigenwert $z \in \mathbb{C}$, wenn

$$\partial\xi = 2\pi iz \cdot \xi \ . \tag{$*$}$$

Die distributiven Lösungen ξ dieser DGL erfüllt automatisch $\xi \in \mathcal{H}^{(1)}(]0,1[)$, sind also insbesondere stetig. Wiederum aus der DGL folgt $\partial\xi$ stetig, also $\xi \in \mathcal{C}^{(1)}(]0,1[)$, d.h. es handelt sich um gewöhnliche Lösungen. Die einzigen Lösungen dieser DGL sind bekanntlich

$$C \cdot e^{2\pi iz\cdot \mathrm{id}} \quad , \quad C \in \mathbb{C} \ .$$

Somit sind die Eigenvektoren ξ von P_α zum Eigenwert z genau die Funktionen

$$\xi = C \cdot e^{2\pi iz\cdot \mathrm{id}} \quad , \quad C \in \mathbb{C}$$

mit der Bedingung $C = 0$ oder

$$\alpha = \frac{\xi(0)}{\xi(1)} = e^{-2\pi iz} \ .$$

Damit ist

$$\mathrm{Sp}_p\, P_\alpha = -\vartheta + \mathbb{Z} \quad , \quad \text{wobei} \quad \alpha = e^{2\pi i\vartheta} \ .$$

(b) Die Bedingung $z \notin \mathrm{Sp}\, P_\alpha$ bedeutet, dass die DGL

$$\partial\xi - 2\pi iz \cdot \xi = \eta$$

für alle $\eta \in \mathbf{L}^2([0,1])$ eindeutig lösbar in $D(P_\alpha)$ ist. Durch Anwendung des Verfahrens 'Variation der Konstanten' erhält man folgende spezielle Lösung:

$$\xi_0(t) = e^{2\pi izt} \cdot \int_0^t e^{-2\pi izs}\eta(s)\ ds \ .$$

Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung ist

$$C \cdot e^{2\pi iz\,\mathrm{id}} \quad \text{mit} \quad C \in \mathbb{C} \ .$$

Daher ist die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung

$$\xi(t) = \xi_0(t) + C \cdot e^{2\pi izt} = e^{2\pi izt} \cdot \left(C + \int_0^t e^{-2\pi izs}\eta(s)\ ds \right) \ .$$

$\xi \in \mathcal{H}^{(1)}(]0,1[)$ ist offensichtlich. Damit $\xi \in D(P_\alpha)$ ist, muss also

$$C = \xi(0) = \alpha\xi(1) = \alpha e^{2\pi iz} \left(C + \int_0^1 e^{-2\pi izs}\eta(s)\ ds \right) \ ,$$

d.h.

$$C\left(1 - \alpha e^{2\pi iz}\right) = \alpha \cdot \int_0^1 e^{-2\pi izs}\eta(s)\ ds$$

gelten. Diese Gleichung ist lösbar, falls $z \notin -\vartheta + \mathbb{Z} = \mathrm{Sp}_p\, P_\alpha$, d.h. in diesem Fall gibt es eine Lösung in $D(P_\alpha)$, die dann notwendigerweise eindeutig ist. Damit ist $\mathrm{Sp}_p\, P_\alpha = \mathrm{Sp}\, P_\alpha$.

(c) Da die $e^{2\pi iz\cdot \mathrm{id}} = e^{2\pi i\vartheta\cdot \mathrm{id}} \cdot e^{2\pi ik\cdot \mathrm{id}}$ Eigenvektoren zu paarweise verschiedenen Eigenwerten sind, sind sie orthogonal. Da sie auch ein totales System bilden, ist

$$\mathbf{L}^2([0,1]) = \boxplus_{z\in\vartheta+\mathbb{Z}} \mathbb{C} \cdot e^{2\pi iz\,\mathrm{id}}$$

und mit (a) folgt

$$P_\alpha\xi = \sum_{z\in\vartheta+\mathbb{Z}} z \cdot \left(e^{2\pi iz\,\mathrm{id}}\middle|\, \xi\right) \cdot e^{2\pi iz\,\mathrm{id}} .$$

In der Tat: Es gilt durch partielle Integration

$$\left(e^{2\pi iz\,\mathrm{id}}\middle|\, \partial\!\!\!/\xi\right) = z\int_0^1 e^{-2\pi izt}\xi(t)\,dt = z\left(e^{2\pi iz\,\mathrm{id}}\middle|\, \xi\right)$$

und da $\partial\!\!\!/\xi \in \mathbf{L}^2([0,1])$ konvergiert nach Parseval die Reihe

$$\sum_{z\in\vartheta+\mathbb{Z}} \left(e^{2\pi iz\,\mathrm{id}}\middle|\, \partial\!\!\!/\xi\right) \cdot e^{2\pi iz\,\mathrm{id}} = \sum_{z\in\vartheta+\mathbb{Z}} z \cdot \left(e^{2\pi iz\,\mathrm{id}}\middle|\, \xi\right) \cdot e^{2\pi iz\,\mathrm{id}} \quad \text{in} \quad \mathbf{L}^2([0,1]) .$$

Da P_α abgeschlossen ist, folgt die Behauptung durch gliedweise Anwendung von P_α .