# Chapitre 3

# APPLICATIONS LINÉAIRES

# ET

# SEMI-DUALITÉ

**Dans tout ce qui suit $F$ et $G$ désignerons des espaces localement convexes.**

Version du 17 octobre 2004

## 3.1 Espaces d'applications linéaires

**DEFINITION 1** Nous désignerons par $L(F,G)$ le sous-espace vectoriel de $G^F$ formé des applications linéaires de $F$ dans $G$ et par $\mathcal{L}(F,G)$ l'ensemble des applications linéaires continues de $F$ dans $G$ .

**LEMME** *$\mathcal{L}(F,G)$ est un sous-espace vectoriel de $L(F,G)$ .*

C'est immédiate par le théorème et le corollaire 2.2, car pour tout $S,T \in \mathcal{L}(F,G)$ , $\alpha \in \mathbb{K}$ et toute semi-norme continue $q$ sur $G$ , on a

$$q \circ (\alpha \cdot S) = \alpha \cdot q \circ S$$

et

$$q \circ (S+T) \leqslant q \circ S + q \circ T \leqslant 2 \cdot \max(q \circ S, q \circ T) \ .$$

$\square$

**DEFINITION 2** Etant donné des semi-normes $p$ et $q$ sur $F$ et $G$ respectivement, on considère sur $L(F,G)$ la fonctionnelle

$$T \longmapsto \|T\|_{p,q} := \sup_{\varphi \in F, p(\varphi) \leqslant 1} q(T\varphi) \in \overline{\mathbb{R}}_+ \ .$$

Elle est évidemment sous-linéaire et, si $\|T\|_{p,q} < \infty$ , on a

$$q(T\varphi) \leqslant \|T\|_{p,q} \cdot p(\varphi) \quad \text{pour tout } \varphi \in F$$

par le lemme 2.2.

**LEMME** *Soit $T \in L(F,G)$ . Pour que $T \in \mathcal{L}(F,G)$ , il faut et il suffit que, pour toute semi-norme continue $q$ sur $G$ , il existe une semi-norme continue $p$ sur $F$ telle que $\|T\|_{p,q} < \infty$ .*

**REMARQUE 1** En posant $L^{p,q}(F,G) := \left\{T \in L(F,G) \ \middle|\ \|T\|_{p,q} < \infty\right\}$ et en désignant par $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ l'ensemble des semi-normes continues sur $F$ et respectivement $G$ , on a donc

$$\mathcal{L}(F,G) = \bigcap_{q \in \mathcal{Q}} \left[\bigcup_{p \in \mathcal{P}} L^{p,q}(F,G)\right] \ .$$

Ceci montre la nature complexe de $\mathcal{L}(F,G)$ et qu'il n'est pas évident de le munir d'une structure d'espace localement convexe canonique liée directement à celles de $F$ et $G$ . En fait on peut munir cet espace de différentes topologies localement convexes, chacune liée à un certain type de problème (cf. 3.16).

Nous aurons essentiellement besoin de la topologie assez grossière suivante :

**DEFINITION 3** On désigne par $\mathcal{L}_s(F,G)$ et $L_s(F,G)$ les espaces localement convexes obtenus en restreignant la topologie de $G^F$ de la convergence simple sur $F$ . Ils sont définis par les semi-normes

$$T \longmapsto q(T\varphi) \quad \text{pour } \varphi \in F \text{ et } q \text{ semi-norme continue sur } G$$

(cf. exemple 2.3.3).

Une suite $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $T$ dans ces espaces si, et seulement si, pour tout $\varphi \in F$ , la suite $(T_k\varphi)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $T\varphi$ dans $G$ .

**PROPOSITION** *Si $G$ est séparé, alors $\mathcal{L}_s(F,G)$ et $L_s(F,G)$ le sont aussi.*

Etant donné $T \in L_s(F,G) \setminus \{0\}$ , il existe $\varphi \in F$ tel que $T\varphi \neq 0$ , donc une semi-norme continue $q$ sur $G$ telle que $q(T\varphi) \neq 0$ par la proposition 2.5. □

**DEFINITION 4** Une partie $B$ de $F$ est dite *bornée* si toute semi-norme continue $p$ sur $F$ est bornée sur $B$ , i.e. $\sup p(B) < \infty$ . Une partie bornée de $\mathcal{L}_s(F,G)$ est dite *simplement bornée* .

**REMARQUE 2** Dans l'étude de certaines classes d'applications linéaires on pourrait s'intéresser au sous-espace vectoriel

$$\bigcup_{p\in\mathcal{P}}\left[\bigcap_{q\in\mathcal{Q}} L^{p,q}(F,G)\right] \subset \mathcal{L}(F,G)$$

formé des applications linéaires $T$ de $F$ dans $G$ telles que pour une semi-norme continue $p$ sur $F$ la partie $T(\{p \leqslant 1\})$ soit bornée dans $G$ (définition 4 ci-dessous) ; on dit que $T$ est bornée sur un voisinage de 0 de $F$ .

Mais aussi à l'espace vectoriel $\mathcal{L}^b(F,G)$ des applications linéaires bornées, i.e. telles que l'image de toutes parties bornées de $F$ soit bornées dans $G$ . On a

$$\mathcal{L}(F,G) \subset \mathcal{L}^b(F,G) \ .$$

**THEOREME (de la majoration uniforme)** *On suppose que $F$ est tonnelé. Si $\mathcal{T}$ est une partie simplement bornée de $\mathcal{L}_s(F,G)$ , i.e. pour tout $\varphi \in F$ , l'ensemble*

$$\mathcal{T}(\varphi) := \{T\varphi \mid T \in \mathcal{T}\}$$

*est borné dans $G$ , la fonction*

$$p : \varphi \longmapsto \sup q \circ \mathcal{T}(\varphi) : F \longrightarrow \mathbb{R}$$

*est une semi-norme continue sur $F$ telle que*

$$q(T\varphi) \leqslant p(\varphi) \quad \textit{pour tout } T \in \mathcal{T} \textit{ et } \varphi \in F \ .$$

C'est immédiat par le scolie 2.13, puisque chaque $q \circ T$ , pour $T \in \mathcal{T}$ , est une semi-norme continue sur $F$ . □

**THEOREME (de Banach-Steinhaus)** *On suppose que $F$ est tonnelé. Si $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de $\mathcal{L}(F,G)$ telle que, pour tout $\varphi \in F$ ,*

$$T\varphi := \lim_k T_k\varphi \quad \textit{existe dans } G \ ,$$

*alors $T : F \longrightarrow G$ est une application linéaire continue et $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $T$ dans $\mathcal{L}_s(F,G)$ .*

*Si $G$ séquentiellement complet, alors $\mathcal{L}_s(F,G)$ est séquentiellement complet.*

Il est clair que $T : F \longrightarrow G$ est une application linéaire. Si $q$ est une semi-norme continue sur $G$ , alors

$$q\circ T(\varphi) = q(T\varphi) = \lim_k q(T_k\varphi) \leqslant \sup_k q(T_k\varphi) = \sup_k q\circ T_k(\varphi) < \infty \ .$$

Mais chaque $q\circ T_k$ est une semi-norme continue, puisque $T_k$ est continue, donc $\sup_k q\circ T_k$ en est aussi une par le scolie 2.13. Ceci montre que $q\circ T$ est continue et prouve que $T$ est continue. On a évidemment

$$q(T\varphi) = \lim_k q(T_k\varphi) \quad \text{pour tout } \varphi\in F \ ,$$

donc $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $T$ dans $\mathcal{L}_s(F,G)$ .

Si $G$ est séquentiellement complet et $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $\mathcal{L}_s(F,G)$ , pour tout $\varphi\in F$ , la suite $(T_k\varphi)_{k\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $G$ , ce qui permet de définir

$$T\varphi := \lim_k T_k\varphi \in G \ ,$$

d'où le résultat. □

**REMARQUE 3** Tout ce qui précède est encore valable en remplaçant linéaire par semi-linéaire.

**DEFINITION 5** On dit que l'espace vectoriel $F^* := L(F,\mathbb{K})$ des formes linéaires sur $F$ est le *dual algébrique* de $F$ et que l'espace vectoriel $F' := \mathcal{L}(F,\mathbb{K})$ des formes linéaires continues sur $F$ est le *dual (topologique)* de $F$ .

L'espace vectoriel de toutes les formes semi-linéaires sur $F$ , le *semi-dual algébrique* de $F$ , sera noté $F^{\circledast}$ , celui de toutes celles qui sont continues, le *semi-dual (topologique)* de $F$ , par $F^{\dagger}$ .

Nous munirons **toujours** $F^*$ , $F'$ , $F^{\circledast}$ et $F^{\dagger}$ de la topologie de la convergence simple sur $F$ ; s'il faut préciser nous les désignerons par $F^*_\sigma$ , $F'_\sigma$ , $F^{\circledast}_\sigma$ et $F^{\dagger}_\sigma$ respectivement. On dit que cette topologie est la *topologie faible* sur $F^*$ , respectivement $F'$ , $F^{\circledast}$ et $F^{\dagger}$ ; elle est définie par les semi-normes

$$\mu \longmapsto |\mu(\varphi)| \quad \text{pour } \varphi\in F \ .$$

On dit que $F'$ et $F^{\dagger}$ sont le dual respectivement le semi-dual *faible* de $F$ .

**COROLLAIRE** *Les espaces localement convexes $F^*_\sigma$ , $F'_\sigma$ , $F^{\circledast}_\sigma$ et $F^{\dagger}_\sigma$ sont séparés. Si $F$ est tonnelé, alors $F'_\sigma$ et $F^{\dagger}_\sigma$ sont séquentiellement complet.*

**APPLICATION** *Si $f$ est une fonction $\mu$-modérée telle que $\varphi\cdot f\in \mathbf{L}^1(\mu)$ pour tout $\varphi\in \mathbf{L}^2(\mu)$ , alors $f\in\mathbf{L}^2(\mu)$ .*

Pour tout $K \in \mathfrak{K}(X)$ , la fonction $1_K \cdot f$ est $\mu$-mesurable par le théorème 15.9 du cours d'Analyse [17]. Soit $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de parties $\mu$-intégrables telles que $f$ s'annule hors de $\bigcup A_k$ et posons

$$B_k := \{|f| \leqslant k\} \cap A_k \ .$$

La forme semi-linéaire

$$\varphi \longmapsto \int_{B_k} \overline{\varphi} \cdot f \, d\mu : \mathbf{L}^2(\mu) \longrightarrow \mathbb{K}$$

est continue, puisque par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$\left|\int_{B_k} \overline{\varphi} \cdot f \, d\mu\right|^2 \leqslant \left(\int |\varphi|^2 \, d\mu\right) \cdot \left(\int 1_{B_k} \cdot |f|^2 \, d\mu\right) \leqslant k^2 \cdot \mu(B_k) \cdot \|\varphi\|_2^2 \ .$$

Mais comme

$$|1_{B_k} \cdot \overline{\varphi} \cdot f| \leqslant |\varphi \cdot f| \in \mathbf{L}^1(\mu) \quad \text{pour tout } k \in \mathbb{N} \ ,$$

le théorème de la convergence dominée de Lebesgue montre que

$$\int \overline{\varphi} \cdot f \, d\mu = \lim\nolimits_k \int_{B_k} \overline{\varphi} \cdot f \, d\mu \quad \text{pour tout } \varphi \in \mathbf{L}^2(\mu) \ .$$

Grâce au théorème de Banach-Steinhaus 3.2, on en déduit que la forme semi-linéaire

$$\varphi \longmapsto \int \overline{\varphi} \cdot f \, d\mu : \mathbf{L}^2(\mu) \longrightarrow \mathbb{K}$$

est continue, donc que $f$ satisfait à la condition du théorème 1.16.ii avec $F = \mathbf{L}^2(\mu)$ . □

**REMARQUE 4** En travaillant avec l'intégration essentielle on peut supprimer l'hypothèse de modération.

En effet on a

$$\int |\overline{\varphi} \cdot f| \, d\mu = \sup\nolimits_{K\in\mathfrak{K}(X),l\in\mathbb{N}} \int_{K_l} |\overline{\varphi} \cdot f| \, d\mu$$

en ayant posé $K_l := K \cap \{|f| \leqslant l\}$ (cf. cours d'Analyse [17], remarque 15.12). Mais

$$\left(\int_{K_l} |\overline{\varphi} \cdot f| \, d\mu\right)^2 \leqslant \left(\int |\varphi|^2 \, d\mu\right) \cdot \left(\int 1_{K_l} \cdot |f|^2 \, d\mu\right) \leqslant l^2 \cdot \mu(K_l) \cdot \|\varphi\|_2^2 \ ,$$

ce qui montre que $\varphi \longmapsto \int_{K_l} |\overline{\varphi} \cdot f| \, d\mu$ est une semi-norme continue sur $\mathbf{L}^2(\mu)$ . Le scolie 2.13 prouve alors qu'il en est de même de $\varphi \longmapsto \sup_{K\in\mathfrak{K}(X),l\in\mathbb{N}} \int_{K_l} |\overline{\varphi} \cdot f| \, d\mu$ , puisque $\mathbf{L}^2(\mu)$ est tonnelé (cf. exemple 2.13.1), donc que $\varphi \longmapsto \int_{K_l} \overline{\varphi} \cdot f \, d\mu$ est une forme semi-linéaire continue. □

## 3.2 Espaces normés d'applications linéaires

Dans le cas des espaces normés, on peut considérer la fonctionnelle sous-linéaire suivante :

**DEFINITION 1** Soient $F$ et $G$ des espaces normés. Pour tout $T \in L(F,G)$ , on pose

$$\|T\| := \|T\|_{\|\cdot\|_F,\|\cdot\|_G} = \sup_{\varphi\in F,\|\varphi\|_F\leqslant 1} \|T\varphi\|_G \in \overline{\mathbb{R}}_+ \ .$$

Cf. définition 3.1.2. Rappelons que $\|T\|$ est la plus petite des constantes $M \in \overline{\mathbb{R}}_+$ satisfaisant à l'inégalité fondamentale

$$\|T\varphi\|_G \leqslant M \cdot \|\varphi\|_F \quad \text{pour tout } \varphi \in F$$

(cf. lemme 2.2). On a évidemment $T \in \mathcal{L}(F,G)$ si, et seulement si, $\|T\| < \infty$ . Dans ce cas on dit que $T$ est un *opérateur borné* .

On vérifie immédiatement que $\|\cdot\|$ est une norme sur $\mathcal{L}(F,G)$ .

**DEFINITION 2** L'espace $\mathcal{L}(F,G)$ ainsi normé est désigné par $\mathcal{L}_b(F,G)$; on dit que sa topologie est la *topologie de la convergence bornée* .

On dit que $F'_\beta := \mathcal{L}_b(F,\mathbb{K})$ est le *dual fort* de $F$ . Sa norme est définie par

$$\mu \longmapsto \|\mu\| := \|\mu\|_{\|\cdot\|_F,|\cdot|} := \sup_{\varphi\in F,\|\varphi\|_F\leqslant 1} |\mu(\varphi)| \ .$$

On définit de même le semi-dual fort $F^\dagger_\beta$ de $F$ .

Une suite $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{L}(F,G)$ converge vers $T$ dans $\mathcal{L}_b(F,G)$ si, et seulement si, elle converge uniformément sur toute partie bornée, en particulier toute boule, de $F$ .

En effet si $B$ est une partie bornée de $F$ , il existe $r \in \mathbb{R}^*_+$ tel que $B \subset B(0,r)$ et on a

$$\|T\|_{\infty,B} \leqslant \|T\|_{\infty,B(0,r)} \leqslant r \cdot \|T\| \ .$$

□

**PROPOSITION** *Si $G$ est un espace de Banach, il en est de même de $\mathcal{L}_b(F,G)$ .*

*En particulier, le dual fort de tout espace normé est un espace de Banach.*

La démonstration est complètement analogue à celle faite pour démontrer que $\ell^\infty(X)$ est complet. Elle est donc laissée en exercice. □

Voici maintenant la reformulation du

**THEOREME (de la majoration uniforme)** *Si $F$ est un espace de Banach et*

$$\mathcal{T} \subset \mathcal{L}(F,G)$$

*un ensemble simplement borné, i.e. borné dans $\mathcal{L}_s(F,G)$ , ce qui signifie que*

$$\sup \|\mathcal{T}\varphi\| < \infty \quad \textit{pour tout } \varphi \in F \ .$$

*alors $\mathcal{T}$ est uniformément borné, i.e. borné dans $\mathcal{L}_b(F,G)$ , ce qui signifie que*

$$\sup \|\mathcal{T}\| < \infty \ .$$

En effet $\varphi \longmapsto \sup \|\mathcal{T}\varphi\|$ est une semi-norme continue sur $F$ par le théorème de la majoration uniforme 3.1. Il existe donc une constante $M \in \mathbb{R}_+$ telle que

$$\sup \|\mathcal{T}\varphi\| \leqslant M \cdot \|\varphi\| \quad \text{pour tout } \varphi \in F \ ,$$

et on obtient

$$\sup \|\mathcal{T}\| = \sup_{T\in\mathcal{T}} \left(\sup_{\varphi\in F,\|\varphi\|\leqslant 1} \|T\varphi\|\right) \leqslant M < \infty \ .$$

□

**THEOREME (de Banach-Steinhaus)** *Si $F$ est un espace de Banach et $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{L}(F,G)$ qui converge simplement vers $T \in L(F,G)$ , alors $T$ est continue et*

$$\|T\| \leqslant \liminf_k \|T_k\| \leqslant \sup_k \|T_k\| < \infty \ .$$

En effet, par le théorème de la majoration uniforme, on a

$$\|T\varphi\| = \lim_k \|T_k\varphi\| \leqslant \liminf_k \|T_k\| \cdot \|\varphi\| \leqslant \sup_k \|T_k\| < \infty$$

pour tout $\varphi \in F$ tel que $\|\varphi\| \leqslant 1$ , puisque $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est évidemment simplement bornée. □

## 3.3 Opérateurs à noyaux dans $\mathcal{C}^b$

**Cas simple** Soient $[a,b]$ un intervalle compact de $\mathbb{R}$ et $\varkappa : [a,b]^2 \longrightarrow \mathbb{K}$ . On dit que $\varkappa$ est un *noyau* . Supposons que $\varkappa$ est une fonction continue. Pour tout $\gamma \in \mathcal{C}([a,b])$ , on pose

$$K\gamma(x) := \int_a^b \varkappa(x,y) \cdot \gamma(y)\ dy\ .$$

La fonction $K\gamma$ est continue. En effet si $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de $[a,b]$ qui converge vers $x$ , alors

$$\lim_k \varkappa(x_k,\cdot) \cdot \gamma = \varkappa(x,\cdot) \cdot \gamma \quad \text{ponctuellement sur } [a,b]$$

et

$$|\varkappa(x_k,\cdot) \cdot \gamma| \leqslant \|\varkappa\|_\infty \cdot \|\gamma\|_\infty \cdot 1 \in \mathbf{L}^1([a,b])\ ,$$

puisque $\varkappa$ et $\gamma$ sont continues. Par le théorème de la convergence dominée de Lebesgue on obtient

$$\lim_k K\gamma(x_k) = \lim_k \int_a^b \varkappa(x_k,y) \cdot \gamma(y)\ dy = \int_a^b \lim_k \varkappa(x_k,y) \cdot \gamma(y)\ dy =$$

$$= \int_a^b \varkappa(x,y) \cdot \gamma(y)\ dy = K\gamma(x)\ .$$

Ceci montre que l'on peut définir une application

$$K : \gamma \longmapsto K\gamma : \mathcal{C}([a,b]) \longrightarrow \mathcal{C}([a,b])\ .$$

Elle est évidemment linéaire. Estimons $\|K\|$ . Pour tout $\gamma \in \mathcal{C}([a,b])$ , on a

$$\|K\gamma\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} \left|\int_a^b \varkappa(x,y) \cdot \gamma(y)\ dy\right| \leqslant \|\gamma\|_\infty \cdot \sup_{x\in[a,b]} \int_a^b |\varkappa(x,y)|\ dy\ ,$$

donc

$$\|K\| \leqslant \sup_{x\in[a,b]} \int_a^b |\varkappa(x,y)|\ dy < \infty\ .$$

Ceci montre aussi que $K$ est une application linéaire continue de $\mathcal{C}([a,b])$ dans lui-même. On dit que c'est un *opérateur intégral* , ou un *opérateur à noyau* , ou encore un *opérateur de Fredholm* .

Nous allons maintenant montrer que l'on a

$$\|K\| = \sup_{x\in[a,b]} \int_a^b |\varkappa(x,y)|\ dy < \infty\ .$$

Soit $\xi \in [a,b]$ un point où la fonction continue $\int_a^b |\varkappa(\cdot,y)|\ dy$ atteint son maximum. Considérons pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ , la fonction continue

$$\gamma_k := \frac{\overline{\varkappa(\xi,\cdot)}}{|\varkappa(\xi,\cdot)| + \frac{1}{k}}\ .$$

On a $\|\gamma_k\|_\infty \leqslant 1$ et $\lim_k \varkappa(\xi,\cdot)\cdot\gamma_k = |\varkappa(\xi,\cdot)|$ ponctuellement sur $[a,b]$ . Par le théorème de Lebesgue on obtient

$$\int_a^b |\varkappa(\xi,y)|\ dy = \left|\lim_k \int_a^b \varkappa(\xi,y)\cdot\gamma_k(y)\ dy\right| \leqslant \lim_k |K\gamma_k(\xi)| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_k \|K\gamma_k\|_\infty \leqslant \sup_k \|K\|\cdot\|\gamma_k\|_\infty \leqslant \|K\| \ ,$$

donc

$$\|K\| = \int_a^b |\varkappa(\xi,y)|\ dy \ .$$

**Cas général** Soient $X$ un espace métrique, $Y$ un espace complétement régulier, $\varkappa : X\times Y \longrightarrow \mathbb{K}$ un noyau et $\nu$ une intégrale de Radon sur $Y$ . On fait les hypothèses suivantes :

(a) Pour tout $x\in X$ , on a $\varkappa(x,\cdot)\in\mathbf{L}^1(\nu)$ .
Si $\gamma\in\mathcal{C}^b(Y)$ , on peut alors définir

$$K\gamma(x) := \int \varkappa(x,y)\cdot\gamma(y)\ d\nu(y) \quad \text{pour tout } x\in X \ .$$

(b) Pour tout $\xi\in X$ , il existe une partie $\nu$-négligeable $N_\xi$ de $Y$ telle que $\varkappa(\cdot,y)$ soit continue en $\xi$ pour tout $y\notin N_\xi$ .

(c) Pour tout $\xi\in X$ , il existe un voisinage $V_\xi$ de $\xi$ dans $X$ et une fonction $g_\xi\in\mathbf{L}^1_+(\nu)$ tels que, pour tout $x\in V_\xi$ , on ait

$$|\varkappa(x,\cdot)| \leqslant g_\xi \quad \nu\text{-p.p.}$$

Si $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de $V_\xi$ convergente vers $\xi$ , alors on a

$$\lim_k \varkappa(x_k,y)\cdot\gamma(y) = \varkappa(\xi,y)\cdot\gamma(y) \quad \text{pour tout } y\notin N_\xi$$

et

$$|\varkappa(x_k,\cdot)\cdot\gamma| \leqslant \|\gamma\|_\infty\cdot g_\xi \quad \nu\text{-p.p.} \ ,$$

ce qui nous permet d'appliquer le théorème de la convergence dominée de Lebesgue :

$$\lim_k K\gamma(x_k) = \lim_k \int \varkappa(x_k,y)\cdot\gamma(y)\ d\nu(y) = \int \varkappa(\xi,y)\cdot\gamma(y)\ d\nu(y) = K\gamma(\xi) \ .$$

On a donc $K\gamma\in\mathcal{C}(X)$ et

$$K : \mathcal{C}^b(Y) \longrightarrow \mathcal{C}(X) : \gamma \longmapsto K\gamma$$

est une application linéaire.

(d) $$M := \sup_{x\in X} \int |\varkappa(x,y)|\ d\nu(y) < \infty \ .$$

On a alors

$$\|K\gamma\|_\infty = \sup_{x\in X}\left|\int \varkappa(x,y)\cdot\gamma(y)\ d\nu(y)\right| \leqslant M\cdot\|\gamma\|_\infty \ ,$$

donc $K\gamma\in\mathcal{C}^b(X)$ et $\|K\|\leqslant M$ , i.e. $K : \mathcal{C}^b(Y) \longrightarrow \mathcal{C}^b(X)$ est une application linéaire continue.

Les mêmes méthodes permettent de définir des opérateurs à noyaux par exemple entre les espaces $\mathbf{L}^p$ .

**EXERCICE 1** On peut montrer, en approximant $\operatorname{sgn}(\varkappa(\xi, \diamond))$ par une suite de fonctions continues bornées sur $Y$ (densité de $\mathcal{C}^b(Y)$ dans $\mathbf{L}^1(|\varkappa(\xi, \diamond)| \cdot \nu)$ et théorème de Riesz-Fischer) que $\|K\| = M$ .

**EXERCICE 2** La diagonale

$$\Delta := \{(x, y) \in [a, b]^2 \mid x = y\}$$

divise $[a, b]^2$ en deux triangles

$$D_1 := \{(x, y) \in [a, b]^2 \mid x > y\}$$

et

$$D_2 := \{(x, y) \in [a, b]^2 \mid x < y\} \ .$$

Soit $\varkappa : [a, b]^2 \longrightarrow \mathbb{K}$ une fonction dont la restriction à chacun des deux triangles se prolonge par continuité sur la diagonale, i.e. il existe des fonctions continues $\varkappa_j : D_j \cup \Delta \longrightarrow \mathbb{K}$ telles que $\varkappa_j|_{D_j} = \varkappa|_{D_j}$ pour $j = 1, 2$ .

Montrer que

$$Kf(x) := \int_a^b \varkappa(x, y) \cdot f(y)\, dy$$

définit une application linéaire continue $K$ dans $\mathcal{C}([a, b])$ .

## 3.4 Dualité et semi-dualité

Rappelons que le dual $F'$ , respectivement le semi-dual $F^{\dagger}$ , de $F$ est l'espace vectoriel des formes linéaires, resp. semi- linéaires, continues sur $F$ . Le cas purement algébrique, qui consiste à considérer le dual algébrique $F^{*}$ ou le semi-dual algébrique $F^{\circledast}$ , s'obtient en munissant $F$ de la topologie localement convexe la plus fine (cf. exemple 2.10.4).

Pour tout $\varphi \in F$ , nous poserons

$$\langle \varphi, \mu \rangle_F := \mu(\varphi) \quad \text{si } \mu \in F' \qquad \text{et} \qquad \langle \varphi | \, \mu \rangle_F := \mu(\varphi) \quad \text{si } \mu \in F^{\dagger}.$$

Les fonctions

$$(\varphi, \mu) \longmapsto \langle \varphi, \mu \rangle_F : F \times F' \longrightarrow \mathbb{K} \qquad \text{et} \qquad (\varphi, \mu) \longmapsto \langle \varphi | \, \mu \rangle_F : F \times F^{\dagger} \longrightarrow \mathbb{K}$$

sont respectivement bilinéaire et sesquilinéaire.

Nous pouvons également poser

$$\langle \mu, \varphi \rangle_{F'} := \mu(\varphi) \quad \text{si } \mu \in F' \qquad \text{et} \qquad \langle \mu | \, \varphi \rangle_{F^{\dagger}} := \overline{\mu(\varphi)} \quad \text{si } \mu \in F^{\dagger} \; .$$

Les fonctions

$$(\mu, \varphi) \longmapsto \langle \mu, \varphi \rangle_{F'} : F' \times F \longrightarrow \mathbb{K} \qquad \text{et} \qquad (\mu, \varphi) \longmapsto \langle \mu | \, \varphi \rangle_{F^{\dagger}} : F^{\dagger} \times F \longrightarrow \mathbb{K}$$

sont respectivement bilinéaire et sesquilinéaire.

Ceci nous conduit à poser la

**DEFINITION 1** On dit qu'une forme bilinéaire ou sesquilinéaire $\mathfrak{s} : F \times G \longrightarrow \mathbb{K}$ définit une *dualité* $\langle F, G \rangle_{\mathfrak{s}}$ , respectivement une *semi-dualité* $\langle F | \, G \rangle_{\mathfrak{s}}$ , ou bien que $F$ et $G$ sont en dualité, ou en semi-dualité, par $\mathfrak{s}$ . On écrit aussi

$$\langle \varphi, \gamma \rangle_{\mathfrak{s}} := \mathfrak{s}(\varphi, \gamma) \quad , \text{resp.} \quad \langle \varphi | \, \gamma \rangle_{\mathfrak{s}} := \mathfrak{s}(\varphi, \gamma) \quad \text{pour tout } \varphi \in F \text{ et } \gamma \in G \; .$$

On supprime l'indice $\mathfrak{s}$ si aucune confusion n'en résulte. Nous ne traiterons dorénavant que le cas de la semi-dualité, celui-ci étant le plus important pour la suite.

Nous avons défini ci-dessus les semi-dualités $\left\langle F \middle| \, F^{\dagger} \right\rangle$ et $\left\langle F^{\dagger} \middle| \, F \right\rangle$ . De manière générale on a la

**DEFINITION 2** La semi-dualité $\langle G | \, F \rangle$ est définie en posant

$$\langle \gamma | \, \varphi \rangle := \overline{\langle \varphi | \, \gamma \rangle} \quad \text{pour tout } \varphi \in F \text{ et } \gamma \in G \; .$$

Pour tout $\varphi \in F$ , soit

$$\langle \varphi | : \gamma \longmapsto \langle \varphi | \, \gamma \rangle : G \longrightarrow \mathbb{K} \; .$$

C'est une forme linéaire sur $G$ , i.e. $\langle \varphi | \in G^{*}$ .

Pour tout $\gamma \in G$ , soit

$$| \gamma \rangle : \varphi \longmapsto \langle \varphi | \, \gamma \rangle : F \longrightarrow \mathbb{K} \; .$$

C'est une forme semi-linéaire sur $F$ , i.e. $| \gamma \rangle \in F^{\circledast}$ .

**DEFINITION 3** On dit que les topologies localement convexes définies respectivement par les familles de semi-normes $\left(|\,|\gamma\rangle|\right)_{\gamma\in G}$ sur $F$ et $\left(|\,\langle\varphi||\right)_{\varphi\in F}$ sur $G$ , sont les *topologies faibles* sur $F$ et $G$ (par rapport à la semi-dualité $\langle F|\, G\rangle$ ) ; on les désignent par $\sigma(F,G)$ et $\sigma(G,F)$ , les espaces localement convexes correspondants par $F_\sigma$ et $G_\sigma$ .

Cette semi-dualité est dite *séparante à gauche* si

$$\varphi\in F \text{ et } \langle\varphi|\,\gamma\rangle = 0 \quad \text{pour tout } \gamma\in G \quad \Longrightarrow \quad \varphi = 0\ ,$$

i.e. si l'application semi-linéaire

$$\langle\cdot| : \varphi\longmapsto\langle\varphi| : F\longrightarrow G^* \quad \text{est injective,}$$

ou encore si $\sigma(F,G)$ est séparée (proposition 2.5).

On dit qu'elle est *séparante à droite* si

$$\gamma\in G \text{ et } \langle\varphi|\,\gamma\rangle = 0 \quad \text{pour tout } \varphi\in F \quad \Longrightarrow \quad \gamma = 0\ ,$$

i.e. si l'application linéaire

$$|\cdot\rangle : \gamma\longmapsto|\gamma\rangle : G\longrightarrow F^{\circledast} \quad \text{est injective,}$$

ou encore si $\sigma(G,F)$ est séparée.

On dit qu'elle est *séparante* si elle est séparante à gauche et à droite.

**REMARQUE 1** Dans ce cas on identifie $\varphi$ avec $\langle\varphi|$ et $\gamma$ avec $|\gamma\rangle$ . Les physiciens disent que $\langle\varphi|$ est un *vecteur bra* et $|\mu\rangle$ est un *vecteur ket* , puisque $\langle\varphi|\,\gamma\rangle$ est une "bracket" . Cette notation permettant de distinguer $\langle\varphi|$ et $\langle\gamma|$ comme des formes linéaires sur $G$ et $F$ , ainsi que $|\gamma\rangle$ et $|\varphi\rangle$ comme des formes semi-linéaires sur $F$ et $G$ en considérant respectivement les semi-dualités $\langle F|\,G\rangle$ et $\langle G|\,F\rangle$ , est à la base du formalisme de Dirac (cf. 5.19).

**EXEMPLE 1** La semi-dualité $\left\langle F|\,F^\dagger\right\rangle$ définie au début de ce paragraphe est séparante à droite, puisque la forme semi-linéaire $\mu$ est nulle si, et seulement si, pour tout $\varphi\in F$, on a $\langle\varphi|\,\mu\rangle_F = 0$ . En fait $\mu = |\mu\rangle$ ! La topologie faible $\sigma\left(F^\dagger,F\right)$ est évidemment la même que celle de la définition 3.1.5. Si $p$ est une semi-norme sur $F$ , pour tout $\mu\in F^\dagger$ , nous poserons (cf. définition 3.1.2)

$$\|\mu\|_p := \|\mu\|_{p,|\cdot|} := \sup\nolimits_{\varphi\in F,p(\varphi)\leqslant 1}|\langle\varphi|\,\mu\rangle| \in \overline{\mathbb{R}}_+\ .$$

Grâce au lemme 2.2, si $\|\mu\|_p < \infty$ on a

$$|\langle\varphi|\,\mu\rangle| \leqslant p(\varphi)\cdot\|\mu\|_p \quad \text{pour tout } \varphi\in F \text{ et } \mu\in F^\dagger\ .$$

Nous dirons que c'est l' *inégalité de Hölder abstraite* .

Dire que la semi-dualité $\left\langle F|\,F^\dagger\right\rangle$ est séparante à gauche signifie que, pour tout $\varphi\in F$ , il existe une forme semi-linéaire continue sur $F$ telle que $\mu(\varphi) = \langle\varphi|\,\mu\rangle_F \neq 0$ . Le théorème de Hahn-Banach (cf. théorème 3.6) répondra à la question : elle est séparante à gauche si, et seulement si, $F$ est séparé.

**EXEMPLE 2** Si $\mu\in F^\dagger$ , alors

$$\langle\mu| : F\longrightarrow\mathbb{K} : \varphi\longmapsto\langle\mu|\,\varphi\rangle_{F^\dagger} = \overline{\langle\varphi|\,\mu\rangle_F}$$

est la forme linéaire canonique associée à la forme semi-linéaire $|\mu\rangle$ et

$$|\mu\rangle\longmapsto\langle\mu| : F^\dagger\longrightarrow F'$$

est une bijection semi-linéaire.

**EXEMPLE 3** Soit $\overline{\diamond} : F \longrightarrow F$ une *involution* , i.e. une application semi-linéaire dont le carré est l'identité :

$$\overline{\alpha \cdot \varphi} = \overline{\alpha} \cdot \overline{\varphi} \quad , \quad \overline{\varphi + \psi} = \overline{\varphi} + \overline{\psi} \quad \text{et} \quad \overline{\overline{\varphi}} = \varphi \quad \text{pour tout } \alpha \in \mathbb{K} \text{ et } \varphi, \psi \in F \ .$$

Alors

$$(\varphi, \mu) \longmapsto \langle \varphi | \, \mu \rangle_F := \langle \overline{\varphi}, \mu \rangle_F : F \times F' \longrightarrow \mathbb{K}$$

définit une semi-dualité $\langle F | \, F' \rangle$ . Dans ce cas on considère $F'$ comme le semi-dual de $F$ grâce à l'application semi-linéaire

$$F' \longrightarrow F^\dagger : \mu \longmapsto |\mu\rangle : \text{"}\varphi \longmapsto \langle \overline{\varphi}, \mu \rangle = \mu(\overline{\varphi})\text{"} \ .$$

L'involution duale est définie par

$$\langle \varphi | \, \overline{\mu} \rangle := \overline{\langle \overline{\varphi} | \, \mu \rangle} \quad \text{pour tout } \varphi \in F \text{ et } \mu \in F^\dagger \ .$$

**EXEMPLE 4** Soient $X$ un espace topologique séparé, $\mu$ une intégrale de Radon sur $X$ et $p, q \in [1, \infty]$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . On définit une semi-dualité $\langle \mathbf{L}^p(\mu) | \, \mathbf{L}^q(\mu) \rangle$ en posant

$$\langle f | \, g \rangle := \int \overline{f} \cdot g \, d\mu \quad \text{pour tout } f \in \mathbf{L}^p(\mu) \text{ et } g \in \mathbf{L}^q(\mu) \ ,$$

ce qui a un sens puisque $\overline{f} \cdot g \in \mathbf{L}^1(\mu)$ par l'inégalité de Hölder. Elle est séparante.

En effet si $p \neq \infty$ et $f \in \mathbf{L}^p(\mu) \setminus \{0\}$ , la fonction $g := \operatorname{sgn} f \cdot |f|^{p-1} \in \mathbf{L}^q(\mu)$ . C'est évident si $p = 1$ ; si $p \in \, ]1, \infty[$ , on a $(p-1) \cdot q = p$ et

$$\int^* |g|^q \, d\mu = \int^* |f|^{(p-1)q} \, d\mu = \int^* |f|^p \, d\mu < \infty \ .$$

Il vient alors

$$\langle f | \, g \rangle = \int \overline{f} \cdot \operatorname{sgn} f \cdot |f|^{p-1} \, d\mu = \int |f|^p \, d\mu \neq 0 \ .$$

Si $p = \infty$ et $f \in \mathbf{L}^\infty(\mu) \setminus \{0\}$ , il existe une partie $\mu$-intégrable $A$ telle que $\mu(A) > 0$ et $|f| > 0$ $\mu$-p.p. sur $A$ . La fonction $g := 1_A \cdot \operatorname{sgn} f \in \mathbf{L}^1(\mu)$ et

$$\langle f | \, g \rangle = \int_A \overline{f} \cdot \operatorname{sgn} f \, d\mu = \int_A |f| \, d\mu > 0 \ .$$

Nous avons donc démontré que cette semi-dualité est séparante à gauche. Par symétrie elle l'est aussi à droite. □

En particulier si $X = n = \{0, \ldots, n-1\}$ et $\mu = \#$ , on retrouve la semi-dualité séparante $\langle \mathbb{K}^n | \, \mathbb{K}^n \rangle$ définie par

$$\langle x | \, y \rangle = \sum_{j \in n} \overline{x_j} \cdot y_j \quad \text{pour tout } x, y \in \mathbb{K}^n \ .$$

Cette formule montre qu'il est raisonnable de considérer les vecteurs bra et ket comme des vecteurs ligne et respectivement colonne :

$$\langle x | = (\overline{x_j})_{j \in n} \quad , \quad |y\rangle = (y_j)^\intercal_{j \in n} \ .$$

La "bracket" est alors une multiplication matricielle :

$$\langle x|\, y\rangle = (\overline{x_j})_{j\in n}\, (y_j)^{\intercal}_{j\in n} \ .$$

**EXEMPLE 5** Reprenons les notations de l'exemple 1.2.3. On définit une semi-dualité,

$$\left\langle \mathbf{L}^2(\mu,\rho) \middle| \mathbf{L}^2\left(\mu,\frac{1}{\rho}\right)\right\rangle$$

en posant

$$\langle f|\, g\rangle_{\mu,\rho} := \int \bar{f}\cdot g\, d\mu \quad \text{pour tout } f\in \mathbf{L}^2(\mu,\rho) \text{ et } g\in \mathbf{L}^2\left(\mu,\frac{1}{\rho}\right) \ .$$

En effet on a $f=0$ $\mu$-p.p. sur $\{\rho=\infty\}$ , $g=0$ $\mu$-p.p. sur $\left\{\frac{1}{\rho}=\infty\right\}=\{\rho=0\}$ et l'inégalité de Hölder montre que

$$\left(\int^{*}\left|\bar{f}\cdot g\right|\, d\mu\right)^2 = \left(\int^{*}|f|\cdot\sqrt{\rho}\cdot|g|\cdot\frac{1}{\sqrt{\rho}}\, d\mu\right)^2 \leqslant \int^{*}|f|^2\cdot\rho\, d\mu\cdot\int^{*}|g|^2\cdot\frac{1}{\rho}\, d\mu < \infty \ .$$

Attention aux notations, il ne faut pas confondre le produit scalaire $(\cdot|\,\cdot)_{\mu,\rho}$ de $\mathbf{L}^2(\mu,\rho)$ et la semi-dualité $\langle\cdot|\,\cdot\rangle_{\mu,\rho}$ !

L'application

$$M_\rho : f\longmapsto \rho\cdot f : \mathbf{L}^2(\mu,\rho)\longrightarrow \mathbf{L}^2\left(\mu,\frac{1}{\rho}\right)$$

est manisfestement une isométrie, puisque

$$\|\rho\cdot f\|^2_{2,\mu,\frac{1}{\rho}} = \int^{*}|\rho\cdot f|^2\cdot\frac{1}{\rho}\, d\mu = \int^{*}|f|^2\cdot\rho\, d\mu = \|f\|^2_{2,\mu,\rho} \ .$$

Elle est surjective et son inverse est évidemment $M_{\frac{1}{\rho}}$ . Le théorème de représentation de Riesz montre donc que $\mathbf{L}^2\left(\mu,\frac{1}{\rho}\right)$ est isométrique au semi-dual fort de $\mathbf{L}^2(\mu,\rho)$ par $R\circ M_{1/\rho}$ , et en les identifiant, que $M_\rho$ est l'application de Riesz :

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{L}^2(\mu,\rho) \arrow[r, "R"] \arrow[d, "M_\rho"'] & \mathbf{L}^2(\mu,\rho)^{\dagger}_{\beta} \\
\mathbf{L}^2\left(\mu,\frac{1}{\rho}\right) \arrow[ur, "R\circ M_{\frac{1}{\rho}}"'] &
\end{tikzcd} .$$

Nous verrons plus tard qu'il est plus naturel de considérer $\mathbf{L}^2\left(\mu,\frac{1}{\rho}\right)$ comme le semi-dual de $\mathbf{L}^2(\mu,\rho)$ .

**DEFINITION 4** On dit que les deux suites $(\varphi_k)_{k=1,\ldots,n}\subset F$ et $(\mu_l)_{l=1,\ldots,n}\subset F^{\circledast}$ sont *biorthogonales* si

$$\langle\varphi_k|\,\mu_l\rangle_F = \delta_{k,l} \quad \text{pour tout } k,l=1,\ldots,n \ . \tag{$*$}$$

On vérifie immédiatement que ces suites sont linéairement indépendantes.

**LEMME** *Soient $F$ un espace vectoriel, $(\mu_l)_{l=1,\ldots,n} \subset F^{\circledast}$ une suite finie libre de formes semi-linéaires sur $F$ . Alors*

*(i)*

*(a) Il existe une suite finie $(\varphi_k)_{k=1,\ldots,n}$ qui soit biorthogonale avec $(\mu_l)_{l=1,\ldots,n}$ .*

*(b) Pour tout $\mu \in F^{\circledast}$ , on a l'implication*

$$\operatorname{Ker}\mu \supset \bigcap_{j=1}^{n} \operatorname{Ker}\mu_j \quad \Longrightarrow \quad \mu \text{ est une combinaison linéaire des } \mu_j \ .$$

*(ii) Si $H$ un sous-espace vectoriel de $F$ tel que*

$$F = H \oplus \left( \bigcap_{j=1}^{n} \operatorname{Ker}\mu_j \right) \ ,$$

*il existe une unique suite finie $(\varphi_k)_{k=1,\ldots,n} \subset H$ qui soit biorthogonale avec $(\mu_l)_{l=1,\ldots,n}$ .*

*C'est une base de $H$ et tout $\varphi \in H$ s'écrit sous la forme*

$$\varphi = \sum_{j=1}^{n} \left\langle \mu_j \middle| \varphi \right\rangle \cdot \varphi_j \ .$$

**Démonstration de (i)** Remarquons tout d'abord que (a) $\Rightarrow$ (b). Si $(\varphi_k)_{k=1,\ldots,n}$ est une suite biorthogonale avec $(\mu_l)_{l=1,\ldots,n}$ ,

$$\varphi = \sum_{j=1}^{n} \overline{\left\langle \varphi \middle| \mu_j \right\rangle} \cdot \varphi_j + \gamma$$

est l'unique décomposition de $\varphi \in F$ telle que

$$\gamma := \varphi - \sum_{j=1}^{n} \overline{\left\langle \varphi \middle| \mu_j \right\rangle} \cdot \varphi_j \in \bigcap_{j=1}^{n} \operatorname{Ker}\mu_j \ .$$

En particulier

$$F = \left( \bigoplus_{j=1}^{n} \mathbb{K} \cdot \varphi_j \right) \oplus \left( \bigcap_{j=1}^{n} \operatorname{Ker}\mu_j \right) \ .$$

L'assertion (b) est alors immédiate, car si $\mu \in F^{\circledast}$ et $\operatorname{Ker}\mu \supset \bigcap_{j=1}^{n} \operatorname{Ker}\mu_j$ , pour tout $\varphi \in F$ , il vient

$$\langle \varphi | \mu \rangle = \left\langle \sum_{j=1}^{n} \overline{\left\langle \varphi \middle| \mu_j \right\rangle} \cdot \varphi_j \middle| \mu \right\rangle + \langle \gamma | \mu \rangle =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \left\langle \varphi \middle| \mu_j \right\rangle \cdot \left\langle \varphi_j \middle| \mu \right\rangle = \left\langle \varphi \middle| \sum_{j=1}^{n} \left\langle \varphi_j \middle| \mu \right\rangle \cdot \mu_j \right\rangle \ ,$$

donc

$$\mu = \sum_{j=1}^{n} \left\langle \varphi_j \middle| \mu \right\rangle \cdot \mu_j \ .$$

Nous aurons donc prouvé (i) lorsque nous aurons prouvé l'existence d'une suite biorthogonale avec $(\mu_l)_{l=1,\ldots,n}$ , ce qui découle de (ii), puisque $\bigcap_{j=1}^n \operatorname{Ker}\mu_j$ possède un supplémeentaire algébrique : il suffit de compléter une base algébrique de ce sous-espace vectoriel en une base de $F$ .

**Démonstration de (ii)** Elle se fait par récurrence sur $n$ . Le cas $n=0$ est trivial en considérant les suites vides, puisque $\bigcap_{j=1}^0 \operatorname{Ker}\mu_j = F$ , donc $H=\{0\}$ . Supposons que le résultat soit vrai pour $n$ et soient $(\mu_l)_{l=1,\ldots,n+1}$ une suite de formes semi-linéaires libre. Comme $\mu_{n+1}$ n'est pas une combinaison linéaire des $\mu_j$ pour $j=1,\ldots,n$ , grâce à l'hypothèse de récurrence et au fait que (a) entraîne (b), le noyau $\operatorname{Ker}\mu_{n+1}$ ne contient pas $\bigcap_{j=1}^n \operatorname{Ker}\mu_j$ ; il existe donc $\widetilde{\varphi_{n+1}} \in \bigcap_{j=1}^n \operatorname{Ker}\mu_j$ tel que $\left\langle \widetilde{\varphi_{n+1}} \middle| \mu_{n+1} \right\rangle = 1$ , donc tel que $\left\langle \widetilde{\varphi_{n+1}} \middle| \mu_l \right\rangle = \delta_{n+1,l}$ pour tout $l=1,\ldots,n+1$ . Considérons la décomposition $\widetilde{\varphi_{n+1}} = \varphi_{n+1} + \gamma$ telle que $\varphi_{n+1} \in H$ et $\gamma \in \bigcap_{j=1}^{n+1} \operatorname{Ker}\mu_j$ . Il vient

$$\delta_{n+1,l} = \left\langle \widetilde{\varphi_{n+1}} \middle| \mu_l \right\rangle = \left\langle \varphi_{n+1} + \gamma \middle| \mu_l \right\rangle = \left\langle \varphi_{n+1} \middle| \mu_l \right\rangle \quad \text{pour tout } l=1,\ldots,n+1 \ .$$

On en déduit que

$$H = H \cap \operatorname{Ker}\mu_{n+1} \oplus \mathbb{K}\cdot\varphi_{n+1} \ ,$$

donc que

$$F = H \oplus \left( \bigcap_{j=1}^{n+1} \operatorname{Ker}\mu_j \right) = H \cap \operatorname{Ker}\mu_{n+1} \oplus \left( \bigcap_{j=1}^{n} \operatorname{Ker}\mu_j \right) \ .$$

Par l'hypothèse de récurrence, il existe une suite $\left(\varphi_j\right)_{j=1,\ldots,n} \subset H \cap \operatorname{Ker}\mu_{n+1}$ biorthogonale avec $(\mu_l)_{l=1,\ldots,n}$ . Il est alors clair que $\left(\varphi_j\right)_{j=1,\ldots,n+1}$ est biorthogonale avec $\left(\mu_j\right)_{j=1,\ldots,n+1}$ .

Puisque

$$F = \left( \bigoplus_{j=1}^n \mathbb{K}\cdot\varphi_j \right) \oplus \left( \bigcap_{j=1}^{n} \operatorname{Ker}\mu_j \right) = H \oplus \left( \bigcap_{j=1}^{n} \operatorname{Ker}\mu_j \right)$$

et

$$\bigoplus_{j=1}^n \mathbb{K}\cdot\varphi_j \subset H \ ,$$

on a $\bigoplus_{j=1}^n \mathbb{K}\cdot\varphi_j = H$ , donc $(\varphi_k)_{k=1,\ldots,n}$ est une base de $H$ .

Pour prouver l'unicité, soit $(\psi_k)_{k=1,\ldots,n} \subset H$ une autre suite biorthogonale avec $\left(\mu_j\right)$ . On a $\varphi_k = \sum_{j=1}^n c_{k,j}\cdot\psi_j$ , donc

$$\delta_{k,l} = \left\langle \varphi_k \middle| \mu_l \right\rangle = \sum_{j=1}^n \overline{c_{k,j}} \cdot \left\langle \psi_j \middle| \mu_l \right\rangle = \overline{c_{k,l}} \ ,$$

et par suite $\psi_k = \varphi_k$ . □

**REMARQUE 2** Il est possible de simplifier quelque peu la démonstration de (i)(a) ; par contre la version duale de cette assertion est beaucoup plus simple à démontrer. Si $\left(\varphi_j\right)_{j=1,\ldots,n} \subset F$ est une suite linéairement indépendante, alors tout $\varphi \in \operatorname{sev}\left(\varphi_j\right)_{j=1,\ldots,n}$ s'écrit de manière unique sous la forme

$$\varphi = \sum_{j=1}^n c_j(\varphi)\cdot\varphi_j \ .$$

L'application $\varphi \longmapsto \overline{c_j(\varphi)} : \operatorname{sev}(\varphi_j)_{j=1,\ldots,n} \longrightarrow \mathbb{K}$ est une forme semi-linéaire que l'on peut prolonger (existence d'un supplémentaire algébrique) en une forme semi-linéaire $\mu_j$ sur $F$ . Il est alors clair que $(\varphi_k)_{k=1,\ldots,n}$ et $(\mu_l)_{l=1,\ldots,n}$ sont biorthogonales.

Si $\dim F = n$ , alors $(\varphi_k)_{k=1,\ldots,n}$ et $(\mu_l)_{l=1,\ldots,n}$ sont des bases de $F$ et $F^{\circledast}$ respectivement, dites *duales* l'une de l'autre.

**THEOREME** *Soit $\langle F|\, G\rangle$ une semi-dualité. On a*

$$(F_\sigma)^\dagger = |G\rangle \ ,$$

*où $|G\rangle$ désigne l'image de l'application canonique*

$$|\cdot\rangle : \gamma \longmapsto |\gamma\rangle : G \longrightarrow F^{\circledast} \ .$$

Pour tout $\gamma \in G$ , la forme semi-linéaire $|\gamma\rangle$ est continue sur $F_\sigma$ par définition de $\sigma(F,G)$ . Réciproquement, si $\mu$ est une forme semi-linéaire continue sur $F_\sigma$ , il existe (corollaire 2.2) une partie finie $\Gamma \subset G$ telle que

$$|\mu| \leqslant \max \big|\, |\Gamma\rangle \big| \ .$$

On peut supposer que $\Gamma$ , donc aussi $|\Gamma\rangle$ , est linéairement indépendante ; il suffit en effet de considérer une partie $\Gamma' \subset \Gamma$ et engendrant $\Gamma$ , car il existe $c \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\max \big|\, |\Gamma\rangle \big| \leqslant \max \big|\, |c \cdot \Gamma'\rangle \big| \ .$$

Si $\varphi \in \bigcap_{\gamma\in\Gamma} \operatorname{Ker} |\gamma\rangle$ , alors $|\langle \varphi|\, \mu\rangle| \leqslant \max |\langle \varphi|\, \Gamma\rangle| = 0$ , donc $\varphi \in \operatorname{Ker} \mu$ . Par le lemme (ii), il existe $(c_\gamma)_{\gamma\in\Gamma} \in \mathbb{K}^{(\Gamma)}$ telle que $\mu = \sum_{\gamma\in\Gamma} c_\gamma \cdot |\gamma\rangle = \left| \sum_{\gamma\in\Gamma} c_\gamma \cdot \gamma \right\rangle$ , ce qu'il fallait démontrer.

□

**DEFINITION 5** Nous dirons qu'une topologie localement convexe $\mathfrak{T}$ sur $F$ est *compatible* avec la semi-dualité $\langle F|\, G\rangle$ si

$$(F_{\mathfrak{T}})^\dagger = |G\rangle \ .$$

**EXEMPLE 6** Le théorème montre que la topologie faible $\sigma(F,G)$ est compatible avec la dualité. C'est la moins fine, i.e. $F_{\mathfrak{T}} \longrightarrow F_\sigma$ est continue, puisque chaque $\big|\, |\gamma\rangle \big|$ pour $\gamma \in G$ est évidemment une semi-norme continue sur $F_{\mathfrak{T}}$ .

**REMARQUE 3** Si $\langle F|\, G\rangle$ est une semi-dualité séparante à droite, on peut identifier $G$ avec $|G\rangle$ , donc $G$ avec le semi-dual $(F_\sigma)^\dagger$ de $F$ muni de la topologie faible $\sigma(F,G)$ .

Par symétrie si $\langle F|\, G\rangle$ est une semi-dualité séparante à gauche, on peut identifier $F$ avec $\langle F|$ , donc $F$ avec le semi-dual $(G_\sigma)^\dagger$ de $G$ muni de la topologie faible $\sigma(G,F)$ .

**REMARQUE 4** Si $F$ est un espace localement convexe, il existe au moins deux topologies localement convexes compatible avec la semi-dualité $\left\langle F\middle|\, F^\dagger\right\rangle$ : la topologie initiale $\mathfrak{T}_F$ et la topologie faible $\sigma\left(F, F^\dagger\right)$ , mais elles sont en général différentes, i.e.

$$F^\dagger = (F_\sigma)^\dagger \quad \text{, mais} \quad F \neq F_\sigma \text{ en général .}$$

**EXEMPLE 7** Soit $F$ un espace préhilbertien. Le produit scalaire $(\cdot|\cdot)$ définit une semi-dualité $(F|F)$ séparante.

Mais attention, $\mathfrak{T}_F$ n'est pas nécessairement compatible avec cette semi-dualité et les différentes topologies à disposition sont différentes ; on a les inclusions, en général strictes, suivantes :

$$\sigma(F,F) \subset \sigma\left(F,F^\dagger\right) \subset \mathfrak{T}_F \ .$$

Si $\mathcal{H}$ est un espace de Hilbert, le théorème de représentation de Riesz montre que l'on peut considérer l'espace de droite $\mathcal{H}$ dans la semi-dualité $(\mathcal{H}|\mathcal{H})$ comme le semi-dual $\mathcal{H}^\dagger$ de $\mathcal{H}$ , ce qui montre $\mathfrak{T}_{\mathcal{H}}$ est compatible avec cette semi-dualité.

**EXEMPLE 8 (Intégrales de Radon réelles et complexes)**

Rappelons qu'une intégrale de Radon sur $X$ peut être identifiée à une forme linéaire positive sur $\mathcal{K}_{\mathbb{R}}(X)$ (cf. cours d'Analyse [17], théorème 14.6). Nous préciserons en disant que c'est une *intégrale de Radon positive* .

**DEFINITION 6** On dit qu'une forme linéaire continue $\mu$ sur $\mathcal{K}(X)$ , i.e. $\mu \in \mathcal{M}(X) := \mathcal{K}(X)'$ , est une *intégrale de Radon réelle* respectivement *complexe* si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ respectivement $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ . Nous considérerons toujours la semi-dualité $\langle \mathcal{K}(X)|\, \mathcal{M}(X)\rangle$ définie par

$$\langle \varphi|\, \mu\rangle_{\mathcal{K}(X)} := \langle \overline{\varphi}, \mu\rangle = \mu(\overline{\varphi}) \ .$$

Par restriction, on obtient une correspondance biunivoque entre les intégrales de Radon complexes, qui sont réelles sur $\mathcal{K}_{\mathbb{R}}(X)$ , et les intégrales de Radon réelles.

Par définition de la topologie localement convexe finale sur $\mathcal{K}(X)$ (cf. exemple 2.10.2), la proposition 2.10 montre qu'une forme linéaire $\mu$ sur $\mathcal{K}(X)$ est une intégrale de Radon si, et seulement si, pour tout compact $K \subset X$ , la restriction de $\mu$ à $\mathcal{K}(X,K)$ est continue, ce qui signifie qu'il existe $c \in \mathbb{R}_+$ tels que

$$\left|\langle \varphi|\, \mu\rangle_{\mathcal{K}(X)}\right| \leqslant c \cdot \|\varphi\|_{\infty,K} \quad \text{pour tout } \varphi \in \mathcal{K}(X,K) \ .$$

Cette définition est justifiée par le résultat suivant :

**PROPOSITION** *Toute forme linéaire positive sur $\mathcal{K}(X)$ est continue, et toute forme linéaire continue sur $\mathcal{K}(X)$ est une combinaison linéaire de formes linéaires positives.*

Si $\mu$ est une forme linéaire positive sur $\mathcal{K}(X)$ , pour tout $K \in \mathfrak{K}(X)$ et $\varphi \in \mathcal{K}(X,K)$ , on a

$$\left|\langle \varphi|\, \mu\rangle_{\mathcal{K}(X)}\right| = \left|\int \overline{\varphi}\, d\mu\right| \leqslant \mu(K) \cdot \|\varphi\|_\infty \ ,$$

ce qui montre que $\mu$ est continue. Pour la seconde partie on peut consulter le livre de Dieudonné [7], XIII.1-3. □

**REMARQUE 5** L'étape importante de la démonstration de cette proposition est de prouver l'existence de la *valeur absolue* $|\mu|$ d'une intégrale de Radon complexe $\mu$ , puis que $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}(X)$ est un espace vectoriel réticulé : Pour tout $\varphi \in \mathcal{K}_+(X)$ , on posant

$$\left\langle \varphi|\, |\mu|\right\rangle_{\mathcal{K}(X)} = \sup_{\psi\in\mathcal{K}(X),|\psi|\leqslant\varphi} \left|\langle \psi|\, \mu\rangle_{\mathcal{K}(X)}\right| \ ,$$

on définit une forme linéaire croissante sur le cône convexe $\mathcal{K}_+(X)$ , qui se prolonge en une forme linéaire positive sur $\mathcal{K}(X)$ . On définit également l' *intégrale de Radon conjuguée* $\overline{\mu}$ (cf. exemple 3 ci-dessus) par

$$\langle \varphi | \overline{\mu} \rangle_{\mathcal{K}(X)} := \overline{\langle \overline{\varphi} | \mu \rangle_{\mathcal{K}(X)}} \quad \text{pour tout } \varphi \in \mathcal{K}(X) \ ,$$

ainsi que la *partie réelle* $\operatorname{Re} \mu$ et la *partie imaginaire* $\operatorname{Im} \mu$ de $\mu$ par

$$\operatorname{Re} \mu := \frac{1}{2} \cdot (\mu + \overline{\mu}) \quad \text{et} \quad \operatorname{Im} \mu := \frac{1}{2i} \cdot (\mu - \overline{\mu}) \ .$$

On peut alors poser

$$\mu_1 := \max(\operatorname{Re} \mu, 0) \quad , \quad \mu_{-1} := \max(-\operatorname{Re} \mu, 0) \ ,$$

ainsi que

$$\mu_i := \max(\operatorname{Im} \mu, 0) \quad , \quad \mu_{-i} := \max(-\operatorname{Im} \mu, 0) \ .$$

Ces intégrales de Radon sont les seules telles que

$$\mu = \sum_{\varepsilon^4 = 1} \varepsilon \cdot \mu_\varepsilon \quad \text{et} \quad \min(\mu_1, \mu_{-1}) = \min(\mu_i, \mu_{-i}) = 0$$

(cf. aussi ibid., XIII.15). On a

$$\mu_\varepsilon \leqslant |\mu| \leqslant \sum_{\varepsilon^4 = 1} \mu_\varepsilon \ .$$

Si $f$ est une fonction $\mu$-intégrable, i.e. $|\mu|$-intégrable ou encore $\mu_\varepsilon$-intégrable pour chaque $\varepsilon$ , on pose

$$\int f \, d\mu := \sum_{\varepsilon^4 = 1} \varepsilon \cdot \int f \, d\mu_\varepsilon \ ,$$

et on a

$$\left| \int f \, d\mu \right| \leqslant \int |f| \; d|\mu| \ .$$

On désigne encore par $\mathbf{L}^1(\mu)$ l'espace vectoriel des classes, modulo les fonctions $\mu$-négligeables, i.e. $|\mu|$-négligeables, de fonctions $\mu$-intégrables, muni de la norme

$$\|f\|_1 := \int |f| \; d|\mu| \ .$$

Si $\mu$ est une intégrale de Radon complexe et $f \in \mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mu) := \mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(|\mu|)$ , alors

$$|f \cdot \mu| = |f| \cdot |\mu|$$

(cf. ibid., XIII.16).

**EXERCICE 1** On considère la semi-dualité $\langle \mathcal{C}([0,1]) | \mathcal{M}([0,1]) \rangle$ . Montrer qu'il existe une suite $(f_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{C}([0,1])$ qui converge ponctuellement vers $0$ sur $[0,1]$ et une suite $(\mu_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{M}([0,1])$ qui converge faiblement vers l'intégrale de Dirac $\varepsilon_0$ en $0$ , mais telles que

$$\langle f_k | \mu_k \rangle = 1 \quad \text{pour tout } k \in \mathbb{N}$$

et

$$\lim_k \lim_l \langle f_k | \mu_l \rangle = 0 = \lim_l \lim_k \langle f_k | \mu_l \rangle \ .$$

**EXERCICE 2** Soit $F$ un espace vectoriel.

(a) Montrer que tout sous-espace vectoriel $W$ de $F$ est de la forme $\operatorname{Ker} B$ , où $B$ est une application linéaire surjective de $F$ sur un espace vectoriel $H$ .

(b) Si $P : F \longrightarrow F$ est un projecteur, i.e. $P^2 = P$ , alors

$$F = \operatorname{Ker} P \oplus P(F) \ .$$

(c) Soit $D$ une application linéaire surjective de $F$ sur un espace vectoriel $G$ . Une application linéaire $R : G \longrightarrow F$ telle que $DR = \mathrm{Id}_G$ est dite une *rétraction linéaire* de $D$ . C'est un choix, dépendant linéairement de $g \in G$ , parmi les solutions de l'équation $Df = g$ . Montrer que

$$F = \operatorname{Ker} D \oplus R(G) \ .$$

(d) Soit $W$ un sous-espace vectoriel de $F$ . Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) On a

$$F = \operatorname{Ker} D \oplus W$$

(ii) $D_{|W} : W \longrightarrow G$ est bijective.

(iii) Il existe une rétraction linéaire $R$ de $D$ telle que $R(G) = W$ .

(iv) Il existe un projecteur $P : F \longrightarrow F$ tel que $\operatorname{Ker} P = \operatorname{Ker} D$ et $P(F) = W$ .

Dans ce cas $\overset{-1}{D} := \overset{-1}{D_{|W}} : G \longrightarrow F$ est l'unique rétraction de $D$ dont l'image est $W$ et $\overset{-1}{D}D$ est l'unique projecteur satisfaisant à (iv).

(e) Soit $B$ une application linéaire surjective de $F$ sur un espace vectoriel $H$ . Pour que la somme $\operatorname{Ker} D + \operatorname{Ker} B$ soit directe, respectivement que $F = \operatorname{Ker} D + \operatorname{Ker} B$ , il faut et il suffit que $B_{|\operatorname{Ker} D} : \operatorname{Ker} D \longrightarrow H$ soit injective, respectivement surjective.

Ainsi

$$F = \operatorname{Ker} D \oplus \operatorname{Ker} B \ ,$$

si, et seulement si, $B_{|\operatorname{Ker} D} : \operatorname{Ker} D \longrightarrow H$ est bijective. Dans ce cas $\overset{-1}{B}B$ est l'unique projecteur $Q$ tel $Q(F) = \operatorname{Ker} D$ et $\operatorname{Ker} Q = \operatorname{Ker} B$ . En particulier $\overset{-1}{D}D = \mathrm{Id} - \overset{-1}{B}B$ .

Si $S$ est une rétraction quelconque de $D$ , alors $R := \left(\mathrm{Id} - \overset{-1}{B}B\right) S$ est l'unique rétraction de $D$ telle que $R(G) = \operatorname{Ker} B$ .

(f) Supposons que $B = (\mu_l)_{l=1,\ldots,n}$ , où $(\mu_l)_{l=1,\ldots,n}$ est une suite linéairement indépendante de $F^{\circledast}$ . Nous allons calculer la suite $(\varphi_k)_{k=1,\ldots,n} \subset \operatorname{Ker} D$ qui lui est biorthogonale (cf. lemme 3.4), en supposant connu des suites biorthogonales $(\psi_k)_{k=1,\ldots,n}$ et $(\nu_l)_{l=1,\ldots,n}$ , tel que $(\psi_k)_{k=1,\ldots,n}$ soit une base de $\operatorname{Ker} D$ .

(i) Déterminer la matrice $M$ de $B_{|\operatorname{Ker} D}$ dans les bases $(\psi_k)_{k=1,\ldots,n}$ et $(e_k)_{k=1,\ldots,n}$ de $\operatorname{Ker} D$ et $\mathbb{K}^n$ .

(ii) Si $T$ est l'application linéaire dans $\operatorname{Ker} D$ telle que $T\psi_k = \varphi_k$ , montrer que la matrice de $T$ dans la base $(\psi_k)_{k=1,\ldots,n}$ est l'inverse de $M$ .

(iii) Quelle est la décomposition de $\varphi_k$ dans la base $(\psi_k)_{k=1,\ldots,n}$ ?

(g) Considérons l'exemple $F := \mathcal{AC}^{(n)}(J)$ , où $J$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ , $\tau \in J$ , $n \in \mathbb{N}$ et

$$D := \partial^n : \mathcal{AC}^{(n)}(J) \longrightarrow \mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(J) \ .$$

Pour $l = 0, \ldots, n-1$ , soit $\nu_l : \mathcal{AC}^{(n)}(J) \longrightarrow \mathbb{C} : \varphi \longmapsto \partial^l \varphi(\tau)$ .

Montrer que $\operatorname{Ker} \partial^n = \mathcal{P}_{n-1}(J)$ , l'espace vectoriel des polynômes de degré $\leqslant n-1$ et calculer la base $(\psi_k)_{k=0,\ldots,n-1}$ biorthogonale à $(\nu_l)_{l=0,\ldots,n-1}$ et la rétraction $S$ de $\partial^n$ telle que $\nu_l \circ S\left(\mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(J)\right) = \{0\}$ . Déterminer le noyau $\varkappa : J \times J \longrightarrow \mathbb{C}$ tel que $S$ s'écrive comme un opérateur intégral

$$S : \mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(J) \longrightarrow \mathcal{AC}^{(n)}(J) : g \longmapsto \int_J \varkappa(\cdot, s) \cdot g(s)\, ds\ .$$

Utiliser la solution générale de l'équation différentielle $\partial^n f = g$ pour $g \in \mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(J)$ en n'oubliant pas d'appliquer le théorème de Fubini !

(h) Soient $(\tau_l)_{l=0,\ldots,n-1} \subset J$ , $\mu_l : \mathcal{AC}^{(n)}(J) \longrightarrow \mathbb{C} : \varphi \longmapsto \varphi(\tau_l)$ et $B := (\mu_l)_{l=0,\ldots,n-1} : \mathcal{AC}^{(n)}(J) \longrightarrow \mathbb{C}^n$ . Sous quelle condition est-ce que $B_{|\operatorname{Ker}\partial^n} : \operatorname{Ker}\partial^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ est bijective ? Dans ce cas calculer la base $(\varphi_k)_{k=0,\ldots,n-1}$ biorthogonale à $(\mu_l)_{l=0,\ldots,n-1}$ , la rétraction $R$ de $\partial^n$ telle que $\mu_l \circ R\left(\mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(J)\right) = \{0\}$ et le noyau correspondant.

(i) Soient $(J_l)_{l=0,\ldots,n-1}$ une suite d'intervalles de $J$ et $\mu_l : \mathcal{AC}^{(n)}(J) \longrightarrow \mathbb{C} : \varphi \longmapsto \int_{J_l} \partial^l \varphi$ . Sous quelle condition est-ce que $B_{|\operatorname{Ker}\partial^n} : \operatorname{Ker}\partial^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ est bijective ? Dans ce cas calculer la base $(\varphi_k)_{k=0,\ldots,n-1}$ biorthogonale à $(\mu_l)_{l=0,\ldots,n-1}$ , la rétraction $R$ de $\partial^n$ telle que $\mu_l \circ R\left(\mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(J)\right) = \{0\}$ et le noyau correspondant.

## 3.5 Applications linéaires de rang fini

**DEFINITION 1** Rappelons qu'une application linéaire $T : F \longrightarrow G$ est de *rang fini* si le sous-espace vectoriel $T(F)$ de $G$ est de dimension finie. On désigne par $L^f(F,G)$ le sous-espace vectoriel de $L(F,G)$ formé de ces applications, et par $\mathcal{L}^f(F,G)$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(F,G)$ de celles qui sont continues.

Soient $m = \dim T(F)$ et $\Phi : T(F) \longrightarrow \mathbb{K}^m$ un isomorphisme d'espace vectoriel, ce qui revient à choisir une base $(\gamma_j)_{j=1,\ldots,m}$ de $T(F)$ telle que $\Phi\gamma_j = e_j$ . Pour tout $\varphi \in F$ , on peut écrire

$$T\varphi = \Phi^{-1}(\Phi \circ T(\varphi)) = \Phi^{-1}\left(\sum_{j=1}^m \mathrm{pr}_j(\Phi \circ T(\varphi)) \cdot e_j\right) = \sum_{j=1}^m \mathrm{pr}_j \circ\Phi \circ T(\varphi) \cdot \gamma_j$$

et

$$\mu_j := \overline{\mathrm{pr}_j \circ\Phi \circ T} : F \longrightarrow \mathbb{K} : \varphi \longmapsto \overline{\mathrm{pr}_j \circ\Phi \circ T}$$

est une forme semi-linéaire sur $F$ . On a donc

$$T\varphi = \sum_{j=1}^m \overline{\langle \varphi | \mu_j \rangle_F} \cdot \gamma_j = \sum_{j=1}^m \gamma_j \cdot \langle \mu_j | \varphi \rangle_{F^{\circledast}} \ .$$

Réciproquement, quelles que soient les suites $(\gamma_j)_{j=1,\ldots,m} \subset G$ et $(\mu_j)_{j=1,\ldots,m} \subset F^{\circledast}$ , l'application linéaire définie par

$$T := \sum_{j=1}^m \gamma_j \cdot \langle \mu_j | \cdot \rangle_{F^{\circledast}} \tag{$*$}$$

est de rang fini.

Remarquons que $T$ est continue si, et seulement si, $T : F \longrightarrow T(F)$ est continue en munissant $T(F)$ de la topologie induite. On a alors immédiatement le résultat suivant :

**PROPOSITION** *Supposons que $G$ est séparé. Une application linéaire $T : F \longrightarrow G$ de rang fini est continue si, et seulement si, elle est de la forme $(*)$ , où $(\gamma_j)_{j=1,\ldots,m} \subset T(F)$ , et chaque $\mu_j$ est une forme semi-linéaire continue sur $F$ .*

Si $T$ est continue, il est clair que $\mu_j = \overline{\mathrm{pr}_j \circ\Phi \circ T} \in F^{\dagger}$ , puisque $\Phi$ est un isomorphisme d'espace localement convexe (théorème 2.7). Réciproquement, si $q$ est une semi-norme continue sur $G$ , alors $q \circ T \leqslant \sum_{j=1}^m |\langle \mu_j | \cdot \rangle| \cdot q(\gamma_j)$ et le membre de droite est une semi-norme continue sur $F$ . □

**REMARQUE 1** Cette proposition généralise le corollaire 2.7.ii : Si $(\mu_j)_{j=1,\ldots,m} \subset F^{\dagger}$ , alors une application linéaire de rang fini de la forme $(*)$ est continue de $F$ dans tout espace localement convexe $G$ contenant $(\gamma_j)_{j=1,\ldots,m}$ .

**COROLLAIRE** *Il existe une unique application linéaire bijective de* $|G\rangle\left\langle F^{\dagger}\right|$ *sur* $\mathcal{L}^{f}(F,G)$ *telle que l'image de* $|\gamma\rangle\langle\mu|$ *soit l'application linéaire*

$$\gamma\cdot\langle\mu|\cdot\rangle_{F^{\dagger}}:F\longrightarrow G:\varphi\longmapsto\gamma\cdot\langle\mu|\varphi\rangle_{F^{\dagger}}$$

*de rang* $1$ *. Nous identifierons* $|G\rangle\left\langle F^{\dagger}\right|$ *à* $\mathcal{L}^{f}(F,G)$ *.*

*Plus précisément toute application linéaire de rang fini* $T:F\longrightarrow G$ *s'écrit sous la forme*

$$T:=\sum_{j=1}^{m}\left|\gamma_{j}\right\rangle\left\langle\mu_{j}\right| \ ,$$

*où* $\left(\gamma_{j}\right)_{j=1,\ldots,m}\subset T(F)$ *et* $\left(\mu_{j}\right)_{j=1,\ldots,m}\subset F^{\circledast}$ *. Elle est continue si, et seulement si,* $\left(\mu_{j}\right)_{j=1,\ldots,m}\subset F^{\dagger}$ *.*

*En particulier* $|F\rangle\left\langle F^{\dagger}\right|$ *s'identifie à* $\mathcal{L}^{f}(F)$ *et* $\left|F^{\dagger}\right\rangle\left\langle F^{\dagger}\right|$ *à* $\mathcal{L}^{f}\left(F,F^{\dagger}\right)$ *. En outre il existe une unique forme linéaire*

$$\mathrm{Tr}:\mathcal{L}^{f}(F)\longrightarrow\mathbb{K}$$

*telle que*

$$\mathrm{Tr}\left(|\varphi\rangle\langle\mu|\right)=\langle\mu|\varphi\rangle_{F^{\dagger}}\quad\text{pour tout } \varphi\in F \text{ et } \mu\in F^{\dagger}\ .$$

*Elle est continue pour la topologie induite par* $|F\rangle_{i}\left\langle F^{\dagger}\right|$ *. Si* $(\psi_{k})_{k=1,\ldots,n}$ *et* $(\nu_{k})_{k=1,\ldots,n}$ *sont biorthogonales et* $T\in\mathcal{L}^{f}(F)$ *est tel que* $T(F)\subset\operatorname{sev}(\psi_{k})_{k=1,\ldots,n}$ *, alors*

$$\mathrm{Tr}\,T=\sum_{k\in K}\langle\nu_{k}|\,T\psi_{k}\rangle\ .$$

L'application

$$\mathfrak{s}:G\times F^{\circledast}\longrightarrow L(F,G):(\gamma,\mu)\longmapsto\gamma\cdot\langle\mu|\cdot\rangle_{F^{\circledast}}$$

est sesquilinéaire à droite, donc définit une application linéaire $\widetilde{\mathfrak{s}}:|G\rangle\left\langle F^{\circledast}\right|\longrightarrow L(F,G)$ . Utilisant la proposition, il nous suffit de montrer que cette application est injective. Etant donné $t\in|G\rangle\left\langle F^{\circledast}\right|$ tel que $\widetilde{\mathfrak{s}}(t)=0$ , nous pouvons supposer que $t=\sum_{j=1}^{n}\left|\gamma_{j}\right\rangle\left\langle\mu_{j}\right|$ et que $\left(\gamma_{j}\right)_{j=1,\ldots,n}$ est libre par le lemme 2.14. Etant donné $\varphi\in F$ , on a

$$0=\widetilde{\mathfrak{s}}(t)\,\varphi=\sum_{j=1}^{n}\gamma_{j}\cdot\left\langle\mu_{j}\right|\varphi\rangle\ ,$$

donc $\left\langle\mu_{j}\right|\varphi\rangle=0$ pour tout $j=1,\ldots,n$; ceci montre que $\mu_{j}=0$ , et par suite que $t=0$ , ce qui démontre la première partie.

L'application $F\times F^{\dagger}\longrightarrow\mathbb{K}:(\varphi,\mu)\longmapsto\langle\mu|\varphi\rangle_{F^{\dagger}}$ est semi-linéaire à droite et séparément continue, donc induit une forme linéaire continue Tr sur $|F\rangle_{i}\left\langle F^{\dagger}\right|$ . Etant donné $T\in\mathcal{L}^{f}(F)$ , que nous pouvons supposer être de la forme $T=\sum_{j=1}^{m}\left|\varphi_{j}\right\rangle\left\langle\mu_{j}\right|$ , où $\left(\varphi_{j}\right)_{j=1,\ldots,m}\subset T(F)$ , on obtient

$$\sum_{k=1}^{n}\langle\nu_{k}|\,T\psi_{k}\rangle=\sum_{k=1}^{n}\left\langle\nu_{k}\left|\sum_{j=1}^{m}\left|\varphi_{j}\right\rangle\left\langle\mu_{j}\right|\psi_{k}\right.\right\rangle=\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\left\langle\nu_{k}\right|\varphi_{j}\rangle\cdot\left\langle\mu_{j}\right|\psi_{k}\rangle=$$

$$=\sum_{j=1}^{m}\left\langle\mu_{j}\left|\sum_{k=1}^{n}\left\langle\nu_{k}\right|\varphi_{j}\rangle\cdot\psi_{k}\right.\right\rangle=\sum_{j=1}^{m}\left\langle\mu_{j}\,\middle|\varphi_{j}\right\rangle=\mathrm{Tr}\,T\ .$$

□

**DEFINITION 2** Pour tout $T \in \mathcal{L}^f(F)$ , on dit que $\operatorname{Tr} T$ est la trace de $T$ .

Cette notion correspond bien avec celle donnée dans le cours d'Algèbre linéaire, puisque pour toute base $(\psi_k)_{k=1,\ldots,n}$ de $F$ , si $(\nu_k)_{k=1,\ldots,n}$ est la base duale associée (cf. remarque 3.4.2), les coefficient $\langle \nu_k | T\psi_k \rangle$ sont ceux de la diagonale de la matrice de $T$ dans la base $(\psi_k)_{k=1,\ldots,n}$ .

**REMARQUE 2** De la même manière on montre que $G \otimes F'$ s'identifie à $\mathcal{L}^f(F, G)$ en identifiant $\gamma \otimes \mu$ avec l'application linéaire

$$\gamma \cdot \langle \mu, \cdot \rangle_{F'} : F \longrightarrow G : \varphi \longmapsto \gamma \cdot \langle \mu, \varphi \rangle_{F'}$$

de rang 1 .

**EXEMPLE 1 (Cas des noyaux à variables séparées)**

Nous utilisons les notations de 3.3 et de l'exemple 2.14.2. Supposons que le noyau $\varkappa$ soit de la forme

$$\varkappa = \sum_{j=1}^{m} |f_j\rangle \langle g_j| : (x, y) \longmapsto \sum_{j=1}^{m} f_j(x) \cdot \overline{g_j(y)} : X \times Y \longrightarrow \mathbb{K} .$$

On dit que c'est un *noyau à variables séparées* . Les hypothèses (a)-(d) de 3.3 sont satisfaites si, pour tout $j = 1, \ldots, m$ , on a

(a) $g_j \in \mathbf{L}^1(\nu)$ .

(b) $f_j \in \mathcal{C}(X)$ .

(c) C'est automatiquement vérifié grâce à (a) et (b).
L'application linéaire $K$ s'écrit alors

$$K : \mathcal{C}^b(Y) \longrightarrow \mathcal{C}(X) : \gamma \longmapsto \sum_{j=1}^{m} \left( \int \gamma \cdot \overline{g_j} \, d\nu \right) \cdot f_j .$$

Elle est de rang fini et bien de la forme $(*)$ , puisque $\gamma \longmapsto \int \gamma \cdot \overline{g_j} \, d\nu$ est une forme linéaire sur $\mathcal{C}^b(Y)$ quel que soit $j$ . Ces formes linéaires sont continues, car on a

$$\left| \int \gamma \cdot \overline{g_j} \, d\nu \right| \leqslant \int |\gamma| \cdot |g_j| \, d\nu \leqslant \left( \int |g_j| \, d\nu \right) \cdot \|\gamma\|_\infty .$$

Ceci montre aussi que si $K$ est à valeurs dans un espace localement convexe $F \subset \mathcal{C}(X)$ , alors $K$ est continue.

(d) $f_j \in \mathcal{C}^b(X)$ .
On a $M \leqslant \sum_{j=1}^{m} \|f_j\|_\infty \cdot \int |g_j| \, d\nu$ .

Pour conclure remarquons que $\overline{g_j}$ intervient comme une densité par rapport à $\nu$ . On a

$$\int \gamma \cdot \overline{g_j} \, d\nu = \langle g_j \cdot \nu | \gamma \rangle_{\mathcal{M}(Y)}$$

et il vient

$$K\gamma = \sum_{j=1}^{m} \left( \int \gamma \cdot \overline{g_j} \, d\nu \right) \cdot f_j = \sum_{j=1}^{m} f_j \cdot \langle g_j \cdot \nu | \gamma \rangle_{\mathcal{M}(Y)} = \left( \sum_{j=1}^{m} |f_j\rangle \langle g_j \cdot \nu| \right)(\gamma) ,$$

i.e.

$$K = \sum_{j=1}^{m} |f_j\rangle \langle g_j \cdot \nu| \ .$$

**EXERCICE** Peut-on exprimer $M$ simplement à l'aide des $f_j$ et $g_j$ ? Etudier le cas $X = Y := \{1, \ldots, n\}$ et $\nu := \#$ .

**EXEMPLE 2** Soient $(\varphi_k)_{k=1,\ldots,n} \subset F$ et $(\mu_l)_{l=0,\ldots,n} \subset F^{\circledast}$ des suites biorthogonales (cf. définition 3.4.4). L'application

$$P := \sum_{j=1}^{n} \left|\varphi_j\right\rangle \left\langle\mu_j\right| : F \longrightarrow F$$

est le projecteur, i.e. $P^2 = P$ , sur sev $\left(\varphi_j\right)_{j=1,\ldots,n}$ tel que $\operatorname{Ker} P = \bigcap_{j=1}^n \operatorname{Ker} \mu_j$ .

En effet, pour tout $\varphi \in F$ , on a

$$P^2\varphi = \left(\sum_{k=1}^{n} |\varphi_k\rangle \langle\mu_k|\right) \left(\sum_{l=1}^{n} \varphi_l \cdot \langle\mu_l|\, \varphi\rangle\right) = \sum_{k,l=1}^{n} \varphi_k \cdot \langle\mu_k|\, \varphi_l\rangle \langle\mu_l|\, \varphi\rangle =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \varphi_k \cdot \langle\mu_k|\, \varphi\rangle = \left(\sum_{k=1}^{n} |\varphi_k\rangle \langle\mu_k|\right) (\varphi) = P\varphi$$

et

$$0 = P\varphi = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k \cdot \langle\mu_k|\, \varphi\rangle$$

est équivalent à $\langle\mu_k|\, \varphi\rangle = 0$ pour tout $k = 1, \ldots, n$ , donc à $\varphi \in \bigcap_{j=1}^n \operatorname{Ker} \mu_j$ puisque $\left(\varphi_j\right)_{j=1,\ldots,n}$ est libre. □

## 3.6 Théorème de Hahn-Banach

L'un des problèmes fondamentaux de l'analyse fonctionnelle consiste à montrer l'existence d'une forme (semi-)linéaire ayant certaines propriétés, que nous supposerons s'exprimer par des égalités et des inégalités. On peut toujours se ramener à un un problème du type : trouver une forme $\mathbb{R}$-linéaire $\mu$ sur l'espace vectoriel réel $F$ telle que

$$\mu\left(\varphi_j\right) \leqslant \alpha_j \quad \text{pour tout } j \in J \ ,$$

où $\left(\varphi_j\right)_{j\in J}$ et $\left(\alpha_j\right)_{j\in J}$ sont des familles quelconques de $F$ et $\mathbb{R}$ respectivement. En effet $\mu(\varphi) \geqslant \alpha$ est équivalent à $\mu(-\varphi) \leqslant -\alpha$ .

Il est préférable en général de remplacer ces données en introduisant une famille (en général finie) de fonctionnelles sous-linéaires $\left(q_j\right)_{j\in J}$ . Par exemple l'inégalité $\mu\left(\varphi_j\right) \leqslant \alpha_j$ est équivalente à $\mu \leqslant r_j^\infty$ en définissant

$$r : \mathbb{R}_+ \cdot \varphi_j \longrightarrow \mathbb{R} : a \cdot \varphi_j \longmapsto a \cdot \alpha_j$$

(cf. théorème 2.1.iii).

Nous écrirons donc le problème sous la forme

$$\mu \leqslant q_j \quad \text{pour tout } j \in J \ .$$

Grâce au théorème 2.1.i cela est équivalent à

$$\mu \leqslant \bigwedge_{j\in J} q_j \ .$$

**PROPOSITION** *Soit $p$ une **forme sous-linéaire**. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

*(i)* *$p$ est $\mathbb{R}$-linéaire.*

*(ii)* *$p$ est minimale dans $\mathcal{SL}(F)$ par rapport à $\leqslant$ , i.e.*

$$q \in \mathcal{SL}(F) \ \text{ et } q \leqslant p \quad \Longrightarrow \quad q = p \ .$$

*(iii)* *Pour tout $\varphi \in F$ , on a*

$$p(\varphi) = -p(-\varphi) \ .$$

**(i) $\Rightarrow$ (ii)** Par la proposition 2.1.i appliqué à $q$ , pour tout $\varphi \in F$ , on obtient

$$-q(\varphi) \leqslant q(-\varphi) \leqslant p(-\varphi) = -p(\varphi) \ ,$$

ce qui montre que $p \leqslant q$ , donc que $q = p$ .

**(ii) $\Rightarrow$ (iii)** Si $p$ est minimale, pour tout $\varphi \in F$ , introduisons la fonctionnelle

$$r : \mathbb{R}_+ \cdot \varphi \longrightarrow \mathbb{R} : \alpha \cdot \varphi \longmapsto -\alpha \cdot p(-\varphi) \ .$$

Ell est évidemment positivement homogène et sous-linéaire sur le cône convexe $\mathbb{R}_+ \cdot \varphi$ . Par le théorème 2.1.ii $p \wedge r^\infty \in \mathcal{SL}(F)$ , car pour tout $\psi \in F$ , on a

$$p \wedge r^\infty(\psi) = \inf_{\substack{\varphi_1,\varphi_2\in F \\ \varphi_1+\varphi_2=\varphi}} \left[p(\varphi_1) + r^\infty(\varphi_2)\right] = \inf_{\alpha\in\mathbb{R}_+} \left[p(\psi - \alpha\cdot\varphi) - \alpha \cdot p(-\varphi)\right] \ ,$$

puisqu'il suffit de considérer les $\varphi_2$ de la forme $\alpha \cdot \psi$ , et

$$p(\psi - \alpha \cdot \varphi) - \alpha \cdot p(-\varphi) = p(\psi - \alpha \cdot \varphi) - p(\psi - \alpha \cdot \varphi - \psi) \geqslant$$

$$\geqslant p(\psi - \alpha \cdot \varphi) - p(\psi - \alpha \cdot \varphi) - p(-\psi) \geqslant -p(-\psi) > -\infty \ ,$$

ce qui montre que $p \wedge r^\infty(\psi) > -\infty$ .

Mais comme $p \wedge r^\infty \leqslant p$ , on a $p \wedge r^\infty = p$ par la minimalité de $p$ . On en déduit, en prenanr $\alpha = 1$ dans la définition, que

$$p(\varphi) = p \wedge r^\infty(\varphi) \leqslant -p(-\varphi) \leqslant p(\varphi)$$

grâce à la proposition 2.1.i. Nous avons donc prouvé que $p(\varphi) = -p(-\varphi)$ .

**(iii) $\Rightarrow$ (i)** La condition entraîne immédiatement l'homogénéité de $p$ . Pour tout $\varphi, \psi \in F$ , on a alors

$$p(\varphi + \psi) \leqslant p(\varphi) + p(\psi) = p(\varphi) + p(\varphi + \psi - \varphi) \leqslant p(\varphi) + p(\varphi + \psi) + p(-\varphi) = p(\varphi + \psi) \ ,$$

donc l'additivité. Ceci finit de prouver que $p$ est $\mathbb{R}$-linéaire. □

**SCOLIE (Principe d'Orlicz)** *Si $p$ est une forme sous-linéaire, il existe une forme $\mathbb{R}$-linéaire $\mu$ sur $F$ telle que $\mu \leqslant p$ .*

*En particulier, si $(q_j)_{j \in J}$ est une famille de fonctionnelles sous-linéaires sur l'espace vectoriel $F$ telle que*

$$-\infty < \bigwedge_{j \in J} q_j < \infty \quad \textit{sur } F \ ,$$

*alors il existe une forme $\mathbb{R}$-linéaire $\mu$ sur $F$ telle que*

$$\mu \leqslant q_j \quad \textit{pour tout } j \in J \ .$$

Par le principe de maximalité de Hausdorff, il existe une chaîne maximale $S \subset \mathcal{SL}(F)$ telle que $p \in S$ . Posons $\mu := \inf S \leqslant p$ . Pour tout $q \in S$ , on a ou bien $q \geqslant p$ ou bien $q \leqslant p$ . Dans ce dernier cas, pour tout $\varphi \in F$ , il vient

$$-p(-\varphi) \leqslant -q(-\varphi) \leqslant q(\varphi)$$

par la proposition 2.1.i. On en déduit que $\mu(\varphi) \geqslant -p(-\varphi)$ , donc que $\mu(\varphi) \in \mathbb{R}$ . Il est clair que $\mu$ est positivement homogène. Montrons que $\mu$ est additive. Pour tout $\varphi, \psi \in F$ et tout $q, r \in S$ , on a $q \leqslant r$ ou $r \leqslant q$ , donc $\min(q, r) \in \mathcal{SL}(F)$ ; ainsi

$$\mu(\varphi + \psi) \leqslant \min(q, r)(\varphi + \psi) \leqslant \min(q, r)(\varphi) + \min(q, r)(\psi) \leqslant q(\varphi) + r(\psi) \ ,$$

et par suite $\mu(\varphi + \psi) \leqslant \mu(\varphi) + \mu(\psi)$ .

Ainsi $\mu \in \mathcal{SL}(F)$ et $\mu \leqslant q$ pour tout $q \in \mathcal{SL}(F)$ . Par la maximalité de $S$ , on en déduit que $\mu$ est un élément minimal de $\mathcal{SL}(F)$ , donc que $\mu$ est linéaire par la proposition.

La dernière assertion est triviale, puisque la proposition 2.1.ii montre que $\bigwedge_{j \in J} q_j$ est une forme sous-linéaire. □

**REMARQUE 1** L'assertion d'existence de la proposition peut être généralisée au cas où $p \in \mathcal{SL}(F)$ , mais en supposant qu'il existe une fonctionnelle $q$ surlinéaire, i.e. $q : F \longrightarrow \widetilde{\mathbb{R}}$ est positivement homogène et suradditive, et telle que $p \geqslant q$ . On peut aussi généraliser tous ces résultats dans le cadre des conoïdes.

Dans le cas particulier, on peut montrer que la condition suivante est nécessaire et suffisante : il existe une fonctionnelle surlinéaire $q : F \longrightarrow \widetilde{\mathbb{R}}$ telle que $\bigwedge_{j \in J} q_j \geqslant q$ .

**THEOREME (de Hahn-Banach sur $\mathbb{R}$)** *Soient $F$ un espace vectoriel réel, $p$ une forme sous-linéaire sur $F$ , $E$ un sous-espace vectoriel de $F$ et $\tau : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une forme linéaire telle que $\tau \leqslant p$ sur $E$ . Alors il existe une forme linéaire $\mu$ sur $F$ qui prolonge $\tau$ et telle que $\mu \leqslant p$ .*

Remarquons que $\mu = \tau$ sur $E$ est équivalent à $\mu \leqslant \tau$ sur $E$ , donc à $\mu \leqslant \tau^{\infty}$ . C'est évidemment nécessaire. Réciproquement, pour tout $\psi \in E$ , on a

$$\mu(\psi) \leqslant \tau(\psi) = -\tau(-\psi) \leqslant -\mu(-\psi) = \mu(\psi) \ .$$

Par le principe d'Orlicz il nous suffit donc de considérer la fonctionnelle $p \wedge \tau^{\infty}$ . Pour tout $\varphi \in F$ , on a

$$p \wedge \tau^{\infty}(\varphi) = \inf_{\psi \in E} \left[p(\varphi - \psi) + \tau(\psi)\right] \ ,$$

et

$$-\tau(\psi) = \tau(-\psi) \leqslant p(-\psi) = p(\varphi - \psi - \varphi) \leqslant p(\varphi - \psi) + p(-\varphi) \ ,$$

donc

$$p(\varphi - \psi) + \tau(\psi) \geqslant -p(-\varphi) > -\infty \ .$$

Ceci montre que $p \wedge \tau^{\infty}(\varphi) > -\infty$ . On a $p \wedge \tau^{\infty} < \infty$ sur $F$ , puisque $p \wedge \tau^{\infty} \leqslant p$ . — □

**REMARQUE 2** Une forme $\mathbb{C}$-semi-linéaire $\mu$ sur un espace vectoriel complexe $F$ est univoquement déterminée par sa partie réelle. En effet

$$\operatorname{Re}\langle i \cdot \varphi | \mu\rangle = \operatorname{Re}\left[-i \cdot \{\operatorname{Re}\langle \varphi | \mu\rangle + i \cdot \operatorname{Im}\langle \varphi | \mu\rangle\}\right] = \operatorname{Im}\langle \varphi | \mu\rangle \ ,$$

donc

$$\langle \varphi | \mu\rangle = \operatorname{Re}\langle \varphi | \mu\rangle + i \cdot \operatorname{Re}\langle i \cdot \varphi | \mu\rangle \ .$$

Plus généralement l'application

$$\nu \longmapsto \nu + i \cdot \nu(i \cdot \diamond) : (F_{\mathbb{R}})^* \longrightarrow F^{\circledast}$$

est une bijection $\mathbb{R}$-linéaire, où $F_{\mathbb{R}}$ désigne l'espace vectoriel réel associé à $F$ .

Elle est bien définie, puisque $\mu := \nu + i \cdot \nu(i \cdot \diamond)$ est semi-linéaire. En effet pour tout $\varphi \in F$ , on a

$$\mu(i \cdot \varphi) = \nu(i \cdot \varphi) + i \cdot \nu(-\varphi) = -i \cdot [\nu(\varphi) + i \cdot \nu(i \cdot \varphi)] = \overline{i} \cdot \mu(\varphi) \ .$$

**THEOREME (de Hahn-Banach sur $\mathbb{C}$)** *Soient $F$ un espace vectoriel complexe, $p$ une semi-norme sur $F$ , $E$ un sous-espace vectoriel de $F$ et $\tau : E \longrightarrow \mathbb{C}$ une forme semi-linéaire telle que $\left|\,|\tau\rangle\right| \leqslant p$ sur $E$ . Alors il existe une forme semi-linéaire $\mu$ sur $F$ qui prolonge $\tau$ et telle que $\left|\,|\mu\rangle\right| \leqslant p$ .*

La fonction

$$\operatorname{Re}|\tau\rangle : E \longrightarrow \mathbb{R} : \psi \longmapsto \operatorname{Re}\langle \psi | \tau\rangle$$

est évidemment une forme $\mathbb{R}$-linéaire. Par le théorème précédent, il existe une forme $\mathbb{R}$-linéaire $\nu$ qui prolonge $\operatorname{Re}|\tau\rangle$ et telle que $\nu \leqslant p$ . Définissons $\mu$ comme dans la remarque ci-dessus. Elle prolonge $\tau$ , car pour tout $\psi \in E$ , on a

$$\langle \psi | \mu\rangle = \nu(\psi) + i \cdot \nu(i \cdot \psi) = \operatorname{Re}\langle \psi | \tau\rangle + i \cdot \operatorname{Re}\langle i \cdot \psi | \tau\rangle = \langle \psi | \tau\rangle \ .$$

D'autre part il existe $\alpha \in \mathbb{U}$ tel que $|\langle \varphi | \mu\rangle| = \alpha \cdot \langle \varphi | \mu\rangle$ ; on a alors

$$|\langle \varphi | \mu\rangle| = \langle \overline{\alpha} \cdot \varphi | \mu\rangle = \nu(\overline{\alpha} \cdot \varphi) \leqslant p(\overline{\alpha} \cdot \varphi) = p(\varphi) \ ,$$

ce qui finit de prouver le théorème. $\square$

**THEOREME (de Hahn-Banach)** *Soient $F$ un espace localement convexe, $E$ un sous-espace vectoriel de $F$ et $\tau : E \longrightarrow \mathbb{K}$ une forme semi-linéaire continue pour la topologie induite. Alors il existe une forme semi-linéaire continue $\mu$ sur $F$ qui prolonge $\tau$ .*

*En particulier $F$ est séparé, si, et seulement si, pour tout $\varphi \in F \smallsetminus \{0\}$ , il existe une forme semi-linéaire continue $\mu \in F^{\dagger}$ telle que $\langle \varphi | \mu \rangle \neq 0$ , i.e. si, et seulement si, la semi-dualité $\left\langle F \middle| F^{\dagger} \right\rangle$ est séparante.*

*Si $F$ est un espace normé, il existe une forme semi-linéaire continue $\mu$ sur $F$ qui prolonge $\tau$ et qui soit de même norme.*

Par hypothèse il existe une semi-norme continue $p$ sur $F$ telle que $\left| \,|\tau\rangle \right| \leqslant p$ . Il suffit donc d'appliquer les théorèmes précédents.

Si $F$ est séparé, il existe une semi-norme continue $p$ telle que $p(\varphi) > 0$ par la proposition 2.5. Définissons

$$\tau : \mathbb{K} \cdot \varphi \longrightarrow \mathbb{K} : \alpha \cdot \varphi \longmapsto \overline{\alpha} \cdot p(\varphi) \ .$$

C'est une forme semi-linéaire telle que $\langle \varphi | \tau \rangle \neq 0$ et elle est évidemment continue. Le résultat découle donc de ce qui précède.

Si $F$ est normé, on peut prendre $p := \left\| \,|\tau\rangle \right\| \cdot \|\diamond\|$ . $\square$

**COROLLAIRE**

*(i) Soient $F$ un espace vectoriel réel et $p$ une forme sous-linéaire sur $F$ . Alors $p$ est l'enveloppe supérieure des formes linéaires qu'elle majore, i.e.*

$$p = \sup \{ \mu \in F^* \mid \mu \leqslant p \} \ .$$

*(ii) Soit $F$ un espace localement convexe quelconque. Si $p$ est une semi-norme sur $F$ , alors*

$$p = \sup \left\{ \left| \,|\mu\rangle \right| \;\middle|\; \mu \in F^{\circledast} \text{ et } \left| \,|\mu\rangle \right| \leqslant p \right\} \ .$$

*Si $p$ est continue, alors*

$$p = \sup \left\{ \left| \,|\mu\rangle \right| \;\middle|\; \mu \in F^{\dagger} \text{ et } \left| \,|\mu\rangle \right| \leqslant p \right\} \ .$$

**Démonstration de (i)** Pour tout $\varphi \in F$ , on considère la forme linéaire

$$\tau : \mathbb{R} \cdot \varphi \longrightarrow \mathbb{R} : \alpha \cdot \varphi \longmapsto \alpha \cdot p(\varphi) \ .$$

Or $\tau \leqslant p$ sur $\mathbb{R} \cdot \varphi$ , puisque

$$\tau(-\varphi) = -\tau(\varphi) = -p(\varphi) \leqslant p(-\varphi)$$

par la proposition 2.1.i. Il suffit donc d'appliquer le théorème de Hahn-Banach réel.

**Démonstration de (ii)** On procède comme dans la démonstration du théorème de Hahn-Banach complexe (exercice). $\square$

**REMARQUE 3** La démonstration montre que les bornes supérieures sont ponctuellement atteintes.

**EXEMPLE 1** Soit $F$ un espace localement convexe séparé. Pour toute suite $(\psi_k)_{k=1,\ldots,n} \subset F$ linéairement indépendante, il existe une suite $(\nu_l)_{l=1,\ldots,n} \subset F^{\dagger}$ de formes semi-linéaires continues qui lui soit biorthogonale.

Dans la remarque 2.4.1 nous avons vu que $\psi \longmapsto \overline{c_j(\psi)} : \operatorname{sev}(\psi_j)_{j=1,\ldots,n} \longrightarrow \mathbb{K}$ est une forme semi-linéaire, évidemment continue. Le résultat découle donc du théorème de Hahn-Banach. □

**EXEMPLE 2** Soient $p, q$ des formes sous-linéaires sur un espace vectoriel réel $F$ et $\mu$ une forme linéaire sur $F$ telle que $\mu \leqslant p+q$ . Alors il existe des formes linéaires $\nu$ et $\eta$ sur $F$ telles que $\mu = \nu + \eta$ et $\nu \leqslant p$ , $\eta \leqslant q$ .

Cela revient à construire une forme linéaire $\nu \leqslant p$ telle que $\mu - \nu = \eta \leqslant q$ , i.e. $-\nu \leqslant q - \mu$ ou encore $\nu \leqslant q(-\diamond) + \mu$ . Par le principe d'Orlicz, il nous suffit donc de considérer la fonctionnelle $p \wedge [q(-\diamond) + \mu]$ et de montrer qu'elle est $> -\infty$ . Rappelons que, pour tout $\varphi \in F$ , on a

$$p \wedge [q(-\diamond) + \mu](\varphi) = \inf_{\varphi_1, \varphi_2 \in F, \varphi_1 + \varphi_2 = \varphi} \left[p(\varphi_1) + q(-\varphi_2) + \mu(\varphi_2)\right] \ .$$

Or

$$p(\varphi_1) + q(-\varphi_2) + \mu(\varphi_2) = p(\varphi_1) - p(-\varphi_2) + p(-\varphi_2) + q(-\varphi_2) + \mu(\varphi_2) \geqslant$$

$$\geqslant p(\varphi_1) - p(-\varphi_2) \geqslant -p(-\varphi_1 - \varphi_2) = -p(-\varphi) > -\infty \ ,$$

puisque $\mu(-\varphi_2) \leqslant (p+q)(-\varphi_2)$ et

$$p(-\varphi_2) \leqslant p(-\varphi_1 - \varphi_2) + p(\varphi_1) \ .$$

□

**EXEMPLE 3** Soient $p, q$ des semi-normes sur un espace vectoriel $F$ , réel ou complexe, et $\mu$ une forme semi-linéaire sur $F$ telle que $\left| |\mu\rangle \right| \leqslant p+q$ . Alors il existe des formes semi-linéaires $\nu$ et $\eta$ telles $\mu = \nu + \eta$ et $\left| |\nu\rangle \right| \leqslant p$ , $\left| |\eta\rangle \right| \leqslant q$ .

Le cas réel est immédiat par l'exemple précédent en remarquant que, pour toute forme linéaire $\mu$ et toute semi-norme $p$ , on a

$$|\mu| \leqslant p \quad \Longleftrightarrow \quad \mu \leqslant p \ .$$

Quant au cas complexe, on procède comme dans la démonstration du théorème de Hahn-Banach complexe 2.6 en considérant les parties réelles. □

## 3.7 Continuité faible et adjonction

**Dans tout ce qui suit $F, G$ sont des espaces localement convexes**

Nous allons maintenant étudier le semi-dual $F^\dagger$ de $F$ , muni de sa topologie faible. Rappelons qu'elle est definie par les semi-normes

$$\mu \longmapsto |\langle \varphi | \, \mu \rangle| : F^\dagger \longrightarrow \mathbb{R}$$

pour $\varphi \in F$ .

**REMARQUE 1** Soit $T : F \longrightarrow G$ une application linéaire (respectivement semi-linéaire). Considérons, pour tout $\nu \in G^\dagger$ , la forme semi-linéaire

$$T^{\circledast} \nu := \langle \cdot | \, \nu \rangle_G \circ T = \langle T \cdot | \, \nu \rangle_G : F \longrightarrow \mathbb{K} : \varphi \longmapsto \langle T\varphi | \, \nu \rangle_G \ ,$$

respectivement

$$T^{\circledast} \nu := \overline{\langle \cdot | \, \nu \rangle_G} \circ T = \overline{\langle T \cdot | \, \nu \rangle_G} : F \longrightarrow \mathbb{K} : \varphi \longmapsto \overline{\langle T\varphi | \, \nu \rangle_G} \ ) \ .$$

Dans la semi-dualité $\langle F \,| F^{\circledast} \rangle$ , pour tout $\varphi \in F$ et $\nu \in G^\dagger$ , on a l'égalité fondamentale

$$\langle T\varphi | \, \nu \rangle_G = \left\langle \varphi \middle| \, T^{\circledast} \nu \right\rangle_F \ ,$$

respectivement

$$\langle T\varphi | \, \nu \rangle_G = \overline{\langle \varphi | \, T^{\circledast} \nu \rangle_F} = \left\langle T^{\circledast} \nu \middle| \, \varphi \right\rangle_{F^\dagger} \ .$$

Nous avons donc défini une application linéaire, respectivement semi-linéaire

$$T^{\circledast} : G^\dagger \longrightarrow F^{\circledast} : \nu \longmapsto T^{\circledast} \nu \ .$$

On constate souvent, en manipulant judicieusement l'expression $\langle T\varphi | \, \nu \rangle_G$ , par exemple en intégrant par partie, que l'on a $T^{\circledast}\left(G^\dagger\right) \subset F^\dagger$ . Plus précisément il est souvent possible de définir une application $S : G^\dagger \longrightarrow F^\dagger$ telle que l'on ait

$$\langle T\varphi | \, \nu \rangle_G = \langle \varphi | \, S\nu \rangle_F \quad \text{pour tout } \varphi \in F \text{ et } \nu \in G^\dagger \ .$$

Ceci nous conduit, pour des raisons d'ordre essentiellement pratique, à poser la

**DEFINITION 1** On dit que $T^{\circledast} : G^\dagger \longrightarrow F^{\circledast}$est l' *adjointe algébrique* ou *formelle* de $T$ .

Si $T^{\circledast}\left(G^\dagger\right) \subset F^\dagger$ , i.e. s'il existe une (unique) application linéaire (respectivement semi-linéaire) $S : G^\dagger \longrightarrow F^\dagger$ telle que, pour tout $\varphi \in F$ et $\nu \in G^\dagger$ , on ait

$$\langle T\varphi | \, \nu \rangle_G = \langle \varphi | \, S\nu \rangle_F \quad (\text{resp.} \quad \langle T\varphi | \, \nu \rangle_G = \overline{\langle \varphi | \, S\nu \rangle_F} \ ) \ ,$$

on dit que $T$ *admet une adjointe* et on désigne par

$$T^\dagger : G^\dagger \longrightarrow F^\dagger : \nu \longmapsto T^{\circledast} \nu = \langle T \cdot | \, \nu \rangle$$

cette application.

Notons tout d'abord la propriété universelle suivante exprimant que la topologie faible est une topologie initiale :

**LEMME** *Soient $\langle F | G \rangle$ une semi-dualité, $H$ un espace localement convexe et $T : H \longrightarrow F_\sigma$ une application (semi-) linéaire. Pour que $T$ soit continue, il faut et il suffit que, pour tout $\gamma \in G$ , la forme (semi-) linéaire $\langle T \cdot | \gamma \rangle = \langle \cdot | \gamma \rangle \circ T$ soit continue sur $H$ .*

C'est immédiat par définition de la topologie faible (cf. définition 3.4.3), puisque l'on a $|\langle \cdot | \gamma \rangle| \circ T = |\langle T \cdot | \gamma \rangle|$ . ☐

**PROPOSITION** *Soit $T : F \longrightarrow G$ une application linéaire.*

*(i) L'application*

$$T^{\circledast} : G^\dagger \longrightarrow F^{\circledast} : \nu \longmapsto T^{\circledast}\nu$$

*est linéaire (respectivement semi-linéaire) et (faiblement) continue. Si $T$ admet une adjointe, alors $T^\dagger$ est (faiblement) continue.*

*(ii) Si $T : F \longrightarrow G$ est continue, alors $T$ admet une adjointe.*

*(iii) Pour que $T$ admet une adjointe, il faut et il suffit que $T : F_\sigma \longrightarrow G_\sigma$ soit continue. En particulier si $T : F \longrightarrow G$ est continue, alors $T : F_\sigma \longrightarrow G_\sigma$ est continue.*

*(iv) Si $S, T : F \longrightarrow G$ sont des applications linéaires continues et $\alpha \in \mathbb{K}$ , alors*

$$(S + T)^\dagger = S^\dagger + T^\dagger \quad \text{et} \quad (\alpha \cdot T)^\dagger = \overline{\alpha} \cdot T^\dagger \ .$$

*(v) Si $T : F \longrightarrow G$ et $S : G \longrightarrow H$ sont des applications linéaires continues, alors*

$$(ST)^\dagger = T^\dagger S^\dagger \ .$$

*En particulier, si $T$ est un isomorphisme de $F$ sur $G$ ou de $F_\sigma$ sur $G_\sigma$ , alors $T^\dagger$ en est aussi un et on a*

$$\overset{-1}{T^\dagger} = \left(\overset{-1}{T}\right)^\dagger \ .$$

**Démonstration de (i)** La continuité de $T^{\circledast}$ est immédiate par la lemme puisque, pour tout $\varphi \in F$ ,

$$\langle \varphi | \cdot \rangle_F \circ T^{\circledast} = \langle T\varphi | \cdot \rangle_G$$

est une forme semi-linéaire continue sur $G^\dagger$ . Si $T$ admet une adjointe $T^\dagger$ est continue comme factorisation de $T^{\circledast}$ .

**Démonstration de (ii)** En effet, pour tout $\nu \in G^\dagger$ , la forme semi-linéaire $T^{\circledast}\nu = \langle \cdot | \nu \rangle_G \circ T$ est évidemment continue, donc $T^{\circledast}\nu \in F^\dagger$ .

**Démonstration de (iii)** Si $T : F_\sigma \longrightarrow G_\sigma$ est continue, (ii) montre que $T$ admet une adjointe puisque $(F_\sigma)^\dagger = F^\dagger$ et $(G_\sigma)^\dagger = G^\dagger$ . Réciproquement si $T$ admet une adjointe, il nous suffit grâce au lemme de montrer que, pour tout $\nu \in G^\dagger$ , la forme semi-linéaire $\langle T \cdot | \nu \rangle_G$ est continue sur $F_\sigma$ . Mais $\langle T \cdot | \nu \rangle_G = \left\langle \cdot | T^\dagger \nu \right\rangle_F$ et $T^\dagger \nu \in F^\dagger$ , d'oú l'assertion par définition de la topologie faible.

Le reste est alors immédiat. ☐

**THEOREME** *On suppose que $F, G$ sont séparés.*

*(i) Pour tout $\varphi \in F$ , soit*

$$|\varphi\rangle_{F^\dagger} : \mu \longmapsto \langle \mu | \varphi \rangle_{F^\dagger} := \overline{\langle \varphi | \mu \rangle_F}$$

*la forme semi-linéaire continue sur* $F^\dagger$ *associée à* $\varphi$ *. L'application canonique*

$$|\cdot\rangle_{F^\dagger} : F_\sigma \longrightarrow \left(F^\dagger\right)^\dagger : \varphi \longmapsto |\varphi\rangle_{F^\dagger}$$

*est un isomorphisme permettant d'identifier* $F_\sigma$ *à* $\left(F^\dagger\right)^\dagger$ *.*

*(ii)* *Si* $T : F \longrightarrow G$ *est continue, alors* $T = \left(T^\dagger\right)^\dagger$ *.*

**Démonstration de (i)** Le théorème de Hahn-Banach 3.6 montre que la dualité $\left\langle F^\dagger \middle| F \right\rangle$ est séparante à droite, donc que $|\cdot\rangle_{F^\dagger}$ est bijective (théorème 3.4 et remarque 3.4.2). Ceci montre que les semi-dualités $\left\langle F \middle| F^\dagger \right\rangle$ et $\left\langle \left(F^\dagger\right)^\dagger \middle| F^\dagger \right\rangle$ peuvent être identifiées :

$$\langle |\varphi\rangle_{F^\dagger} | \mu\rangle_{\left(F^\dagger\right)^\dagger} = \overline{\langle \mu | \varphi\rangle_{F^\dagger}} = \langle \varphi | \mu\rangle_F \ ;$$

les topologies faibles sur $F$ et $\left(F^\dagger\right)^\dagger$ sont en particulier les mêmes.

**Démonstration de (ii)** On a évidemment

$$\left\langle \left(T^\dagger\right)^\dagger \varphi \middle| \nu \right\rangle_G = \left\langle \left(T^\dagger\right)^\dagger \varphi \middle| \nu \right\rangle_{\left(G^\dagger\right)^\dagger} = \left\langle \varphi \middle| T^\dagger \nu \right\rangle_F = \langle T\varphi | \nu\rangle_G \ ,$$

ce qu'il fallait démontrer. □

**DEFINITION 2** Soit $\langle F | G\rangle$ une semi-dualité. Si $F$ et $G$ sont des espaces localement convexes séparés nous dirons qu'ils sont en semi-dualité si leur topologie est compatible avec cette semi-dualité.

La semi-dualité $\langle F | G\rangle$ est donc séparante et le théorème montre que dans ce cas on a $G_\sigma = F^\dagger$ et $F_\sigma = G^\dagger$ . Par exemple un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ est en semi-dualité avec lui-même grâce au produit scalaire (cf. exemple 3.4.7).

**SCOLIE** *On suppose que* $F$ *et* $G$ *sont séparés.*

*(i)* $\mathcal{L}(F_\sigma, G_\sigma) = \mathcal{L}(F, G_\sigma)$ *est l'ensemble des applications linéaires de* $F$ *dans* $G$ *admettant une adjointe. En outre*

$$T \longmapsto T^\dagger : \mathcal{L}_s(F_\sigma, G_\sigma) \longrightarrow \mathcal{L}_s\left(G^\dagger, F^\dagger\right)$$

*est un isomorphisme, dont l'application réciproque est*

$$S \longmapsto S^\dagger : \mathcal{L}_s\left(G^\dagger, F^\dagger\right) \longrightarrow \mathcal{L}_s(F_\sigma, G_\sigma) \ .$$

*(ii)* *On a*

$$\mathcal{L}(F, G) \subset \mathcal{L}(F_\sigma, G_\sigma) \ .$$

*Si* $F$ *est tonnelé, alors*

$$\mathcal{L}(F, G) = \mathcal{L}(F_\sigma, G_\sigma) \ .$$

**Démonstration de (i)** L'inclusion $\mathcal{L}(F_\sigma, G_\sigma) \subset \mathcal{L}(F, G_\sigma)$ découle du fait que $F \longrightarrow F_\sigma$ est continue (exemple 3.4.6 ou le lemme ci-dessus). Les éléments de $\mathcal{L}(F, G_\sigma)$ admettent une adjointe par la proposition (i) et les applications linéaires de $F$ dans $G$ admettant une adjointe sont faiblement continue par (ii). Finalement les formules

$$|\langle T\varphi | \nu\rangle_G| = \left|\left\langle \varphi \middle| T^\dagger \nu \right\rangle_F\right| = \left|\left\langle T^\dagger \nu \middle| \varphi \right\rangle_{F^\dagger}\right|$$

montrent que les semi-normes sur $\mathcal{L}_s(F_\sigma, G_\sigma)$ et $\mathcal{L}_s\left(G^\dagger, F^\dagger\right)$ se correspondent.

**Démonstration de (ii)** L'inclusion découle de la proposition (i). Maintenant si $F$ est tonnelé, il nous suffit de montrer que si $T : F_\sigma \longrightarrow G_\sigma$ est une application linéaire continue, alors $T : F \longrightarrow G$ l'est aussi. Mais pour toute semi-norme continue $q$ sur $G$ , le corollaire 3.6.ii montre que

$$q \circ T = \left(\sup_{\nu \in G^\dagger, |\nu| \leqslant q} |\langle \cdot | \nu \rangle|\right) \circ T = \sup_{\nu \in G^\dagger, |\nu| \leqslant q} |\langle T \cdot | \nu \rangle| = \sup_{\nu \in G^\dagger, |\nu| \leqslant q} \left|\left\langle \cdot \middle| T^\dagger \nu \right\rangle\right| .$$

Or $T^\dagger \nu \in F^\dagger$ est une forme semi-linéaire continue sur $F$ . Ceci montre que la semi-norme $q \circ T$ est l'enveloppe supérieure d'une famille de semi-norme continues, donc qu'elle est continue par le scolie 2.13. □

**REMARQUE 2** Dans les applications on montre, ou bien directement que $T : F \longrightarrow G$ est continue, ou bien que $T$ admet une adjointe, ce qui prouve la continuité faible, d'où la continuité si $F$ est tonnelé ou plus généralement si $F$ est muni de sa topologie de Mackey (cf. théorème 3.11.ii). La continuité faible n'est en fait qu'un outil théorique.

**EXERCICE** Soient $F, G$ des espaces localement convexes tels que $F \cap G$ soit dense dans $F$ et dans $G$ . Montrer que l'on peut identifier $F^\dagger$ et $G^\dagger$ a des sous-espaces de $(F \cap G)^\dagger$ et que l'on a

$$(F \cap G)^\dagger = F^\dagger + G^\dagger .$$

Cf. définition 2.4.2 et exemple 3.6.2.

## 3.8 Dualité dans les espaces normés

Soit $F$ un espace normé. Rappelons que $F_\beta^\dagger$ désigne le semi-dual fort de $F$ (cf. définition 3.2.2). Il est muni de la norme

$$\|\mu\| := \|\mu\|_{\|\cdot\|_F,|\cdot|} := \sup_{\varphi\in F,\|\varphi\|\leqslant 1} |\langle\varphi|\,\mu\rangle| \ .$$

On a

$$|\langle\varphi|\,\mu\rangle| \leqslant \|\varphi\|\cdot\|\mu\| \quad \text{pour tout } \varphi\in F \text{ et } \mu\in F^\dagger \ .$$

En particulier $\mathrm{Id} : F_\beta^\dagger \longrightarrow F^\dagger \ (\,= F_\sigma^\dagger\,)$ est continue, donc $F = \left(F^\dagger\right)^\dagger \subset \left(F_\beta^\dagger\right)^\dagger$ .

**DEFINITION** On dit que $\left(F_\beta^\dagger\right)^\dagger$ est le *bidual* de $F$ et que $F$ est *réflexif* si $F = \left(F_\beta^\dagger\right)^\dagger$ .

**THEOREME** *Pour tout $\varphi\in F$ , on a*

$$\|\varphi\| = \left\|\,|\varphi\rangle_{F^\dagger}\right\| = \sup_{\mu\in F^\dagger,\|\mu\|\leqslant 1} |\langle\varphi|\,\mu\rangle| \ ,$$

*i.e.*

$$|\cdot\rangle_{F^\dagger} : F \longrightarrow \left(F_\beta^\dagger\right)_\beta^\dagger : \varphi \longmapsto |\varphi\rangle_{F^\dagger}$$

*est une isométrie.*

En effet, on a

$$\left\|\,|\varphi\rangle_{F^\dagger}\right\| = \sup_{\mu\in F^\dagger,\|\mu\|\leqslant 1} \left|\langle\mu|\,\varphi\rangle_{F^\dagger}\right| = \sup_{\mu\in F^\dagger,\|\mu\|\leqslant 1} |\langle\varphi|\,\mu\rangle| = \|\varphi\|$$

par le corollaire 3.6.ii, car $\|\mu\|\leqslant 1$ signifie que $|\langle\cdot|\,\mu\rangle| \leqslant \|\cdot\|$ . □

**REMARQUE 1** Un espace normé réflexif est nécessairement un espace de Banach.

C'est évident puisque $\left(F_\beta^\dagger\right)_\beta^\dagger$ est complet par la proposition 3.2. □

**REMARQUE 2** On identifie l'espace normé $F$ avec son image dans $\left(F_\beta^\dagger\right)^\dagger$ , mais en général on a $F \neq \left(F_\beta^\dagger\right)^\dagger$ .

La fermeture de $F$ dans son bidual fort $\left(F_\beta^\dagger\right)_\beta^\dagger$ , muni de la norme induite, est évidemment un espace de Banach induisant la norme de $F$ et dans lequel $F$ est dense.

**DEFINITION 1** On dit que la fermeture de $F$ dans son bidual fort $\left(F_\beta^\dagger\right)_\beta^\dagger$ est le *complété* de $F$ et on le note $\widehat{F}$ .

**LEMME** *La boule unité de $F$ est dense dans celle de $\widehat{F}$ .*

Etant donné $\varphi \in \widehat{F}$ tel que $0 < \|\varphi\| \leqslant 1$ , il existe une suite $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset F$ telle que $\varphi = \lim_k \varphi_k$ . Mais comme $0 \neq \|\varphi\| = \lim_k \|\varphi_k\|$ , il vient

$$\varphi = \lim_k \frac{\|\varphi\|}{\|\varphi_k\|} \cdot \varphi_k \quad \text{et} \quad \left\| \frac{\|\varphi\|}{\|\varphi_k\|} \cdot \varphi_k \right\| \leqslant 1 \ .$$

□

**REMARQUE 3** Si $\mathcal{H}$ est un espace de Hilbert, le théorème de représentation de Riesz 1.5 montre que l'on peut considérer l'espace de droite $\mathcal{H}$ dans la semi-dualité $(\mathcal{H}|\,\mathcal{H})$ comme le semi-dual fort $\mathcal{H}_\beta^\dagger$ de $\mathcal{H}$ .

**EXEMPLE 1** Si $F$ est un espace préhilbertien, alors l'espace de Banach complété $\widehat{F}$ de $F$ est un espace de Hilbert, puisque la norme du complété satisfait encore à l'égalité du parallélogramme (cf. corollaire1.3).

Remarquons qu'il n'est pas immédiat de démontrer directement que le produit scalaire se prolonge par continuité au complété, le produit scalaire n'étant pas **uniformément** continu sur $F \times F$ .

On a les assertion suivantes :

*(i) Soient $F$ un espace préhilbertien et $\widehat{F}$ l'espace de Hilbert complété de $F$ . Alors $\widehat{F}_\beta^\dagger = F_\beta^\dagger$ et l'application de Riesz $\xi \longmapsto |\xi) : F \longrightarrow F_\beta^\dagger$ est une isométrie d'image dense, qui se prolonge en une isométrie de $\widehat{F}$ sur $F_\beta^\dagger$ .*

*(ii) Le bidual fort $\left(F_\beta^\dagger\right)_\beta^\dagger$ de $F$ est égal au complété $\widehat{F}$ de $F$ ; en particulier un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ est réflexif.*

**Démonstration de (i)** Comme toute forme semi-linéaire continue $\mu$ sur $F$ possède un seul prolongement continu $\widehat{\mu}$ à $\widehat{F}$ de même norme par le théorème de Hahn-Banach 3.6, on obtient $\widehat{F}_\beta^\dagger = F_\beta^\dagger$ . Le théorème de Riesz montre alors que $R : \xi \longmapsto |\xi)$ est une isométrie de $\widehat{F}$ sur $F_\beta^\dagger$ , d'où notre assertion.

**Démonstration de (ii)** Si $\zeta$ est une forme semi-linéaire continue sur $F_\beta^\dagger$ , qui est un espace de Hilbert par (i) et la remarque 1.5.2, il existe $\nu \in F_\beta^\dagger$ tel que l'on ait

$$\langle \mu|\,\zeta\rangle_{F_\beta^\dagger} = (\mu|\,\nu)_{F_\beta^\dagger} = \left\langle \mu\right|R^{-1}\nu\left.\right\rangle_{\widehat{F}^\dagger} \quad \text{pour tout } \mu \in F^\dagger \ .$$

On a donc $\zeta = |R^{-1}\nu\rangle_{\widehat{F}^\dagger} \in \widehat{F}$ (cf. remarque 3). Il est alors clair qu'un espace de Hilbert est réflexif. □

**COROLLAIRE** *Si $F$ et $G$ sont des espaces normés et $T : F \longrightarrow G$ est une application linéaire continue, alors $T^\dagger : G_\beta^\dagger \longrightarrow F_\beta^\dagger$ est continue, $\left\|T^\dagger\right\| = \|T\|$ et*

$$\left(T^\dagger\right)^\dagger : \left(F_\beta^\dagger\right)_\beta^\dagger \longrightarrow \left(G_\beta^\dagger\right)_\beta^\dagger$$

*est un prolongement de $T$ de même norme.*

Pour tout $\nu \in G^\dagger$ , on a

$$\left\|T^\dagger \nu\right\| = \sup_{\varphi \in F, \|\varphi\| \leqslant 1} \left|\left\langle \varphi | T^\dagger \nu\right\rangle\right| = \sup_{\varphi \in F, \|\varphi\| \leqslant 1} \left|\langle T\varphi | \nu\rangle\right| \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{\varphi \in F, \|\varphi\| \leqslant 1} \|T\varphi\| \cdot \|\nu\| \leqslant \|T\| \cdot \|\nu\| \ ,$$

ce qui prouve que $\left\|T^\dagger\right\| \leqslant \|T\|$ , et en particulier que $T^\dagger$ est (fortement) continue. Il en est donc de même de $\left(T^\dagger\right)^\dagger$ et $\left\|\left(T^\dagger\right)^\dagger\right\| \leqslant \left\|T^\dagger\right\|$ . Mais comme $\left(T^\dagger\right)^\dagger$ est trivialement un prolongement de $T$ par le théorème 3.7.ii, on a $\|T\| \leqslant \left\|\left(T^\dagger\right)^\dagger\right\|$ , donc $\|T\| \leqslant \left\|\left(T^\dagger\right)^\dagger\right\| \leqslant \left\|T^\dagger\right\| \leqslant \|T\|$ , ce qu'il fallait démontrer. □

**PROPOSITION** *Toute partie faiblement bornée d'un espace localement convexe $F$ est bornée.*

Etant donné une partie $A \subset F$ faiblement bornée, il suffit de montrer que toute semi-norme continue $p$ sur $F$ est bornée sur $A$ . Si $\pi : F \longrightarrow F/\{p=0\}$ désigne la projection canonique, elle est continue en munissant $F/\{p=0\}$ de la norme $[p]$ . D'après la remarque 2 l'espace normé $F/\{p=0\}$ est un sous-espace de $\left((F/\{p=0\})^\dagger_\beta\right)^\dagger_\beta$ . Puisque l'image $\pi(A)$ est faiblement bornée, ce qui signifie que l'ensemble

$$\langle \pi(A)| \subset \left((F/\{p=0\})^\dagger_\beta\right)^\dagger = \mathcal{L}_s\left((F/\{p=0\})^\dagger_\beta, \mathbb{K}\right)$$

est simplement borné, le théorème de la majoration uniforme 3.2 montre, car $(F/\{p=0\})^\dagger_\beta$ est un espace de Banach par la proposition 3.2, que $\langle \pi(A)|$ est bornée dans

$$\mathcal{L}_b\left((F/\{p=0\})^\dagger_\beta, \mathbb{K}\right) = \left((F/\{p=0\})^\dagger_\beta\right)^\dagger_\beta \ .$$

Mais cela signifie que $[p]$ est bornée sur $\langle \pi(A)|$ , donc que $p$ est bornée sur $A$ . □

**EXEMPLE 2** Soient $\mu$ une intégrale de Radon sur un espace topologique $X$ , $p \in \left]1, \infty\right[$ et $q \in \left]1, \infty\right[$ tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Pour la semi-dualité $\langle \mathbf{L}^p(\mu) | \mathbf{L}^q(\mu)\rangle$ définie par

$$\langle f | g\rangle = \int \overline{f} \cdot g \, d\mu \quad \text{pour tout } f \in \mathbf{L}^p(\mu) \text{ et } g \in \mathbf{L}^q(\mu)$$

(cf. exemple 3.4.4), l'application

$$g \longmapsto |g\rangle : \mathbf{L}^q(\mu) \longrightarrow \mathbf{L}^p(\mu)^\dagger_\beta$$

est une isométrie. En identifiant ces deux espaces on a

$$\mathbf{L}^p(\mu)^\dagger_\beta = \mathbf{L}^q(\mu) \ .$$

On en déduit que $\mathbf{L}^p(\mu)$ est réflexif pour tout $p \in \left]1, \infty\right[$ et que $\mathbf{L}^p(\mu)$ et $\mathbf{L}^q(\mu)$ sont en semi-dualité (cf. définition 3.7.2).

La démonstration utilise le théorème de Radon-Nikodym.

**REMARQUE** Les cas $p \in \{1, \infty\}$ sont spéciaux. Tout d'abord on peut montrer que

$$\mathbf{L}^1(\mu)^\dagger_\beta = \mathbf{L}^{\infty,\bullet}(\mu) \ .$$

Il est nécessaire d'utiliser l'intégration essentielle comme le montre la proposition 1.16 : si $|g\rangle = 0$ , on a dans le cas non-modéré seulement $g = 0$ localement $\mu$-p.p. .

Mais en général

$$\mathbf{L}^{\infty,\bullet}(\mu)^{\dagger}_{\beta} \neq \mathbf{L}^{1}(\mu) \ .$$

Les espaces $\mathbf{L}^{1}(\mu)$ et $\mathbf{L}^{\infty,\bullet}(\mu)$ ne sont donc pas en semi-dualité, au contraire de $\mathbf{L}^{1}(\mu)$ et $\mathbf{L}^{\infty,\bullet}_{\sigma}(\mu) = \mathbf{L}^{1}(\mu)^{\dagger}$ bien évidemment.

**EXERCICE 1** Démontrer ce qui précède lorsque $X$ est un espace métrique discret et $\mu$ l'intégrale de comptage, i.e. dans le cas de la semi-dualité $\langle \ell^{p}(X) | \, \ell^{q}(X) \rangle$ . En d'autre termes

$$\ell^{p}(X)^{\dagger}_{\beta} = \ell^{q}(X) \quad \text{si } p \in [1, \infty[ \ .$$

Montrer également que

$$c^{0}(X)^{\dagger}_{\beta} = \ell^{1}(X) \ .$$

On a donc

$$c^{0}(X) \subset \left(c^{0}(X)^{\dagger}_{\beta}\right)^{\dagger}_{\beta} = \ell^{1}(X)^{\dagger}_{\beta} = \ell^{\infty}(X) \ ,$$

l'inclusion étant évidemment stricte.

On peut aussi montrer que l'inclusion

$$\ell^{1}(X) \subset \left(\ell^{1}(X)^{\dagger}_{\beta}\right)^{\dagger}_{\beta} = \ell^{\infty}(X)^{\dagger}_{\beta}$$

est stricte en considérant un ultrafiltre sur $X$ .

**EXERCICE 2** Soit $F$ un espace normé, $\mu \in F^{\dagger} \smallsetminus \{0\}$ et $\varphi \in F$ . Montrer que

$$d\left(0, \{\langle \cdot | \, \mu \rangle = 1\}\right) = \frac{1}{\|\mu\|}$$

et

$$d(\varphi, \operatorname{Ker} \mu) = \frac{|\langle \varphi | \, \mu \rangle|}{\|\mu\|} \ .$$

## 3.9 Dualité de Fenchel

Nous allons montrer qu'il y a correspondance biunivoque entre les fonctionnelles convexes s.c.i. sur $F$ et $F^\dagger$ respectivement. Ce problème étant purement réel, nous considérerons la dualité réelle $\left\langle F, F^\dagger\right\rangle$ définie par la forme bilinéaire

$$(\varphi, \mu) \longmapsto \operatorname{Re}\langle \varphi | \mu\rangle : F \times F^\dagger \longrightarrow \mathbb{R} \ .$$

On remarquera que l'application canonique $(F_{\mathbb{R}})' \longrightarrow F^\dagger : \nu \longmapsto \nu + i \cdot \nu\,(i \cdot \diamond)$ de la remarque 3.6.3 est un isomorphisme pour les topologies faibles.

**DEFINITION 1** Nous dirons qu'une fonctionnelle $f : F \longrightarrow \widetilde{\mathbb{R}}$ est *convexe* si, pour tout $\varphi, \psi \in F$ et tout $t \in [0,1]$ , on a

$$f\,(t \cdot \varphi + (1-t) \cdot \psi) \leqslant t \cdot f\,(\varphi) + (1-t) \cdot f\,(\psi) \ .$$

**REMARQUE 1** Pour que $f$ soit convexe il faut et il suffit que son *surgraphe* , i.e. l'ensemble $\{(\varphi, \alpha) \in F \times \mathbb{R} \mid \alpha \geqslant f\,(\varphi)\}$ , soit une partie convexe de $F \times \mathbb{R}$ . On pourrait penser que l'on peut étendre la notion de convexité à des fonctions à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$ , mais ceci ne conduit pas à des résultats intéressants.

**REMARQUE 2** Si une fonctionnelle $f$ définie sur une partie convexe $A$ de $F$ est convexe dans le sens ci-dessus pour tout $\varphi, \psi \in A$ , alors son prolongement $f^\infty$ par $\infty$ hors de $A$ l'est aussi. Par exemple la fonctionnelle $\infty_{\complement A}$ , égale à 0 sur $A$ et à $\infty$ hors de $A$ est convexe. Elle est s.c.i. si, et seulement si, $A$ est fermée.

**DEFINITION 2** Etant donné $f : F \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ , on pose

$$f_h\,(\varphi) := \inf\nolimits_{\alpha \in \mathbb{R}_+^*} \frac{1}{\alpha} \cdot f\,(\alpha \cdot \varphi) \quad \text{pour tout } \varphi \in F \ .$$

**REMARQUE 3** $f_h$ est strictement positivement homogène. Pour que $f_h$ soit une fonctionnelle positivement homogène, il faut et il suffit qu'il existe une fonctionnelle positivement homogène $q : F \longrightarrow \widetilde{\mathbb{R}}$ telle que $f \geqslant q$ . Dans ce cas on a $q \leqslant f_h \leqslant f$ .

Pour tout $\beta \in \mathbb{R}_+^*$ , il vient

$$f_h\,(\beta \cdot \varphi) = \beta \cdot \inf\nolimits_{\alpha \in \mathbb{R}_+^*} \frac{1}{\alpha \cdot \beta} \cdot f\,(\alpha \cdot \beta \cdot \varphi) = \beta \cdot f_h\,(\varphi) \ ,$$

ce qui prouve la première partie. La condition de la seconde partie est trivialement nécessaire puisque $f_h \leqslant f$ . Réciproquement on a $f\,(0) \geqslant 0$ , donc $f_h\,(0) = 0$ . En outre $f_h \geqslant q$ , car

$$\frac{1}{\alpha} \cdot f\,(\alpha \cdot \varphi) \geqslant \frac{1}{\alpha} \cdot q\,(\alpha \cdot \varphi) = q\,(\varphi) \quad \text{pour tout } \alpha \in \mathbb{R}_+^* \ .$$

$\square$

**LEMME** *Soit $f : F \longrightarrow \widetilde{\mathbb{R}}$ une fonctionnelle convexe.*

*(i) Si $f$ est s.c.i. en $0$ et telle que $f(0) > 0$ , il existe une semi-norme continue $q$ telle que $f \geqslant -q$ .*

*(ii) S'il existe une fonctionnelle positivement homogène $q : F \longrightarrow \widetilde{\mathbb{R}}$ telle que $f \geqslant q$ , alors $f_h$ est une fonctionnelle sous-linéaire telle que $q \leqslant f_h \leqslant f$ .*

**Démonstration de (i)** Comme $\left\{f > \frac{f(0)}{2}\right\}$ est un ouvert contenant $0$ , il existe une semi-norme continue $q$ telle

$$\{q \leqslant f(0)\} \subset \left\{f > \frac{f(0)}{2}\right\} .$$

Etant donné $\varphi \in F$ tel que $q(\varphi) \leqslant f(0)$ , on a

$$f(\varphi) \geqslant \frac{f(0)}{2} \geqslant 0 \geqslant -q(\varphi) .$$

Si maintenant $q(\varphi) > f(0)$ , posons $\psi := \frac{f(0)}{q(\varphi)} \cdot \varphi$ . On a $q(\psi) = f(0)$ , donc

$$\frac{f(0)}{2} \leqslant f(\psi) = f\left(\left[1 - \frac{f(0)}{q(\varphi)}\right] \cdot 0 + \frac{f(0)}{q(\varphi)} \cdot \varphi\right) \leqslant$$

$$\leqslant \left[1 - \frac{f(0)}{q(\varphi)}\right] \cdot f(0) + \frac{f(0)}{q(\varphi)} \cdot f(\varphi) \leqslant f(0) + \frac{f(0)}{q(\varphi)} \cdot f(\varphi) .$$

Il vient alors

$$f(\varphi) \geqslant -\frac{q(\varphi)}{2} \geqslant -q(\varphi) .$$

**Démonstration de (ii)** Par la remarque qui précède, il nous suffit de prouver que $f_h$ est sous-additive. Mais pour tout $\varphi, \psi \in F$ , la convexité de $f$ montre que

$$f_h(\varphi) + f_h(\psi) = \inf_{\alpha \in \mathbb{R}_+^*} \frac{1}{\alpha} \cdot f(\alpha \cdot \varphi) + \inf_{\beta \in \mathbb{R}_+^*} \frac{1}{\beta} \cdot f(\beta \cdot \psi) =$$

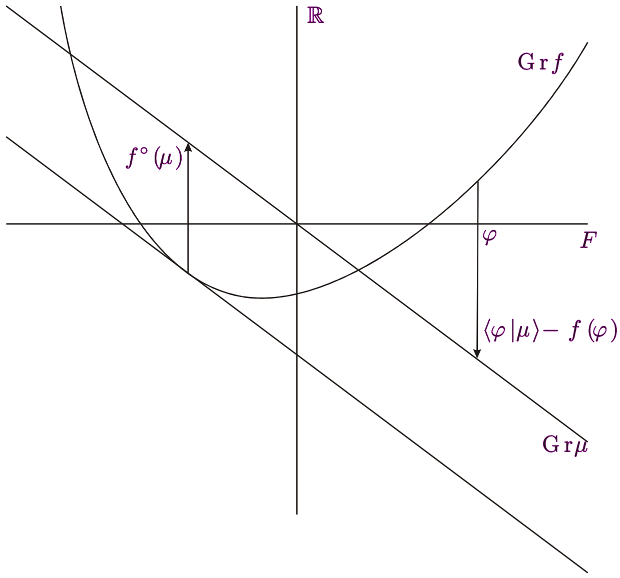
$$= \inf_{\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*} \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right) \cdot \left[\frac{\frac{1}{\alpha}}{\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}} f(\alpha \cdot \varphi) + \frac{\frac{1}{\beta}}{\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}} f(\beta \cdot \psi)\right] \geqslant$$

$$\geqslant \inf_{\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*} \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right) \cdot f\left(\frac{1}{\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}} \cdot (\varphi + \psi)\right) = f_h(\varphi + \psi) .$$

$\square$

**DEFINITION 3** Soient $f : F \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ . Pour tout $\mu \in F^\dagger$ , on pose

$$f^\circ(\mu) := \sup_{\varphi \in F} [\operatorname{Re} \langle \varphi | \mu \rangle - f(\varphi)] \in \overline{\mathbb{R}} .$$




On dit que c'est la fonction *conjuguée* ou la *transformée de Legendre-Fenchel* de $f$ .

**REMARQUE 4** On a $(\pm\infty)^{\circ} = \mp\infty$ . Si $f : F \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ est $\neq \infty$ , alors $f^{\circ}$ est une fonctionnelle convexe s.c.i. sur $F^{\dagger}$ et on a

$$f^{\circ\circ} \leqslant f \ .$$

Montrons que $f^{\circ}$ est à valeurs dans $\widetilde{\mathbb{R}}$; comme $f(\psi) < \infty$ pour un $\psi \in F$ , on a

$$f^{\circ}(\mu) \geqslant \operatorname{Re}\langle\psi|\,\mu\rangle - f(\psi) > -\infty \quad \text{pour tout } \mu \in F^{\dagger} \ .$$

Comme pour tout $\varphi \in F$ , la fonction

$$\mu \longmapsto \operatorname{Re}\langle\varphi|\,\mu\rangle - f(\varphi)$$

est affine continue sur $F^{\dagger}$ , il est clair que $f^{\circ}$ est convexe et s.c.i.. Pour tout $\gamma \in F$ , on a

$$f^{\circ\circ}(\gamma) = \sup_{\mu\in F'}\left[\operatorname{Re}\langle\gamma|\,\mu\rangle - f^{\circ}(\mu)\right] = \sup_{\mu\in F'}\inf_{\varphi\in F}\left[\operatorname{Re}\langle\gamma-\varphi|\,\mu\rangle + f(\varphi)\right] \leqslant f(\gamma) \ .$$

□

**REMARQUE 5** On a $f^{\circ} \neq \infty$ si, et seulement si, il existe $\mu \in F^{\dagger}$ et $c \in \mathbb{R}$ tel que

$$\operatorname{Re}|\mu\rangle - c \leqslant f \ .$$

En effet $f^{\circ}(\mu) < \infty$ signifie que l'on a

$$\operatorname{Re}\langle\varphi|\,\mu\rangle - f^{\circ}(\mu) \leqslant f(\varphi) \quad \text{pour tout } \varphi \in F \ .$$

□

**THEOREME (de Fenchel)** *Soit* $f : F \longrightarrow \widetilde{\mathbb{R}}$ .

*(i) Si $f$ est convexe s.c.i., alors*

$$f = f^{\circ\circ} \ .$$

*Une telle fonction est en particulier minorée par une fonction réelle affine continue.*

*(ii) $f^{\circ\circ} = -\infty$ ou $f^{\circ\circ}$ est la plus grande des fonctionnelles convexes s.c.i. qui sont plus petites que $f$ .*

*(iii) Les fonctionnelles convexes s.c.i. sont les mêmes pour toutes les topologies sur $F$ compatibles avec la semi-dualité. En particulier les parties convexes fermées sont les mêmes pour toutes ces topologies.*

**Démonstration de (i)** Si $f = \infty$ , c'est immédiat. Si $f \neq \infty$ , étant donné $\gamma \in F$ et $r \in \mathbb{R}$ tels que $r < f(\gamma)$ , il nous suffit d'après la remarque 4 de montrer qu'il existe $\mu \in F^\dagger$ tel que

$$\operatorname{Re}\langle \gamma - \varphi | \mu\rangle + f(\varphi) \geqslant r \quad \text{pour tout } \varphi \in F \ ,$$

c'est-à-dire qu'il existe $\nu \in F'_{\mathbb{R}}$ tel que

$$\nu(\varphi) \leqslant f(\varphi + \gamma) - r =: g(\varphi) \quad \text{pour tout } \varphi \in F \ .$$

Nous allons appliquer le principe d'Orlicz 3.6.

La fonctionnelle $g$ est évidemment convexe, s.c.i. et on a $g(0) = f(\psi) - r > 0$ . Grâce au lemme (i), il existe une semi-norme continue $q$ sur $F$ telle $g \geqslant -q$ . Comme $-q$ est positivement homogène, le lemme (ii) montre que $p_g$ est une fonctionnelle sous-linéaire, et $\nu \leqslant g$ si, et seulement si, on a $\nu \leqslant p_g$ , puisque $\nu$ est positivement homogène.

Il nous faut aussi assurer la continuité de $\nu$ . Pour cela nous allons imposer $\nu \leqslant q$ , ce qui revient à considérer la fonctionnelle $p \wedge q$ . Elle satisfait à $p \wedge q \leqslant q$ et, pour tout $\varphi, \varphi_1, \varphi_2 \in F$ tels que $\varphi_1 + \varphi_2 = \varphi$ , on a

$$p(\varphi_1) + q(\varphi_2) \geqslant -q(\varphi_1) + q(-\varphi_2) \geqslant -q(\varphi) \ ,$$

ce qui prouve que $p \wedge q \geqslant -q$ . Nous avons donc $-\infty < p \wedge q < \infty$ partout, ce qu'il fallait démontrer.

**Démonstration de (ii)** Si $f^\circ = \infty$ , on a $f^{\circ\circ} = -\infty$ . Si $f^\circ \neq \infty$ et si $g$ est une fonctionnelle convexe s.c.i. $\leqslant f$ , il en existe par la remarque 5, alors $f^\circ \leqslant g^\circ$ , puis $g = g^{\circ\circ} \leqslant f^{\circ\circ}$ par (i).

**Démonstration de (iii)** C'est évident puisque les fonctions affines $\gamma \longmapsto \operatorname{Re}\langle\gamma|\mu\rangle - p^\circ(\mu)$ sont continues pour toutes les topologies compatibles avec la semi-dualité. □

**DEFINITION 4** Soit $f : F \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ . On pose

$$\mathrm{co}_f := \{f^\circ \leqslant 0\} := \left\{\mu \in F^\dagger \ \middle|\ \operatorname{Re}|\mu\rangle \leqslant f\right\} \ .$$

On dit que c'est l' *ensemble dual* de $f$ . Si $A \subset F^\dagger$ , on définit

$$\mathrm{sl}_A := \sup \operatorname{Re}|A\rangle \quad \text{et} \quad \mathrm{sn}_A := \sup \left||A\rangle\right| \ .$$

On dit que $\mathrm{sl}_A$ est la *fonctionnelle duale* de $A$ .

**PROPOSITION** $\mathrm{co}_f$ *est une partie convexe fermée intersection de demi-espaces réels fermés dans* $F^\dagger$ *, tandis que* $\mathrm{sl}_A$ *et* $\mathrm{sn}_A$ *sont ou bien égales à* $-\infty$ *ou bien des fonctionnelles sous-linéaires s.c.i. sur* $F$ *;* $\mathrm{sn}_A$ *est en plus absolument homogène, donc une semi-norme si elle est finie.*

En effet

$$\mathrm{co}_f = \bigcap_{\varphi \in F} \left\{\mu \in F^\dagger \ \middle|\ \operatorname{Re}\langle\varphi|\mu\rangle \leqslant f(\varphi)\right\}$$

et $\left\{\mu \in F^\dagger \ \middle|\ \operatorname{Re}\langle\varphi|\mu\rangle \leqslant f(\varphi)\right\}$ est une partie convexe fermée de $F^\dagger$ , puisque $\mu \longmapsto \operatorname{Re}\langle\varphi|\mu\rangle$ est linéaire continue. La seconde partie est bien connue (cf. exemple 2.1.3). □

**DEFINITION 5** On dit qu'une partie $A$ de $F$ est *absolument symétrique* si, pour tout $\alpha \in \mathbb{U} \cap \mathbb{K}$ , on a $\alpha \cdot A = A$ . Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ on dit simplement *symétrique* .

**REMARQUE 6** L'enveloppe convexe $\mathrm{co}\,(A)$ d'une partie $A$ de $F$ , i.e. la plus petite partie convexe contenant $A$ , est formée de toutes les combinaisons convexes d'éléments de $A$ , c'est-à-dire

$$\mathrm{co}\,(A) = \left\{ \sum_{j=1}^{n} t_j \cdot \varphi_j \;\middle|\; (\varphi_j)_{j=1,\ldots,n} \subset F \text{ et } (t_j)_{j=1,\ldots,n} \subset \mathbb{R}_+ \text{ telle que } \sum_{j=1}^{n} t_j = 1 \right\} .$$

C'est évident puisque l'ensemble de ces combinaisons est convexe. □

**REMARQUE 7** Désignons par $\mathrm{cs}\,(A)$ l'enveloppe convexe absolument symétrique d'une partie $A$ de $F$ , i.e. la plus petite partie convexe absolument symétrique contenant $A$ . On a

$$\mathrm{cs}\,(A) = \mathrm{co}\left( \bigcup_{\alpha \in \mathbb{U} \cap \mathbb{K}} \alpha \cdot A \right) .$$

S'il faut préciser nous écrirons $\mathrm{cs}_{\mathbb{K}}\,(A)$ .

Si $C$ est convexe et si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , on a

$$\mathrm{cs}_{\mathbb{R}}\,(C) = \mathrm{co}\,(C \cup -C) = \{ t \cdot \varphi - (1-t) \cdot \psi \mid \varphi, \psi \in C \text{ et } t \in [0,1] \} ,$$

tandis que si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ , on a seulement

$$\mathrm{cs}_{\mathbb{C}}\,(C) \subset \mathrm{cs}_{\mathbb{R}}\,(C) + i \cdot \mathrm{cs}_{\mathbb{R}}\,(C) .$$

Si $C$ est une partie convexe compacte de $F$ , alors $\mathrm{cs}_{\mathbb{R}}\,(C)$ et $\overline{\mathrm{cs}_{\mathbb{C}}}\,(C)$ sont des parties compactes de $F$ .

La première partie est immédiate en remarquant que le membre de droite est absolument symétrique. La deuxième aussi, mais attention $\mathrm{cs}_{\mathbb{R}}\,(C) + i \cdot \mathrm{cs}_{\mathbb{R}}\,(C)$ n'est pas absolument symétrique. Quant à la troisième $\mathrm{cs}_{\mathbb{R}}\,(C)$ est l'image de l'application continue

$$C \times C \times [0,1] \longrightarrow F : (\varphi, \psi, t) \longmapsto t \cdot \varphi - (1-t) \cdot \psi ,$$

et $\mathrm{cs}_{\mathbb{R}}\,(C) + i \cdot \mathrm{cs}_{\mathbb{R}}\,(C)$ celle de

$$\mathrm{cs}_{\mathbb{R}}\,(C) \times \mathrm{cs}_{\mathbb{R}}\,(C) \longrightarrow F : (\varphi, \psi) \longmapsto \varphi + i \cdot \psi .$$

□

Nous pouvons maintenant généraliser le corollaire 3.6.

**COROLLAIRE** *Soient $f : F \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ et $A \subset F^{\dagger}$ .*

*(i) On a*

$$(f_h)^{\circ} = \infty_{\complement\, \mathrm{co}_f} \quad et \quad (\infty_{\complement A})^{\circ} = \mathrm{sl}_A .$$

*(ii)* $\mathrm{sl}_{\mathrm{co}_f} = -\infty$ *ou* $\mathrm{sl}_{\mathrm{co}_f}$ *est la plus grande fonctionnelle sous-linéaire s.c.i. qui soit plus petite que $f$ .*

*(iii) On a*

$$\mathrm{co}_{\mathrm{sl}_A} = \overline{\mathrm{co}}\,(A) \quad , \quad \mathrm{co}_{\mathrm{sn}_A} = \overline{\mathrm{cs}}\,(A) .$$

*et*

$$\mathrm{sn}_A = \mathrm{sl}_{\overline{\mathrm{cs}}(A)} \ .$$

*(iv) Il y a correspondance biunivoque entre les parties convexes fermées $C$ de $F^\dagger$ et les fonctionnelles sous-linéaires s.c.i. $p$ sur $F$ par $C \longmapsto \mathrm{sl}_C$ et $p \longmapsto \mathrm{co}_p$ , i.e.*

$$p = \mathrm{sl}_{\mathrm{co}_p} \quad \textit{et} \quad C = \mathrm{co}_{\mathrm{sl}_C} \ ,$$

*et*

> *(a) Pour que $C$ contienne $0$ , il faut et il suffit que $p \geqslant 0$ .*
>
> *(b) Pour que $C$ soit absolument symétrique, il faut et il suffit que $p$ soit absolument homogène.*
>
> *(c) Pour que $C$ soit bornée, il faut et il suffit que $p$ soit finie.*

**Démonstration de (i)** Si $\mu \in \mathrm{co}_f$ , pour tout $\varphi \in F$ et $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ , on a

$$\alpha \cdot \mathrm{Re} \left\langle \varphi \right| \mu \rangle - f\left(\alpha \cdot \varphi\right) = \mathrm{Re} \left\langle \alpha \cdot \varphi \right| \mu \rangle - f\left(\alpha \cdot \varphi\right) \leqslant 0 \ ,$$

donc

$$\mathrm{Re} \left\langle \varphi \right| \mu \rangle - f_h\left(\alpha \cdot \varphi\right) = \sup\nolimits_{\alpha \in \mathbb{R}_+^*} \left[\mathrm{Re} \left\langle \varphi \right| \mu \rangle - \frac{1}{\alpha} \cdot f\left(\alpha \cdot \varphi\right)\right] \leqslant 0 \ ,$$

et par suite $(f_h)^\circ(\mu) = 0$ . Si $\mu \notin \mathrm{co}_f$ , il existe $\psi \in F$ tel que $\mathrm{Re} \left\langle \psi \right| \mu \rangle - f(\psi) > 0$; mais comme pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ , on a

$$\mathrm{Re} \left\langle \alpha \cdot \psi \right| \mu \rangle - f_h\left(\alpha \cdot \psi\right) = \alpha \cdot \left[\mathrm{Re} \left\langle \psi \right| \mu \rangle - f_h(\psi)\right] \geqslant \alpha \cdot \left[\mathrm{Re} \left\langle \psi \right| \mu \rangle - f(\psi)\right]$$

par la remarque 3, il vient $(f_h)^\circ(\mu) = \infty$ .

Pour tout $\varphi \in F$ , on a

$$\left(\infty_{\complement A}\right)^\circ(\varphi) = \sup\nolimits_{\mu \in F'} \left[\mathrm{Re} \left\langle \varphi \right| \mu \rangle - \infty_{\complement A}(\varphi)\right] = \sup \mathrm{Re} \left\langle \varphi \right| A \rangle = \mathrm{sl}_A(\varphi) \ .$$

**Démonstration de (ii)** On a

$$\mathrm{sl}_{\mathrm{co}\, f} = \left(\infty_{\complement\, \mathrm{co}_f}\right)^\circ = (f_h)^{\circ\circ}$$

d'où le résultat par le théorème (ii).

**Démonstration de (iii)** Il vient tout d'abord

$$\infty_{\complement\, \mathrm{co}_{\mathrm{sl}_A}} = (\mathrm{sl}_A)^\circ = \left(\infty_{\complement A}\right)^{\circ\circ} \ ;$$

si maintenant $C$ est une partie convexe fermée contenant $A$ , on a $\infty_{\complement C} \leqslant \infty_{\complement A}$ , donc

$$\infty_{\complement C} = \left(\infty_{\complement C}\right)^{\circ\circ} \leqslant \left(\infty_{\complement A}\right)^{\circ\circ} = \infty_{\complement\, \mathrm{co}_{\mathrm{sl}_A}}$$

et par suite $\mathrm{co}_{\mathrm{sl}_A} \subset C$ . Ceci montre que $\mathrm{co}_{\mathrm{sl}_A}$ est la plus petite partie convexe fermée contenant $A$ et prouve la première formule. Pour tout $\varphi \in F$ , il existe $\alpha \in \mathbb{U}$ tel que

$$\mathrm{Re} \left\langle \varphi \right| \mu \rangle \leqslant \left|\left\langle \varphi \right| \mu \rangle\right| = \alpha \cdot \left\langle \varphi \right| \mu \rangle = \mathrm{Re} \left\langle \varphi \right| \alpha \cdot \mu \rangle \ .$$

Grâce à la remarque 7, on obtient

$$\mathrm{sl}_{\overline{\mathrm{cs}}(A)} = \sup \mathrm{Re} \left|\overline{\mathrm{cs}}(A)\right\rangle \leqslant \sup \left| \left|\overline{\mathrm{cs}}(A)\right\rangle \right| \leqslant \sup \left| \left|A\right\rangle \right| = \mathrm{sn}_A \leqslant \mathrm{sl}_{\overline{\mathrm{cs}}(A)} \ .$$

La première formule montre alors que

$$\mathrm{co}_{\mathrm{sn}_A} = \mathrm{co}_{\mathrm{sl}_{\overline{\mathrm{cs}}(A)}} = \overline{\mathrm{cs}}(A) \ .$$

**Démonstration de (iv)** La première partie, ainsi que le point (a), sont immédiats. Pour démontrer (b) remarquons, si $C$ est absolument symétrique, que $C = \overline{\mathrm{cs}}(C)$ , donc $p = \mathrm{sn}_C$ est absolument homogène. Réciproquement, pour tout $\mu \in C$ , $\alpha \in \mathbb{U}$ et $\varphi \in F$ , on a

$$\mathrm{Re}\langle \varphi | \alpha \cdot \mu \rangle = \mathrm{Re}\langle \overline{\alpha} \cdot \varphi | \mu \rangle \leqslant p(\overline{\alpha} \cdot \varphi) = p(\varphi) \ ,$$

donc $\alpha \cdot \mu \in C$ .

Il nous reste à prouver (c). Rappelons (définition 3.1.4) que $C$ est bornée dans $F^\dagger$ si, et seulement si, pour tout $\varphi \in F$ , la semi-norme $\left| \langle \varphi | \right|$ est bornée sur $C$ . Le résultat en découle car on a d'une part

$$\mathrm{sl}_C(\varphi) = \sup \mathrm{Re}\langle \varphi | C \rangle \leqslant \sup |\langle \varphi | C \rangle| < \infty \ ,$$

et d'autre part

$$\mathrm{Re}\langle \varphi | C \rangle \subset [-\,\mathrm{sl}_C(-\varphi), \mathrm{sl}_C(\varphi)]$$

et

$$\mathrm{Im}\langle \varphi | C \rangle = \mathrm{Re}\langle i \cdot \varphi | C \rangle \subset [-\,\mathrm{sl}_C(-i \cdot \varphi), \mathrm{sl}_C(i \cdot \varphi)] \ .$$

□

**EXERCICE 1** Calculer la fonction conjuguée $f^\circ$ des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ suivantes :

(a) $f : x \longmapsto a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ pour $a \geqslant 0$ .

(b) $f = \exp$ .

(c) $f = \frac{1}{p} \cdot |\mathrm{id}|^p$ pour $p \in [1, \infty[$ .

(d) Donner une formule générale pour $f^\circ$ dans le cas où $f \in \mathcal{C}^{(1)}(\mathbb{R})$ et $f'$ est strictement croissante.

**EXERCICE 2** Soient $F$ un espace localement convexe métrisable. Montrer

(a) Si $A$ est une partie précompacte de $F$ , alors $\overline{\mathrm{co}}(A)$ et $\overline{\mathrm{cs}}(A)$ sont précompactes.

(b) Si $F$ est un espace de Fréchet et $A$ une partie compacte de $F$ , alors $\overline{\mathrm{co}}(A)$ et $\overline{\mathrm{cs}}(A)$ sont des parties compactes de $F$ .

Utiliser le théorème 14.7 du cours d'Analyse [17].

**EXERCICE 3** Soient $F$ un espace de Fréchet, $X$ un espace topologique séparé et $f : X \longrightarrow F$ une application telle que, pour tout $K \in \mathfrak{K}(X)$ , la partie $f(K)$ soit contenue dans une partie compacte de $F$ et que $f$ tende vers 0 à l'infini, i.e. telle que pour toute semi-norme continue $p$ sur $F$ , il existe $K \in \mathfrak{K}(X)$ telle que $p(f(X \smallsetminus K)) \leqslant 1$ .

Montrer que $f(X)$ est contenue dans une partie convexe compacte de $F$ .

**REMARQUE 8** Ces deux derniers exercices peuvent être généralisés au cas où $F$ est un espace localement convexe complet, mais la définition de ce concept nécessite l'introduction des filtres. Il suffit en fait que $F$ soit quasi-complet, i.e. que toute partie fermée convexe bornée (cf. définition 3.1.4) soit complète. Il est aussi nécessaire de généraliser la notion d'ensemble précompact et la caractérisation des ensembles compacts : un ensemble est compact si, et seulement s'il est précompact et complet.

## 3.10 Polarité et orthogonalité

**DEFINITION 1** Soient $A$ une partie de $F$ et $\mathrm{sl}_A : F^\dagger \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ (cf. définition 3.9.4).

(a) On pose

$$A^\circ := \left\{ \mu \in F^\dagger \;\middle|\; \mathrm{Re}\,\langle A|\,\mu\rangle \geqslant -1 \right\} = \{\mathrm{sl}_{-A} \leqslant 1\} \ ,$$

$$A^a := \left\{ \mu \in F^\dagger \;\middle|\; |\langle A|\,\mu\rangle| \leqslant 1 \right\} = \{\mathrm{sn}_A \leqslant 1\}$$

et

$$A^\perp := \left\{ \mu \in F^\dagger \;\middle|\; \langle A|\,\mu\rangle = \{0\} \right\} = \{\mathrm{sn}_A = 0\} \ .$$

On dit que $A^\circ$ , $A^a$ et $A^\perp$ sont respectivement les *ensembles polaire* et *polaire absolu* de $A$ et l' *ensemble orthogonal* à $A$ .

(b) On définit la *jauge de Minkowsky* de $A$ par

$$j_A(\varphi) := \inf \left\{ \alpha \in \mathbb{R}_+^* \;\middle|\; \varphi \in \alpha \cdot A \right\} \in \overline{\mathbb{R}}_+ \ .$$

(c) On dit que $A$ est radialement fermée si, pour tout $\varphi \in F$ , l'ensemble

$$I_\varphi := \{ \beta \in \mathbb{R}_+ \mid \beta \cdot \varphi \in A \}$$

est un intervalle fermé contenant $0$ .

**REMARQUE 1** On vérifie facilement les assertions suivantes :

(a) Si $A$ est un cône, on a

$$A^\circ = \left\{ \mu \in F^\dagger \;\middle|\; \mathrm{Re}\,\langle A|\,\mu\rangle \geqslant 0 \right\} \ .$$

(b) Si $A$ est absolument symétrique, respectivement un espace vectoriel, on a

$$A^\circ = A^a \quad , \text{resp.} \quad A^\circ = A^\perp \ .$$

(c) Si $A \subset B$ , alors

$$B^\circ \subset A^\circ \quad , \quad B^a \subset A^a \quad , \quad B^\perp \subset A^\perp ;$$

en outre

$$A \subset A^{\circ\circ} \quad , \quad A \subset A^{aa} \quad , \quad A \subset A^{\perp\perp}$$

et

$$A^\circ = A^{\circ\circ\circ} \quad , \quad A^a = A^{aaa} \quad , \quad A^\perp = A^{\perp\perp\perp} \ .$$

Si $\ddagger \in \{\circ, a, \perp\}$ , alors $A \subset A^{\ddagger\ddagger}$ , donc $\left(A^{\ddagger\ddagger}\right)^\ddagger \subset A^\ddagger$ et par suite

$$A^\ddagger \subset \left(A^\ddagger\right)^{\ddagger\ddagger} = \left(A^{\ddagger\ddagger}\right)^\ddagger \subset A^\ddagger \ .$$

(d) Si $A$ est convexe fermée et contient $0$ , alors $A$ est radialement fermée.

**REMARQUE 2** Si $F$ est un espace préhilbertien, le produit scalaire définit une semi-dualité $(F|F)$ . En munissant $F$ de la topologie faible $\sigma(F,F)$ , sont semi-dual $\left(F_{\sigma(F,F)}\right)^{\dagger}$ s'identifie à $F$ et, pour toute partie $A \subset F$ , on a

$$A^{\perp} = \{\mu \in F \mid (A|\mu) = \{0\}\} \ .$$

On retrouve la notion d'orthogonalité définie dans le cadre des espaces préhilbertiens (cf. définition 1.4.1).

**PROPOSITION** *Soit $A$ une partie de $F$ .*

*(i)* *On a*

$$[\overline{\mathrm{co}}\,(A \cup \{0\})]^{\circ} = A^{\circ} \quad , \quad \overline{\mathrm{cs}}\,(A)^{a} = A^{a} \quad et \quad \overline{\mathrm{sev}}\,(A)^{\perp} = A^{\perp} \ .$$

*(ii)* *On a*

$$j_A = (1 + \infty_{\complement A})_h \quad et \quad A^{\circ} = -\,\mathrm{co}_{\,1+\infty_{\complement A}} \ ;$$

*en particulier $j_A$ est une fonctionnelle positivement homogène $\geqslant 0$ et $A^{\circ}$ est une partie convexe fermée contenant $0$ de $F^{\dagger}$ .*

*(iii)* *Si $A$ est convexe, alors $j_A$ est une fonctionnelle sous-linéaire.*

*(iv)* *On a $A = \{j_A \leqslant 1\}$ si, et seulement si, $A$ est radialement fermée.*

*(v)* *Si $A$ est radialement fermée, alors $j_A$ est s.c.i. si, et seulement si, $A$ est fermée.*

*(vi)* *Soit $(q_j)_{j\in J}$ une famille de fonctionnelles sous-linéaires telle que $\bigwedge_{j\in J} q_j$ soit une fonctionnelle sous-linéaire s.c.i. Alors*

$$\left\{\bigwedge_{j\in J} q_j \leqslant 1\right\} = \overline{\mathrm{co}}\left(\bigcup_{j\in J}\{q_j \leqslant 1\}\right) \ .$$

*(vii)* *Si $p$ est une fonctionnelle sous-linéaire s.c.i. $\geqslant 0$ , on a*

$$p = j_{\{p\leqslant 1\}} \ .$$

*En particulier si $p$ est une semi-norme sur $F$ , alors*

$$p = j_{B_p(0,1)} \ .$$

**Démonstration de (i)** Etant donné $\mu \in F^{\dagger}$ tel que $\mathrm{Re}\,\langle A|\,\mu\rangle \geqslant -1$ , par linéarité on obtient

$$\mathrm{Re}\,\langle \mathrm{co}\,(A)|\,\mu\rangle \geqslant -1 \ ,$$

puis $\mathrm{Re}\,\langle \overline{\mathrm{co}}\,(A)|\,\mu\rangle \geqslant -1$ par continuité. Ceci montre que $A^{\circ} \subset \overline{\mathrm{co}}\,(A \cup \{0\})^{\circ}$ . L'autre inclusion est triviale. Les deux autres formules se prouvent de la même manière.

**Démonstration de (ii)** En effet, pour tout $\varphi \in F$ , il vient

$$j_A(\varphi) = \inf\left\{\frac{1}{\beta} \in \mathbb{R}_+^{*} \;\middle|\; \beta \cdot \varphi \in A\right\} = (1 + \infty_{\complement A})_h(\varphi)$$

par la définition 3.9.2. Comme $j_A$ est positive, elle est positivement homogène par la remarque 3.9.3. D'autre part

$$\mathrm{co}_{1+\infty_{\complement A}} = \left\{\mu \in F^{\dagger} \;\middle|\; \mathrm{Re}\,|\mu\rangle \leqslant 1 + \infty_{\complement A}\right\} = \left\{-\mu \in F^{\dagger} \;\middle|\; \mathrm{Re}\,\langle A|\,\mu\rangle \geqslant -1\right\} = -A^{\circ} \ ,$$

et il suffit d'appliquer la proposition 3.9.

**Démonstration de (iii)** Cela découle du lemme 3.9.ii.

**Démonstration de (iv)** Pour tout $\varphi \in F$ , on a

$$j_A(\varphi) = \frac{1}{\sup I_\varphi} \ .$$

Si $A = \{j_A \leqslant 1\}$ , pour tout $\beta \in \mathbb{R}_+$ , l'assertion $\beta \cdot \varphi \in A$ est équivalente à $j_A(\beta \cdot \varphi) \leqslant 1$ , donc à $\beta \leqslant \frac{1}{j_A(\varphi)}$ , ce qui montre que $I_\varphi = \left[0, \frac{1}{j_A(\varphi)}\right]$ . Réciproquement on a évidemment $A \subset \{j_A \leqslant 1\}$ . Si maintenant $j_A(\varphi) \leqslant 1$ , il vient $\sup I_\varphi \geqslant 1$ , donc $1 \in I_\varphi$ , ce qui montre que $\varphi \in A$ .

**Démonstration de (v)** La condition est évidemment nécessaire par (iv). Réciproquement on a

$$\{j_A \leqslant \gamma\} = \left\{ \begin{array}{ccc} \gamma \cdot A & & \gamma \in \mathbb{R}_+^* \\ & \text{si} & \\ \emptyset & & \gamma \in \mathbb{R}_-^* \end{array} \right. ,$$

tandis que

$$\{j_A \leqslant 0\} = \{j_A = 0\} = \bigcap_{\gamma \in \mathbb{R}_+^*} \{j_A \leqslant \gamma\} \ .$$

**Démonstration de (vi)** L'inclusion

$$\overline{\mathrm{co}}\left(\bigcup_{j \in J} \{q_j \leqslant 1\}\right) \subset \left\{\bigwedge_{j \in J} q_j \leqslant 1\right\}$$

est évidente car on a $\bigwedge_{j \in J} q_j \leqslant q_k$ pour tout $k \in J$ et l'ensemble du membre de droite est fermé par hypothèse. Réciproquement nous pouvons supposer que $\bigwedge_{j \in J} q_j(\varphi) < 1$ car, pour tout $\varphi \in F$ , on a $\varphi = \lim_{r \to 1-} r \cdot \varphi$ . Il existe donc $\left(\varphi_j\right)_{j \in J} \subset F^{(J)}$ tel que $\varphi = \sum_{j \in J} \varphi_j$ et $\sum_{j \in J} q_j\left(\varphi_j\right) \leqslant 1$ ; en considère les parties finies

$$K := \left\{j \in J \;\middle|\; \varphi_j \neq 0\right\} \quad \text{et} \quad L := \left\{j \in J \;\middle|\; q_j\left(\varphi_j\right) \neq 0\right\} \ .$$

Il suffit alors de décomposer $\varphi$ sous la forme

$$\varphi = \left(1 - \sum_{j \in J} q_j\left(\varphi_j\right)\right) \cdot 0 + \sum_{l \in L} q_l\left(\varphi_l\right) \cdot \frac{\varphi_l}{q_l\left(\varphi_l\right)}$$

si $K \smallsetminus L = \emptyset$ , et

$$\varphi = \sum_{k \in K \smallsetminus L} \frac{1}{\#\left(K \smallsetminus L\right)} \cdot \left(1 - \sum_{j \in J} q_j\left(\varphi_j\right)\right) \cdot \varphi_k + \sum_{l \in L} q_l\left(\varphi_l\right) \cdot \frac{\varphi_l}{q_l\left(\varphi_l\right)}$$

sinon.

**Démonstration de (vii)** C'est immédiat, puisque $\varphi \in \alpha \cdot \{p \leqslant 1\}$ est équivalent à $p(\varphi) \leqslant \alpha$ .

□

**EXEMPLE** Dans la dualité $\langle \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \rangle$ , on a

$$\left(\mathbb{R}_+^n\right)^\circ = \mathbb{R}_+^n \ .$$

Si $X$ est un espace localement compact, dans la dualité $\langle \mathcal{K}_{\mathbb{R}}(X), \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(X)\rangle$ , on a

$$\mathcal{K}_+(X)^{\circ} = \mathcal{M}_+(X) \ .$$

Dans la semi-dualité $\langle \mathbb{C}|\, \mathbb{C}\rangle$ , on a

$$(\mathbb{R}_+)^{\circ} = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \ .$$

**THEOREME (des bipolaires)** *Pour toute partie $A$ de $F$ , on a*

$$(j_A)^{\circ\circ} = \mathrm{sl}_{-A^{\circ}} \ .$$

*En outre les fonctionnelles sous-linéaires $\mathrm{sl}_{-A^{\circ}}$ et $\mathrm{sl}_{A^a}$ sont respectivement les jauges de Minkowsky de*

$$\overline{\mathrm{co}}\,(A \cup \{0\}) \quad \text{et} \quad \overline{\mathrm{cs}}\,(A) \ ,$$

*et on a*

$$A^{\circ\circ} = \overline{\mathrm{co}}\,(A \cup \{0\}) \quad , \quad A^{aa} = \overline{\mathrm{cs}}\,(A) \quad \text{et} \quad A^{\perp\perp} = \overline{\mathrm{sev}}\,(A) \ .$$

*En particulier si $p$ est une fonctionnelle sous-linéaire s.c.i. $\geqslant 0$ , alors*

$$p = \mathrm{sl}_{-\{p\leqslant 1\}^{\circ}} \ .$$

Grâce à (ii) de la proposition, on a

$$(j_A)^{\circ\circ} = \left[(1 + \infty_{\complement A})_h\right]^{\circ\circ} = \left[\infty_{\complement\, \mathrm{co}_{1+\infty_{\complement A}}}\right]^{\circ} = \mathrm{sl}_{-A^{\circ}}$$

par le corollaire 3.9.i.

Pour l'assertion concernant $\mathrm{sl}_{-A^{\circ}}$ et la première formule, nous pouvons supposer en utilisant la proposition que $A$ est une partie convexe fermée contenant 0 et que $j_A$ est une fonctionnelle sous-linéaire s.c.i. Grâce au théorème 3.9.i, on obtient

$$\mathrm{sl}_{-A^{\circ}} = (j_A)^{\circ\circ} = j_A \ ,$$

donc

$$A^{\circ\circ} = \{\varphi \in F \mid \mathrm{Re}\,\langle \varphi|\, A^{\circ}\rangle \geqslant -1\} =$$

$$= \{\varphi \in F \mid \mathrm{Re}\,\langle \varphi|\, -A^{\circ}\rangle \leqslant 1\} = \{\mathrm{sl}_{-A^{\circ}} \leqslant 1\} = \{j_A \leqslant 1\} = A \ .$$

Pour l'assertion concernant $\mathrm{sl}_{A^a}$ et la deuxième formule, nous pouvons supposer en utilisant la proposition que $A$ est une partie convexe absolument symétrique ; mais comme $A^a = -A^{\circ}$ , il vient $\mathrm{sl}_{A^a} = j_A$ et

$$A^{aa} = A^{\circ\circ} = A \ .$$

Pour la troisième formule nous pouvons supposer que $A$ est un sous-espace vectoriel fermé et on obtient $A^{\perp\perp} = A^{\circ\circ} = A$ . Finalement (vii) de la proposition montre que

$$p = j_{\{p\leqslant 1\}} = j_{\{p\leqslant 1\}}^{\circ\circ} = \mathrm{sl}_{-\{p\leqslant 1\}^{\circ}} \ .$$

□

**REMARQUE 3** La formule $A^{\perp\perp} = \overline{\mathrm{sev}}\,(A)$ étant très importante, nous en donnons une démonstration directe.

On vérifie immédiatement que $\overline{\mathrm{sev}}\,(A) \subset A^{\perp\perp}$ . Si $\varphi \notin \overline{\mathrm{sev}}\,(A)$ , considérons l'application canonique $\pi : F \longrightarrow F/\overline{\mathrm{sev}}\,(A)$ . Puisque l'espace localement convexe $F/\overline{\mathrm{sev}}\,(A)$ est séparé (théorème 2.8), et comme $[\varphi] \in F/\overline{\mathrm{sev}}\,(A) \smallsetminus \{0\}$ , il existe par le théorème de Hahn-Banach une forme semi-linéaire continue $\nu$ sur $F/\overline{\mathrm{sev}}(A)$ telle que $\langle [\varphi] | \nu \rangle \neq 0$ . Posons $\mu := \nu \circ \pi \in F^\dagger$ . On a $\langle \overline{\mathrm{sev}}(A) | \mu \rangle = \{0\}$ , donc $\mu \in A^\perp$ , et $\langle \varphi | \mu \rangle = \langle [\varphi] | \nu \rangle \neq 0$ , donc $\varphi \notin A^{\perp\perp}$ , ce qui prouve l'autre inclusion. □

**REMARQUE 4** Soient $F$ un espace préhilbertien, $(F| F)$ la semi-dualité associée et $A \subset F$ (celui de droite !). Puisque

$$A^\perp = \bigcap_{\xi \in A} \{(\cdot | \xi) = 0\} \subset F \quad \text{(celui de gauche !)}$$

et $(\cdot | \xi)$ est continue pour les topologies $\sigma(F, F)$ , $\sigma\left(F, F^\dagger\right)$ et $\mathfrak{T}_F$ , $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel fermé de $F$ pour ces topologies. Cela découle aussi de la proposition (ii) ci-dessus. L'image de $A^\perp$ dans $F^\dagger$ par l'application de Riesz n'est en général pas fermée (pour $\sigma\left(F^\dagger, F\right)$ ). Le théorème des bipolaires montre que son adhérence est l'orthogonal de $A$ dans la semi-dualité $\left\langle F | F^\dagger \right\rangle$ .

L'assertion $\mathcal{G} = \mathcal{G}^{\perp\perp}$ du théorème de la projection 1.4.v montre que $\mathcal{G}$ est fermé pour $\sigma(F, F)$ . Réciproquement on peut montrer $\mathcal{G} = \mathcal{G}^{\perp\perp}$ à l'aide du théorème des bipolaires. En effet $\mathcal{G}$ est complet, donc fermé pour $\mathfrak{T}_F$ et on obtient $\mathcal{G} = \mathcal{G}^{\perp\perp}$ dans la semi-dualité $\left\langle F | F^\dagger \right\rangle$ , donc en calculant $\mathcal{G}^\perp$ dans $F^\dagger$ ! Par ce qui précède ce $\mathcal{G}^\perp$ est l'adhérence pour $\sigma\left(F^\dagger, F\right)$ de $\mathcal{G}^\perp$ calculé dans $F$ . Leurs orthogonaux dans $F$ sont donc égaux.

**DEFINITION 2** On dit qu'une partie $A$ de $F$ est *totale* dans $F$ , si le sous-espace vectoriel engendré par $A$ est dense dans $F$ , i.e. si le sous-espace vectoriel fermé engendré par $A$ est égal à $F$ .

**COROLLAIRE** *Soit $A \subset F$ et $T : F \longrightarrow G$ une application linéaire continue.*

*(i) Un sous-espace vectoriel de $F$ est fermé si, et seulement si, il est faiblement fermé.*

*(ii) Pour que $A$ soit totale, il faut et il suffit que $A^\perp = \{0\}$ , i.e. que pour tout $\mu \in F^\dagger$ tel que $\mu = 0$ sur $A$ , on ait $\mu = 0$ .*

*(iii) On a*

$$T(A)^\perp = \left(T^\dagger\right)^{-1}\left(A^\perp\right) ,$$

*et le sous-espace vectoriel fermé engendré par $T(A)$ est $\left[\left(T^\dagger\right)^{-1}\left(A^\perp\right)\right]^\perp$ .*

*En particulier*

$$\operatorname{Ker} T^\dagger = (\operatorname{Im} T)^\perp .$$

*(iv) Pour que $T$ soit d'image dense, respectivement injective, il faut et il suffit que $T^\dagger$ soit injective, respectivement d'image dense.*

**Démonstration de (i)** C'est immédiat par le théorème 3.9.iii, puisqu'un sous-espace vectoriel est une partie convexe. Directement il suffit de montrer qu'un sous-espace vectoriel fermé $A$ est faiblement fermé. Mais on a

$$A = A^{\perp\perp} = \bigcap_{\mu \in A^\perp} \{\varphi \in F \mid \langle \varphi | \mu \rangle = 0\}$$

et $\{\langle \cdot | \mu \rangle = 0\}$ est faiblement fermé.

**Démonstration de (ii)** Pour que $A$ soit totale, il faut et il suffit que $A^{\perp\perp} = \overline{\text{sev}}\,(A) = F$ , d'où le résultat car $A^{\perp\perp\perp} = A^{\perp}$ et $F^{\perp} = \{0\}$ .

**Démonstration de (iii)** Soit $\nu \in G^{\dagger}$ . On a $\nu \in T\,(A)^{\perp}$ si, et seulement si, $\langle T\,(A)|\,\nu\rangle = \{0\}$ , i.e. $\left\langle A \left| T^{\dagger}\nu \right.\right\rangle = \{0\}$ , ce qui signifie que $T^{\dagger}\nu \in A^{\perp}$ .

**Démonstration de (iv)** Par (ii), on a $G = \overline{T\,(F)}$ si, et seulement si, $T\,(F)^{\perp} = \{0\}$ , i.e. $\left(T^{\dagger}\right)^{-1}(0) = \{0\}$ , ce qui est équivalent à l'injectivité de $T^{\dagger}$. Finalement en appliquant ce résultat à $T^{\dagger}$ , on obtient le résultat dual par (i), puisque $T = \left(T^{\dagger}\right)^{\dagger}$ (théorème 3.7.ii). $\square$

## 3.11 La topologie de Mackey

**DEFINITION** Soit $\langle F|\, G\rangle$ une semi-dualité. La *topologie de Mackey* $\tau(F,G)$ sur $F$ est définie par l'ensemble de toutes les *semi-normes de Mackey* $p$ sur $F$ , i.e. telles que

$$\mu \in F^{\circledast} \text{ et } \left|\,|\mu\rangle\right| \leqslant p \quad \Longrightarrow \quad |\mu\rangle \in |G\rangle\ .$$

Le corollaire 3.6.ii montre que toute semi-norme de Mackey sur $F$ est s.c.i.

**PROPOSITION**

*(i) Si $p$ est une semi-norme de Mackey et $q$ une semi-norme telle que $q \leqslant p$ , alors $q$ est une semi-norme de Mackey.*

*(ii) Si $p$ et $q$ sont des semi-normes de Mackey, alors $p+q$ est une semi-norme de Mackey.*

*(iii) La topologie de Mackey $\tau(F,G)$ est la plus fine des topologies localement convexes qui sont compatibles avec la semi-dualité $\langle F|\, G\rangle$ .*

La première partie est immédiate et la deuxième découle de l'exemple 3.6.3. Pour la troisième, si $\mu$ est une forme semi-linéaire continue pour la topologie de Mackey, il existe une suite $(p_j)_{j=1,\ldots,n}$ de semi-normes de Mackey et une constante $c \in \mathbb{R}_+$ telles que $\left|\,|\mu\rangle\right| \leqslant c\cdot \max_{j=1,\ldots,n} p_j$ . Mais $c\cdot \max_{j=1,\ldots,n} p_j$ est une semi-norme de Mackey par (i) et (ii), donc $|\mu\rangle \in |G\rangle$ . Réciproquement, si $|\mu\rangle \in |G\rangle$ et $\nu$ est une forme semi-linéaire sur $F$ telle que $\left|\,|\nu\rangle\right| \leqslant \left|\,|\mu\rangle\right|$ , alors $\nu$ est proportionnelle à $\mu$ par le lemme 3.4 ; ceci montre que $\left|\,|\mu\rangle\right|$ est une semi-norme de Mackey, donc que $\mu \in (F_\tau)^\dagger$ . Nous avons ainsi prouvé que la topologie de Mackey est compatible avec la semi-dualité. C'est la plus fine, car toute semi-norme continue pour une topologie compatible avec la dualité est évidemment une semi-norme de Mackey. — $\square$

Nous pouvons maintenant généraliser le scolie 3.7.ii.

**THEOREME**

*(i) La topologie d'un espace tonnelé est celle de Mackey.*

*(ii) Soient $F,G$ des espaces localement convexes et $T : F \longrightarrow G$ une application linéaire. Pour que $T$ soit continue pour les topologies de Mackey, il faut et il suffit que $T$ soit faiblement continue. On a donc*

$$\mathcal{L}(F,G) \subset \mathcal{L}(F_\sigma,G_\sigma) = \mathcal{L}(F,G_\sigma) = \mathcal{L}(F_\tau,G) = \mathcal{L}(F_\tau,G_\tau)\ .$$

*(iii) Si $p$ est une forme sous-linéaire continue sur $F$ , alors*

$$\mathrm{co}_p = \left\{ \mu \in F^\dagger \;\middle|\; \mathrm{Re}\,|\mu\rangle \leqslant p \right\}$$

*est une partie convexe (faiblement) compacte de $F^\dagger$ .*

*En particulier la boule unité du semi-dual fort d'un espace normé est faiblement compacte.*

*En outre si $A$ est une partie de $F^\dagger$ , les propriétés suivantes sont équivalentes :*

*(a) $\overline{\mathrm{co}}(A)$ est compacte.*

(b) $\overline{\mathrm{cs}}\,(A)$ *est compacte.*

(c) $\mathrm{sn}_A = \sup |\,|A\rangle|$ *est une semi-norme de Mackey.*

(d) $\mathrm{sl}_A = \sup \mathrm{Re}\,|A\rangle$ *une forme sous-linéaire continue pour la topologie de Mackey.*

**Démonstration de (i)** Il nous suffit de montrer que la topologie de Mackey est moins fine que celle de $F$ , donc que toute semi-norme de Mackey sur $F$ est continue. Mais une telle semi-norme est s.c.i. et par suite continue, puisque $F$ est tonnelé.

**Démonstration de (ii)** On a tout d'abord $\mathcal{L}(F_\tau, G_\tau) \subset \mathcal{L}(F_\tau, G)$ , car

$$F_\tau \xrightarrow{T} G_\tau \xrightarrow{\mathrm{Id}} G$$

est continue. L'inclusion $\mathcal{L}(F_\tau, G) \subset \mathcal{L}(F_\tau, G_\sigma)$ est triviale, et $\mathcal{L}(F_\tau, G_\sigma) = \mathcal{L}(F_\sigma, G_\sigma)$ par le scolie 3.7.i. Puisque $\mathcal{L}(F, G) \subset \mathcal{L}(F_\sigma, G_\sigma)$ par le scolie 3.7.ii, il nous reste à prouver que $\mathcal{L}(F_\sigma, G_\sigma) \subset \mathcal{L}(F_\tau, G_\tau)$ .

Si $q$ est une semi-norme de Mackey sur $G$ , nous devons montrer que $q \circ T$ est une semi-norme de Mackey sur $F$ , i.e. que $\mu \in F^{\circledast}$ et $\left|\,|\mu\rangle\right| \leqslant q \circ T$ entraînent $\mu \in F^{\dagger}$ . Or $\mu$ s'annule sur $\mathrm{Ker}\,T$ , donc factorise par $T$ en une forme semi-linéaire $\tilde{\nu} : \mathrm{Im}\,T \longrightarrow \mathbb{K}$ telle que $\mu = \tilde{\nu} \circ T$ et $\left|\,|\tilde{\nu}\rangle\right| \leqslant q$ sur $\mathrm{Im}\,T$ . Elle possède donc un prolongement $\nu$ à $G$ par le théorème de Hahn-Banach 3.6 tel que $\left|\,|\nu\rangle\right| \leqslant q$ . Puisque $q$ est une semi-norme de Mackey on a $\nu \in G^{\dagger}$ , puis $\mu = \nu \circ T \in F^{\dagger}$ par la continuité faible de $T$ .

**Démonstration de (iii)** L'application canonique $(F_{\mathbb{R}})^{*} \longrightarrow F^{\circledast}$ de la remarque 3.6.3 étant évidemment un homéomorphisme pour les topologies faibles, on peut se restreindre au cas réel. On a

$$\mathrm{co}_p = \left\{ \mu \in F^{\circledast} \;\middle|\; |\mu\rangle \leqslant p \right\} .$$

Cet ensemble convexe est fermé dans $F^{\circledast}$ par la proposition 3.9. Remarquons maintenant que $F^{\circledast}$ est un sous-espace topologique de $\mathbb{R}^F$ , muni de la topologie de la convergence ponctuelle. Il est également fermé puisqu'il est défini par des égalités ponctuelles. Finalement, on a

$$\mathrm{co}_p \subset \prod_{\varphi \in F} \left[-p(-\varphi), p(\varphi)\right] ,$$

et le produit des intervalles compacts $[-p(-\varphi), p(\varphi)]$ est compact par le théorème de Tychonoff.

En particulier la boule unité du semi-dual fort d'un espace normé est égale à $\mathrm{co}_{\|\cdot\|}$ , donc faiblement compacte.

Soit maintenant $A \subset F^{\dagger}$ .

**(a) ⇒ (b)** Si $\overline{\mathrm{co}}\,(A)$ est compacte, il en est de même de $\overline{\mathrm{cs}}\,(A) = \overline{\mathrm{cs}}\,(\overline{\mathrm{co}}\,(A))$ par la remarque 3.9.7.

**(b) ⇒ (c)** Puisque $F^{\dagger} \hookrightarrow F^{\circledast}$ est continue, $\overline{\mathrm{cs}}\,(A)$ est une partie convexe compacte, donc fermée, de $F^{\circledast}$ . Par le corollaire 3.9.iii, dans la semi-dualité $\langle F|\, F^{\circledast}\rangle$ , on a $\overline{\mathrm{cs}}\,(A) = \mathrm{co}_{\,\mathrm{sn}_A}$ , donc

$$\left\{ \mu \in F^{\circledast} \;\middle|\; \left|\,|\mu\rangle\right| \leqslant \mathrm{sn}_A \right\} = \overline{\mathrm{cs}}\,(A) \subset F^{\dagger} ,$$

ce qui montre que $\mathrm{sn}_C$ est une semi-norme de Mackey.

**(c) ⇒ (d)** Cela découle de la remarque 2.3.2.ii car on a $\mathrm{sl}_A \leqslant \mathrm{sn}_A$ .

**(d) ⇒ (a)** Par le corollaire 3.9.iii, on a $\overline{\mathrm{co}}\,(A) = \mathrm{co}_{\mathrm{sl}_A}$ , d'où le résultat par ce qui précède, puisque la topologie de Mackey est compatible avec la dualité par la proposition (iii). – □

**REMARQUE** Soit $F$ un espace de Banach. Puisque $F$ est tonnelé, sa topologie est celle de Mackey $\tau\left(F, F^{\dagger}\right)$ . Si $F$ est réflexif, la topologie forte de son semi-dual est la topologie de Mackey $\tau\left(F^{\dagger}, F\right)$ .

## 3.12 Intégration vectorielle faible

**Soient $X$ un espace topologique, $m$ une intégrale de Radon positive sur $X$ et $F$ un espace localement convexe séparé.**

Nous allons définir la notion d'intégrale d'une fonction à valeurs dans le semi-dual $F^\dagger$ de $F$ . Rappelant que tout espace localement convexe séparé est le semi-dual de son semi-dual faible (cf. remarque 3.7.2), nous aurons ainsi aussi défini la notion d'intégrale d'une fonction à valeurs dans un espace localement convexe séparé quelconque. La situation que nous considérons est en fait plus simple dans les notations et correspond aux besoins pratiques.

Si l'on considère la semi-dualité $\langle \mathbb{K}^n | \mathbb{K}^n \rangle$ définie par $\langle \varphi | \mu \rangle := \sum_{j=1}^n \overline{\varphi_j} \cdot \mu_j$ et la base canonique $(e_j)_{j=1,\ldots,n}$ de $\mathbb{K}^n$ , on a

$$\langle e_j | \mu \rangle = \mu_j \quad \text{pour tout } j = 1, \ldots, n \ .$$

Ceci nous conduit à interpréter dans la semi-dualité $\left\langle F \middle| F^\dagger \right\rangle$ le nombre $\langle \varphi | \mu \rangle$ comme une "combinaison linéaire" de "composantes" de $\mu$ (voir aussi 4.1).

**DEFINITION 1** On dit qu'une application

$$\zeta : X \longrightarrow F^\dagger$$

est *scalairement $m$-intégrable* , *scalairement $m$-négligeable* et *scalairement $m$-mesurable* si, pour tout $\varphi \in F$ , la fonction

$$\langle \varphi | \zeta \rangle : x \longmapsto \langle \varphi | \zeta(x) \rangle : X \longrightarrow \mathbb{K}$$

est respectivement $m$-intégrable, $m$-négligeable et $m$-mesurable.

Si $\zeta : X \longrightarrow F^\dagger$ est scalairement $m$-intégrable, alors

$$\int \zeta \, dm : \varphi \longmapsto \int \langle \varphi | \zeta \rangle \, dm$$

est une forme semi-linéaire sur $F$ , i.e. un élément de $F^{\circledast}$ . Dans la semi-dualité $\left\langle F \middle| F^{\circledast} \right\rangle$ on a donc

$$\left\langle \varphi \middle| \int \zeta \, dm \right\rangle = \int \langle \varphi | \zeta \rangle \, dm \quad \text{pour tout } \varphi \in F \ .$$

**DEFINITION 2** On dit que $\int \zeta \, dm$ est l' *intégrale (faible)* de $\zeta$ (par rapport à $m$ ).

Si $\int \zeta \, dm \in F^\dagger$ , i.e. si

$$\int \zeta \, dm : \varphi \longmapsto \int \langle \varphi | \zeta \rangle \, dm$$

est une forme semi-linéaire continue sur $F$ , nous dirons que $\zeta$ est *scalairement $m$-intégrable dans $F^\dagger$* .

Cette notion d'intégrabilité est malheureusement trop faible. Par exemple si $\zeta$ est scalairement $m$-intégrable dans $F^\dagger$, pour tout $g \in \mathbf{L}^\infty(m)$ , l'application

$$g \cdot \zeta : x \longmapsto g(x) \cdot \zeta(x)$$

est scalairement $m$-intégrable, mais pas nécessairement dans $F^\dagger$ . Remarquons encore que

$$\langle \cdot | \zeta \rangle : F \longrightarrow \mathbf{L}^1(m)$$

est une application semi-linéaire et que

$$\varphi \longmapsto \int |\langle \varphi | \zeta \rangle| \, dm$$

est une semi-norme sur $F$ , mais qu'elles ne sont pas nécessairement continues.

Rappelons qu'une application linéaire $\Phi$ d'un espace localement convexe séparé $G$ dans $F$ possède une adjointe $\Phi^\dagger : F^\dagger \longrightarrow G^\dagger$ si, et seulement si, $\Phi$ est faiblement continue (cf. scolie 3.7.i) ; de même une application $\Psi : F^\dagger \longrightarrow G^\dagger$ est (faiblement) continue si, et seulement si, elle est l'adjointe d'une application $\Phi : G \longrightarrow F$ .

En outre le semi-dual fort de $\mathbf{L}^1(m)$ est $\mathbf{L}^{\infty,\bullet}(m)$ dans la semi-dualité

$$\langle f | g \rangle_{\mathbf{L}^1(m)} := \int \overline{f} \cdot g \, dm \ .$$

(cf. exemple 3.8.2).

**PROPOSITION** *Soit $\zeta : X \longrightarrow F^\dagger$ une application. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

*(i) Pour tout $g \in \mathbf{L}^\infty(m)$ , l'application $g \cdot \zeta$ est scalairement $m$-intégrable dans $F^\dagger$ .*

*(ii) $\zeta$ est scalairement $m$-intégrable et l'application linéaire*

$$\langle \zeta | \cdot \rangle : F \longrightarrow \mathbf{L}^1(m) : \varphi \longmapsto \langle \zeta | \varphi \rangle$$

*est faiblement continue, i.e. possède une adjointe.*

*(iii) $\zeta$ est scalairement $m$-intégrable et*

$$\varphi \longmapsto \|\langle \varphi | \zeta \rangle\|_1 = \int |\langle \varphi | \zeta \rangle| \, dm$$

*est une semi-norme continue sur $F$ , si $F$ est tonnelé, ou dans le cas général une semi-norme de Mackey sur $F$ .*

*Dans ce cas l'adjointe de $\langle \zeta | \cdot \rangle$ est*

$$\int \diamond \cdot \zeta \, d\mu : g \longmapsto \int g \cdot \zeta \, dm : \mathbf{L}^\infty(m) \longrightarrow F^\dagger$$

*et elle est faiblement continue pour $\sigma(\mathbf{L}^{\infty,\bullet}(m), \mathbf{L}^1(m))$ .*

**(i) $\Longleftrightarrow$ (ii)** Il est clair que $\zeta$ est scalairement $m$-intégrable si, et seulement si $g \cdot \zeta$ est scalairement $m$-intégrable pour tout $g \in \mathbf{L}^{\infty,\bullet}(m)$ . Dans la semi-dualité $\left\langle F \middle| F^{\circledast} \right\rangle$ on a

$$\left\langle \varphi \middle| \int g \cdot \zeta \, dm \right\rangle = \int \langle \varphi | g \cdot \zeta \rangle \, dm = \int \overline{\langle \zeta | \varphi \rangle} \cdot g \, dm = \langle \langle \zeta | \varphi \rangle | g \rangle_{\mathbf{L}^1(m)} \ ,$$

montrant que l'adjointe algébrique de $\langle \zeta | \cdot \rangle$ est

$$\langle \zeta | \cdot \rangle^{\circledast} = \int \diamond \cdot \zeta \, dm : \mathbf{L}^{\infty,\bullet}(m) \longrightarrow F^{\circledast} \ .$$

On en déduit immédiatement que $\langle \zeta | \cdot \rangle$ possède une adjointe si, et seulement si, $\int g \cdot \zeta \, dm \in F^{\dagger}$ pour tout $g \in \mathbf{L}^{\infty,\bullet}(m)$ .

**(ii) $\Rightarrow$ (iii)** L'application $\langle \zeta | \cdot \rangle$ étant faiblement continue, elle est continue si $F$ est tonnelé grâce au scolie 3.7.ii. Plus généralement elle est continue pour les topologies de Mackey par le théorème 3.11.ii. Mais comme $\mathbf{L}^1(m)$ est un espace de Banach, il est muni de sa topologie de Mackey par le théorème 3.11.i, d'où le résultat.

**(iii) $\Rightarrow$ (i)** On a

$$\left| \int \langle \varphi | \, g \cdot \zeta \rangle \; dm \right| \leqslant \|g\|_{\infty} \cdot \int |\langle \varphi | \, \zeta \rangle| \; dm \ ,$$

donc

$$\varphi \longmapsto \int \langle \varphi | \, g \cdot \zeta \rangle \; dm$$

est une forme semi-linéaire continue sur $F_{\tau}$ , donc aussi sur $F$ . □

**DEFINITION 3** Nous dirons que $\zeta$ est *$m$-intégrable (au sens de Pettis)* dans $F^{\dagger}$ si l'une des conditions équivalentes de la proposition ci-dessus est satisfaite.

Il est possible de généraliser cette notion au cas où $m$ est une intégrale de Radon complexe.

Du point de vue pratique on peut se dispenser d'introduire la topologie de Mackey, car on a la condition suffisante suivante :

**SCOLIE** *Si $\|\langle \cdot | \, \zeta \rangle\|_1$ est continue sur $F$ , alors $\zeta$ est $m$-intégrable dans $F^{\dagger}$ .*

C'est immédiat puisqu'une semi-norme continue est continue pour la topologie de Mackey, mais en recopiant la démonstration (iii)$\Rightarrow$(i) de la proposition on évite l'introduction de cette notion. □

**LEMME**

*(i) L'ensemble des applications $m$-intégrables dans $F^{\dagger}$ est un espace vectoriel.*

*(ii) Une application scalairement $m$-négligeable est $m$-intégrable dans $F^{\dagger}$ et son intégrale est $0$ .*

*(iii) Soient $\Phi : F^{\dagger} \longrightarrow G^{\dagger}$ une application continue et $\zeta : X \longrightarrow F^{\dagger}$ une application $m$-intégrable dans $F^{\dagger}$ . Alors $\Phi \circ \zeta : X \longrightarrow G^{\dagger}$ est $m$-intégrable dans $G^{\dagger}$ et on a*

$$\Phi \left( \int \zeta \; dm \right) = \int \Phi \circ \zeta \; dm \ .$$

La première et la deuxième parties sont immédiates. Quant à la troisième, si $\zeta$ est $m$-intégrable dans $F^{\dagger}$ , pour tout $\gamma \in G$ et $g \in \mathbf{L}^{\infty}(m)$ , on a

$$\langle \gamma | \, g \cdot (\Phi \circ \zeta) \rangle = \left\langle \Phi^{\dagger}\gamma \middle| \, g \cdot \zeta \right\rangle \in \mathbf{L}^1(m)$$

et

$$\int \langle \gamma | \, g \cdot (\Phi \circ \zeta) \rangle \; dm = \int \left\langle \Phi^{\dagger}\gamma \middle| \, g \cdot \zeta \right\rangle \; dm = \left\langle \Phi^{\dagger}\gamma \middle| \int g \cdot \zeta \, dm \right\rangle = \left\langle \gamma \middle| \Phi \left( \int g \cdot \zeta \; dm \right) \right\rangle \ ,$$

donc $\gamma \longmapsto \int \langle \gamma | \, g \cdot (\Phi \circ \zeta) \rangle \; dm$ est évidemment une forme semi-linéaire continue sur $G$ . □

**DEFINITION 4** Nous désignerons par $\mathbf{L}^1\left(m, F^\dagger\right)$ l'espace vectoriel des classes d'applications $\zeta : X \longrightarrow F^\dagger$ qui sont $m$-intégrables dans $F^\dagger$ , modulo les applications scalairement $m$-négligeables. L'intégrale d'une telle application, qui ne dépend évidemment que de sa classe, définit une application linéaire

$$\int : \mathbf{L}^1\left(m, F^\dagger\right) \longrightarrow F^\dagger \ .$$

**REMARQUE 1** Il est important de préciser qu'avec cette notion d'intégrale nous n'avons en aucune manière aborder le problème de l'approximation de $\int \zeta \, dm$ , par exemple par des intégrales de fonctions élémentaires (continues à support compact ou en escalier). Il en est de même de la validité du théorème de Lebesgue.

**THEOREME** *Soit $\zeta : X \longrightarrow F^\dagger$ une application scalairement $m$-mesurable.*

*(i) Si $p$ est une semi-norme continue sur $F$ (ou plus généralement sur $F_\tau$ ) et si*

$$\|\zeta\|_p : x \longmapsto \|\zeta(x)\|_p := \sup_{\varphi \in F, p(\varphi) \leqslant 1} |\langle \varphi | \zeta(x) \rangle| : X \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

*est $m$-intégrable, alors $\zeta$ est $m$-intégrable dans $F^\dagger$ . On a*

$$\int \zeta \, dm \in \int \|\zeta\|_p \, dm \cdot \mathrm{co}_p \ .$$

*(ii) On suppose que $F$ est tonnelé et que $\zeta$ est scalairement $m$-intégrable. S'il existe une suite $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de parties $m$-intégrables telles que*

$$m^*\left(X \smallsetminus \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k\right) = 0$$

*et que $\zeta_{|A_k}$ soit bornée dans $F^\dagger$ , alors $\zeta$ est $m$-intégrable dans $F^\dagger$ .*

*La condition est en particulier satisfaite si $m$ est modérée et si $\zeta$ est $m$-mesurable au sens de Lusin, par exemple continue.*

**Démonstration de (i)** Utilisant l'inégalité de Hölder abstraite (exemple 3.4.1) on obtient

$$\int |\langle \varphi | \zeta \rangle| \, dm \leqslant \int p(\varphi) \cdot \|\zeta(x)\|_p \, dm(x) = \left(\int \|\zeta(x)\|_p \, dm(x)\right) \cdot p(\varphi) \ ,$$

d'où le résultat par le scolie. En outre

$$\left|\int \langle \cdot | \zeta \rangle \, dm\right| \leqslant \int \|\zeta\|_p \, dm \cdot p \ ,$$

donc $\int \zeta \, dm \in \int \|\zeta\|_p \, dm \cdot \mathrm{co}_p$ .

**Démonstration de (ii)** Remarquons tout d'abord que, pour tout $\varphi \in F$ , on a

$$\int |\langle \varphi | \zeta \rangle| \, dm = \sup_{k \in \mathbb{N}} \int 1_{A_k} \cdot |\langle \varphi | \zeta \rangle| \, dm$$

par le théorème de Beppo Levi. D'autre part il vient

$$\int 1_{A_k} \cdot |\langle \varphi | \zeta \rangle| \, dm \leqslant m(A_k) \cdot \sup_{x \in A_k} |\langle \varphi | \zeta(x) \rangle| < \infty \, ;$$

mais le membre de droite est une semi-norme continue sur $F$ par le scolie 2.13, donc aussi le membre de gauche. Une seconde utilisation du scolie 2.13 montre que

$$\varphi \longmapsto \int |\langle \varphi | \zeta \rangle| \, dm$$

est une semi-norme continue sur $F$ , d'où le résultat par le scolie ci-dessus. $\square$

**REMARQUE 2** La condition de (i) signifie que $\zeta$ est de la forme $\zeta = f \cdot \widetilde{\zeta}$ pour $f \in \mathbf{L}^1(m)$ et une application scalairement $m$-mesurable $\widetilde{\zeta} : X \longrightarrow F^\dagger$ telle que $\left|\left\langle \cdot | \widetilde{\zeta} \right\rangle\right| \leqslant p$ , où $p$ est une semi-norme de Mackey sur $F$ , ce qui revient à dire que $\widetilde{\zeta}(X)$ est contenue dans une partie convexe (absolument symétrique et faiblement) compacte de $F^\dagger$ .

Il suffit de poser

$$f := \|\zeta\|_p \quad \text{et} \quad \widetilde{\zeta} := \frac{1}{\|\zeta\|_p} \cdot \zeta \, ;$$

on a donc $\widetilde{\zeta}(X) \subset \mathrm{co}_p$ et $\mathrm{co}_p$ est une partie convexe absolument symétrique compacte de $F^\dagger$ par le théorème 3.11.iii. Pour la réciproque il suffit de poser $p := \mathrm{sn}_C$ . $\square$

Cette remarque est essentiellement utilisée dans la situation suivante. On veut intégrer une application $\zeta : X \longrightarrow G$ , où $G$ est un espace localement convexe qui n'est pas naturellement un dual faible. Il suffit de poser $F := G^\dagger$ , donc $F^\dagger = \left(G^\dagger\right)^\dagger = G_\sigma$ . En général $F$ , même muni de la topologie $\tau\left(G^\dagger, G\right)$ , n'est pas tonnelé.

Si $G$ est un espace de Fréchet, une condition suffisante pour que $\widetilde{\zeta}(X)$ soit contenue dans une partie convexe (absolument symétrique et faiblement) compacte de $G$ est décrite dans l'exercice 3.9.3

**REMARQUE 3** Soit $\zeta : X \longrightarrow F^\dagger$ de la forme $\zeta = f \cdot \widetilde{\zeta}$ pour $f \in \mathbf{L}^1(m)$ . Si $\widetilde{\zeta}$ est $m$-mesurable au sens de Lusin (pour la topologie faible sur $F^\dagger$ ) et $\widetilde{\zeta}(X)$ est contenue dans une partie convexe absolument symétrique (cf. définition 3.9.5) bornée et complète $C$ pour $\tau\left(F^\dagger, F\right)$ , alors $\zeta$ est $m$-intégrable dans $F^\dagger$ .

Par hypothèse il existe une suite disjointe $(K_l)_{l \in \mathbb{N}}$ d'ensembles compacts telle que

$$(f \cdot m)^* \left( X \smallsetminus \bigcup_l K_l \right) = 0$$

et que $\widetilde{\zeta}_{|K_l}$ soit continue pour tout $l$ . En modifiant légèrement le théorème de Krein [3], IV, §5, n° 5, théorème 3, on voit que $\overline{\mathrm{cs}}\left[\widetilde{\zeta}(K_l)\right]$ est une partie convexe absolument symétrique compacte de $F^\dagger$ contenue dans $C$ et on a

$$\int 1_{K_l} \cdot \zeta \, dm \in \left( \int 1_{K_l} \cdot |f| \, dm \right) \cdot C \, .$$

Pour toute semi-norme continue $q$ sur $F_\tau^\dagger$ , on a donc

$$q\left( \int 1_{K_l} \cdot \zeta \, dm \right) \leqslant \left( \int 1_{K_l} \cdot |f| \, dm \right) \cdot \sup_{\mu \in C} q(\mu) \, .$$

Comme $\sum_l \int 1_{K_l} \cdot |f| \, dm = \int |f| \, dm$ , la suite $\left(\sum_{l=0}^k \int 1_{K_l} \cdot \zeta \, dm\right)$ est de Cauchy dans $F_\tau$ , donc converge dans $C$ . Par le théorème de Lebesgue, pour tout $\varphi \in F$ , on obtient

$$\left\langle \varphi \middle| \sum_{l=0}^{\infty} \int 1_{K_l} \cdot \zeta \, dm \right\rangle = \sum_{l=0}^{\infty} \int 1_{K_l} \cdot \langle \varphi | \zeta \rangle \, dm = \int \langle \varphi | \zeta \rangle \, dm ,$$

ce qui finit de prouver que $\zeta$ est $m$-intégrable dans $F^\dagger$ , puisque pour tout $g \in \mathbf{L}^\infty(m)$ , on a $g \cdot f \in \mathbf{L}^1(m)$ . □

**REMARQUE 4** Si $\zeta : X \longrightarrow F^\dagger$ est une application scalairement $m$-intégrable telle que $\zeta(K)$ soit contenue dans une partie convexe compacte de $F^\dagger$ , pour tout $K \in \mathfrak{K}(X)$ , alors

$$\int \zeta \, dm \in (F_\beta)^\dagger \ .$$

La topologie forte $\beta\left(F, F^\dagger\right)$ est définie en 3.16.

En effet $\left|\left\langle \cdot \middle| \int 1_K \cdot \zeta \, dm \right\rangle\right|$ est une semi-norme continue sur $F$ et, puisque $\langle \varphi | \zeta \rangle$ est $m$-intégrable, donc $m$-modérée, pour tout $\varphi \in F$ , la proposition 15.12.ii du cours d'Analyse [17] montre que

$$\left|\left\langle \varphi \middle| \int \zeta \, dm \right\rangle\right| \leqslant \int |\langle \varphi | \zeta \rangle| \, dm = \sup_{K \in \mathfrak{K}(X)} \int |\langle \varphi | 1_K \cdot \zeta \rangle| \, dm < \infty \ .$$

Le membre de droite est donc une semi-norme s.c.i. sur $F$ , donc continue sur $F_\beta$ par définition, ce qui finit de prouver que $\int \zeta \, dm \in (F_\beta)^\dagger$ . □

**REMARQUE 5** On dit que $F$ possède la *propriété* $(GDF)$ (graphe dénombrablement fermé) si toute application linéaire $T$ de $F$ dans un espace de Banach $G$ dont le graphe $\mathrm{Gr}\, T$ est séquentiellement fermé est continue. Le théorème du graphe fermé 3.14 montre qu'un espace de Fréchet possède la propriété $(GDF)$ . On peut montrer [3], Appendice, n° 2, proposition 2, que $F$ possède aussi la propriété $(GDF)$ s'il est final par rapport à une famille d'applications linéaires $T_j : F_j \longrightarrow F$ et si chaque $F_j$ possède la propriété $(GDF)$ .

Les espaces $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , $\mathcal{K}(X)$ pour $X$ localement compact et $\mathcal{D}(X)$ pour un ouvert $X$ de $\mathbb{R}^n$ possèdent la propriété $(GDF)$ .

En outre [3], §1, n° 4, théorème 1, on a le

**THEOREME (de Gelfand-Dunford)** *Si $F$ possède la propriété $(GDF)$ , alors toute application $\zeta : X \longrightarrow F^\dagger$ scalairement $m$-intégrable est $m$-intégrable dans $F^\dagger$ .*

Dans les exemples qui suivent

$$X \text{ est un espace localement compact}$$

et nous considérons la semi-dualité $\langle \mathcal{K}(X) | \mathcal{M}(X) \rangle$ de l'exemple 3.4.8.

**EXEMPLE 1** Soient $Y$ un espace topologique séparé, $\nu$ une intégrale de Radon positive sur $Y$ et $\left(\mu_y\right)_{y \in Y}$ une famille d'intégrales de Radon positives sur $X$ . Si l'application

$$\mu_\diamond : y \longmapsto \mu_y : Y \longrightarrow \mathcal{M}(X)$$

est scalairement $\nu$-intégrable, alors elle est $\nu$-intégrable dans $\mathcal{M}(X)$ .

En effet, pour tout $g \in \mathbf{L}^{\infty}(\nu)$ ,

$$\varphi \longmapsto \int \langle \varphi | \mu_{\diamond} \rangle \cdot g \, d\nu : \mathcal{K}(X) \longrightarrow \mathbb{K}$$

est une combinaison linéaire de formes linéaires positives puisque

$$g = \sum_{\varepsilon^4 = 1} \varepsilon \cdot g_{\varepsilon} \quad \text{pour certaines fonctions } g_{\varepsilon} \in \mathbf{L}_{+}^{\infty}(\mu) \ ;$$

c'est donc une intégrale de Radon. Ceci montre que $g \cdot \mu_{\diamond}$ est scalairement $\nu$-intégrable dans $\mathcal{M}(X)$ , donc que $\mu_{\diamond}$ est $\nu$-intégrable par définition. □

Cet exemple se généralise au cas où $\nu$ est une intégrale de Radon quelconque sur $Y$ , puisque $\mu_{\diamond}$ est scalairement $\nu_{\varepsilon}$-intégrable pour tout $\varepsilon \in \{\pm 1, \pm i\}$ . On peut également le généraliser au cas où $(\mu_y)_{y \in Y}$ une famille d'intégrales de Radon quelconques sur $X$ , mais en supposant alors que $|\mu_{\diamond}|$ est scalairement $\nu$-intégrable.

**EXEMPLE 2** Soit $\mu$ une intégrale de Radon. L'application

$$\varepsilon_{\diamond} : x \longmapsto \varepsilon_x : X \longrightarrow \mathcal{M}(X)$$

est scalairement $\mu$-intégrable puisque, pour tout $\varphi \in \mathcal{K}(X)$ , on a

$$\langle \varepsilon_{\diamond} | \varphi \rangle = \varphi \in \mathcal{K}(X) \subset \mathbf{L}^1(\mu) \ .$$

Elle est donc $\mu$-intégrable dans $\mathcal{M}(X)$ par l'exemple précédent et on a

$$\int \varepsilon_x \, d\mu(x) = \mu \ .$$

En effet

$$\int \langle \varphi | \varepsilon_x \rangle \, d\mu(x) = \int \overline{\varphi(x)} \, d\mu(x) = \langle \varphi | \mu \rangle \ .$$

En fait il est également clair que

$$\varphi \longmapsto \int |\langle \varphi | \varepsilon \rangle| \, d|\mu| = \|\varphi\|_1$$

est une semi-norme continue sur $\mathcal{K}(X)$ , puisque pour tout $K \in \mathfrak{K}(X)$ , on a

$$\|\varphi\|_1 \leqslant |\mu|(K) \cdot \|\varphi\|_{\infty} \quad \text{pour tout } \varphi \in \mathcal{K}(X, K) \ .$$

En particulier étant donné $v \in \mathbb{R}^n$ , on a

$$\varepsilon_v = \int \varepsilon_x \, d\varepsilon_v(x) \ .$$

En utilisant les "fonctions de Dirac", le physicien écrira

$$\delta(u - v) = \int \delta(u - x) \cdot \delta(x - v) \, dx \quad \text{pour tout } u \in \mathbb{R}^n \ .$$

**EXEMPLE 3** Soit $\mu$ une intégrale de Radon positive sur $X$ telle que

$$\mu = \int \mu_y \, d\nu(y)$$

soit une décomposition de $\mu$ . Alors $\mu_{\diamond}$ est $\nu$-intégrable dans $\mathcal{M}(X)$ et $\mu = \int \mu_{\diamond} \, d\nu$ .

En effet par le théorème d'intégrations successives (cf. AN.22.1), pour tout $\varphi \in \mathcal{K}(X)$ , la fonction

$$y \longmapsto \int \varphi \, d\mu_y = \langle \mu_y | \varphi \rangle$$

est $\nu$-intégrable, ce qui montre que $\mu_\diamond$ est scalairement $\nu$-intégrable dans $\mathcal{M}(X)$ . On conclut à l'aide de l'exemple 1. $\square$

## 3.13 Formes sesquilinéaires, applications linéaires et produits tensoriels

**DEFINITION** Etant donné des espaces localement convexes $F, G$ nous désignerons par $\mathcal{S}(F,G)$ et $S(F,G)$ les espaces vectoriels des formes sesquilinéaires à gauche sur $F \times G$ qui sont séparément respectivement globalement continues.

Utilisant la propriété universelle du produit tensoriel inductif semi-linéaire à droite (proposition 2.14.i), on vérifie immédiatement les assertions suivantes :

**PROPOSITION** *Il y a une correspondance biunivoque entre les applications linéaires*

$$S : G \longrightarrow F^{\circledast} \ ,$$

*les formes sesquilinéaires à gauche*

$$\mathfrak{s} : F \times G \longrightarrow \mathbb{K}$$

*et les formes semi-linéaires*

$$\widetilde{\mathfrak{s}} : |F\rangle \langle G| \longrightarrow \mathbb{K}$$

*donnée par*

$$\left\langle |\varphi\rangle \langle\gamma| \,\middle|\, \widetilde{\mathfrak{s}} \right\rangle_{|F\rangle\langle G|} = \mathfrak{s}(\varphi,\gamma) = \langle\varphi| S\gamma\rangle \quad \textit{pour tout } \varphi \in F \textit{ et } \gamma \in G \ .$$

*En outre*

*(i) Pour que $S(G) \subset F^{\dagger}$ , il faut et il suffit que $\mathfrak{s}$ soit continue, ou faiblement continue, en la première variable.*

*(ii) Pour que $S$ soit continue, ou faiblement continue, il faut et il suffit que $\mathfrak{s}$ soit continue, ou faiblement continue, en la seconde variable.*

*(iii) Pour que $S$ soit une application linéaire continue de $G$ dans $F^{\dagger}$ , il faut et il suffit que $\mathfrak{s}$ soit séparément continue ou que $\widetilde{\mathfrak{s}} \in \left(|F\rangle_i \langle G|\right)^{\dagger}$ .*

**REMARQUE 1** Nous identifierons $\mathfrak{s}$ et $\widetilde{\mathfrak{s}}$ avec l'application linéaire $S$ et grâce à la semi-dualité

$$\left\langle |F\rangle_i \langle G| \,\middle|\, \mathcal{L}_s\left(G, F^{\dagger}\right) \right\rangle \ ,$$

définie par

$$\left\langle |\varphi\rangle \langle\gamma| \,\middle|\, S \right\rangle_{|F\rangle\langle G|} = \langle\varphi| S\gamma\rangle \quad \text{pour tout } \varphi \in F \ , \gamma \in G \text{ et } S \in L\left(G, F^{\circledast}\right) \ ,$$

nous avons les égalités et inclusions suivantes :

$$\left|F^{\dagger}\right\rangle \left\langle G^{\dagger}\right| = \mathcal{L}^f\left(G, F^{\dagger}\right) = S\left(F_\sigma, G_\sigma\right) \subset S(F,G) \subset \mathcal{S}(F,G) = \mathcal{L}_s\left(G, F^{\dagger}\right) = \left(|F\rangle_i \langle G|\right)^{\dagger} \ ,$$

la dernière égalité étant interprétée entre espaces localement convexes : la topologie de la convergence simple sur $G$ à valeurs dans $F^{\dagger}$ est identique à la topologie faible du semi-dual de $|F\rangle_i \langle G|$ .

En effet la première égalité découle directement du corollaire 3.5, les inclusions sont triviales, les deux dernières égalités proviennent de la proposition et on vérifie facilement l'égalité des topologies de $\mathcal{L}_s\left(G, F^{\dagger}\right)$ et $(|F\rangle_i \langle G|)^{\dagger}$ .

Il nous reste à montrer que l'application linéaire $S \in \mathcal{L}\left(G, F^{\dagger}\right)$ définissant $\mathfrak{s} \in S\left(F_{\sigma}, G_{\sigma}\right)$ est de rang fini. Mais la continuité signifie (proposition 2.4) qu'il existe des suites finies $(\mu_k)_{k=1,\ldots,n} \subset F^{\dagger}$ et $(\nu_l)_{l=1,\ldots,m} \subset G^{\dagger}$ telles que

$$|\langle \varphi| S\gamma\rangle| = |\mathfrak{s}\left(\varphi, \gamma\right)| \leqslant \max\nolimits_{k=1,\ldots,n} |\langle \varphi\,|\mu_k\rangle| \cdot \max\nolimits_{l=1,\ldots,m} |\langle \gamma\,|\nu_l\rangle| \ .$$

Mais cette inégalité montre que, pour tout $\gamma \in G$ , on a

$$\bigcap_{k=1}^{n} \operatorname{Ker} |\mu_k\rangle \subset \operatorname{Ker} |S\gamma\rangle \ ,$$

donc que $S\gamma$ est une combinaison linéaire de $\mu_k$ par le lemme 3.4.ii, i.e.

$$S\left(G\right) \subset \bigoplus_{k=1}^{n} \mathbb{K} \cdot \mu_k \ .$$

□

---

**REMARQUE 2** Puisque $G_{\sigma} = \left(G^{\dagger}\right)^{\dagger}$ par le théorème 3.7.i, on obtient également

$$|F\rangle \langle G| = \mathcal{L}^f\left(G^{\dagger}, F\right) = S\left(F^{\dagger}, G^{\dagger}\right) \subset \mathcal{L}\left(G^{\dagger}, F\right) \subset \mathcal{S}\left(F^{\dagger}, G^{\dagger}\right) = \mathcal{L}\left(G^{\dagger}, F_{\sigma}\right) = \left(\left|F^{\dagger}\right\rangle_i \left\langle G^{\dagger}\right|\right)^{\dagger} \ ,$$

sans oublier que $F^{\dagger}$ et $G^{\dagger}$ sont munis de la topologie faible.

Les premières égalités conduisent certains auteurs à définir le produit tensoriel algébrique de cette manière, évidemment en dimension finie. Cela ne me semble pas très naturel puisqu'en dimension infinie il est nécessaire d'introduire la topologie faible !

On pourrait aussi utiliser le fait que

$$|F\rangle \langle G| = \mathcal{L}_s\left(G, F^{\dagger}\right)^{\dagger} \ ;$$

on a besoin d'encore plus de topologie !

**REMARQUE 3** Soient $\mathcal{H}$ et $\mathcal{G}$ des espaces de Hilbert. Si l'on identifie $\mathcal{G}_{\sigma}$ avec son semi-dual faible $\mathcal{G}^{\dagger}$ , on a

$$\mathcal{L}_s\left(\mathcal{H}, \mathcal{G}_{\sigma}\right) = \left(|\mathcal{G}\rangle_i \langle\mathcal{H}|\right)^{\dagger} \ ,$$

et la semi-dualité $\left\langle |\mathcal{G}\rangle_i \langle\mathcal{H}| \,\middle|\, \mathcal{L}\left(\mathcal{H}, \mathcal{G}\right)\right\rangle$ est donnée par la formule

$$\left\langle |\gamma\rangle \langle\xi| \,\middle|\, S\right\rangle = \left(\gamma\right| S\xi) \ .$$

**REMARQUE 4** Utilisant la propriété universelle du produit tensoriel projectif (cf. définition 2.14.2), on voit immédiatement que $\mathfrak{s}$ est (gobalement) continue si, et seulement si,

$\widetilde{\mathfrak{s}} \in \left( |F\rangle_\pi \langle G| \right)^\dagger$ , i.e.

$$S(F,G) = \left( |F\rangle_\pi \langle G| \right)^\dagger \ .$$

Soient $Y$ un espace topologique séparé et $\nu$ une intégrale de Radon sur $Y$ . Par linéarité, une application $\zeta : Y \longrightarrow \mathcal{L}_s\left(G, F^\dagger\right)$ est scalairement $\nu$-intégrable si, et seulement si, pour tout $\varphi \in F$ et $\gamma \in G$ , la fonction $\langle \varphi | \zeta\gamma \rangle$ est $\nu$-intégrable.

**EXEMPLE 1** Soient $X, Y$ des ensembles. Le dual topologique de $\mathbb{K}^{(X)}$ est égal à son dual algébrique, puisque $\mathbb{K}^{(X)}$ est muni de la topologie localement convexe la plus fine (exemple 2.10.4). Mais comme $\left(1_{\{x\}}\right)_{x\in X}$ est une base algébrique de $\mathbb{K}^{(X)}$ , on en déduit qu'il est égal à $\mathbb{K}^X$ et que la semi-dualité est donnée par

$$\langle \varphi | \mu \rangle := \sum_{x\in X} \overline{\varphi(x)} \cdot \mu(x) \quad \text{pour tout } \varphi \in \mathbb{K}^{(X)} \text{ et } \mu \in \mathbb{K}^X \ ,$$

puis que la topolgie faible $\sigma\left(\mathbb{K}^X, \mathbb{K}^{(X)}\right)$ est égale à celle de la convergence ponctuelle. On obtient ainsi les égalités

$$\mathcal{L}_s\left(\mathbb{K}^{(Y)}, \mathbb{K}^X\right) = \left( \left|\mathbb{K}^{(X)}\right\rangle_i \left\langle \mathbb{K}^{(Y)}\right| \right)^\dagger = \mathbb{K}^{(X\times Y)\dagger} = \mathbb{K}^{X\times Y}$$

à l'aide de l'exemple 2.14.3. Ceci montre que toute application linéaire (continue)

$$K : \mathbb{K}^{(Y)} \longrightarrow \mathbb{K}^X$$

est donnée par un noyau $\varkappa \in \mathbb{K}^{X\times Y}$ . Plus précisément, pour tout $\varphi \in \mathbb{K}^{(X)}$ et $\gamma \in \mathbb{K}^{(Y)}$ , on a

$$\Big\langle |\varphi\rangle \langle\gamma| \Big| \varkappa \Big\rangle = \sum_{(x,y)\in X\times Y} \overline{\varphi(x)} \cdot \gamma(y) \cdot \varkappa(x,y) = \sum_{x\in X} \overline{\varphi(x)} \cdot \sum_{y\in Y} \varkappa(x,y) \cdot \gamma(y) = \langle \varphi | K\gamma \rangle \ ,$$

en ayant posé

$$K\gamma = \sum_{y\in Y} \varkappa(\cdot, y) \cdot \gamma(y) \ ,$$

et

$$\varkappa(x,y) = \left\langle 1_{\{x\}} \middle| K 1_{\{y\}} \right\rangle \ .$$

**THEOREME** *Le noyau $\varkappa^\dagger : Y \times X \longrightarrow K$ de l'application adjointe $K^\dagger$ de $K$ est donné par*

$$\varkappa^\dagger(y,x) = \overline{\varkappa(x,y)} \quad \textit{pour tout } x \in X \textit{ et } y \in Y \ .$$

En effet

$$\left\langle K^\dagger\varphi \middle| \gamma \right\rangle = \langle \varphi | K\gamma \rangle = \sum_{(x,y)\in X\times Y} \overline{\varphi(x)} \cdot \gamma(y) \cdot \varkappa(x,y) =$$

$$\sum_{y\in Y} \overline{\sum_{x\in X} \varkappa^\dagger(y,x) \cdot \varphi(x)} \cdot \gamma(y) = \left\langle \sum_{x\in X} \varkappa^\dagger(\cdot, x) \cdot \varphi(x) \middle| \gamma \right\rangle \ .$$

□

**EXEMPLE 2** Soit $X, Y$ des espaces localement compacts. Utilisant l'exemple 2.14.4, on obtient une injection continue canonique

$$\mathcal{M}(X \times Y) \hookrightarrow (|\mathcal{K}(X)\rangle_i \langle\mathcal{K}(Y)|)^\dagger = \mathcal{L}_s(\mathcal{K}(Y), \mathcal{M}(X)) : \varkappa \longmapsto S_\varkappa ,$$

où $S_\varkappa : \mathcal{K}(Y) \longrightarrow \mathcal{M}(X)$ est l'application (faiblement) continue définie, pour tout $\varphi \in \mathcal{K}(X)$ et $\gamma \in \mathcal{K}(Y)$ , par

$$\langle\varphi| S_\varkappa\gamma\rangle := \left\langle |\varphi\rangle \langle\gamma| \,\middle|\, \varkappa \right\rangle = \int \overline{\varphi(x)} \cdot \gamma(y)\ d\varkappa(x, y) \ .$$

L'adjointe $S_\varkappa^\dagger : \mathcal{K}(X) \longrightarrow \mathcal{M}(Y)$ est définie par l'intégrale de Radon $\varkappa^\dagger := \%(\overline{\varkappa})$ , où

$$\% : X \times Y \longrightarrow Y \times X : (x, y) \longmapsto (y, x) \ .$$

En effet

$$\left\langle \gamma \,\middle|S_\varkappa^\dagger\varphi \right\rangle = \overline{\langle\varphi| S_\varkappa\gamma\rangle} = \int \varphi(x) \cdot \overline{\gamma(y)}\, d\overline{\varkappa}(x, y) =$$

$$= \int \overline{\gamma(y)} \cdot \varphi(x)\ d\varkappa^\dagger(y, x) = \left\langle |\gamma\rangle \langle\varphi| \,\middle|\, \varkappa^\dagger \right\rangle \ .$$

Soit $\varkappa$ est une intégrale de Radon positive qui se désintègre par rapport à $\mathrm{pr}_2$ , i.e. telle qu'il existe une intégrale de Radon positive $\nu$ sur $Y$ et une famille $(\mu_y)_{y \in Y}$ d'intégrales de Radon positives sur $X$ et que

$$\varkappa = \int |\mu_y\rangle \langle\varepsilon_y|\ d\nu(y)$$

soit une décomposition de $\varkappa$ (cf. cours d'Analyse [17], 16.1). L'exemple 3.12.3 montre que $|\mu_\diamond\rangle \langle\varepsilon_\diamond|$ est $\nu$-intégrable dans $\mathcal{M}(X \times Y)$ . On voit alors facilement que $\gamma \cdot \mu_\diamond$ est $\nu$-intégrable dans $\mathcal{M}(X)$ pour tout $\gamma \in \mathcal{K}(Y)$ . Pour tout $\varphi \in \mathcal{K}(X)$ , on a alors

$$\langle\varphi| S_\varkappa\gamma\rangle = \int \left( \int \overline{\varphi}\, d\mu_y \right) \cdot \gamma(y)\ d\nu(y) =$$

$$= \int \langle\varphi| \mu_y\rangle \cdot \gamma(y)\ d\nu(y) = \left\langle \varphi \,\middle|\, \int \gamma(y) \cdot \mu_y\, d\nu(y) \right\rangle \ ,$$

i.e.

$$S_\varkappa\gamma = \int \gamma(y) \cdot \mu_y\, d\nu(y) \quad \text{dans } \mathcal{M}(X) \ .$$

On a $\varkappa^\dagger = \int |\varepsilon_y\rangle \langle\mu_y|\ d\nu(y)$ , donc

$$S_\varkappa^\dagger\varphi = \langle\mu_\diamond| \varphi\rangle \cdot \nu \ .$$

Directement il suffit d'écrire

$$\left\langle \gamma \,\middle|S_\varkappa^\dagger\varphi \right\rangle = \overline{\langle\varphi| S_\varkappa\gamma\rangle} = \overline{\int \gamma(y) \cdot \left( \int \overline{\varphi(x)}\, d\mu_y(x) \right)\ d\nu(y)} = \langle\gamma\, |\langle\mu_\diamond| \varphi\rangle \cdot \nu\rangle \ .$$

**EXEMPLE 3** Soient $X, Y$ des ouverts de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$ respectivement. Sachant que la topologie induite par $\mathcal{D}(X \times Y)$ est celle de $|\mathcal{D}(X)\rangle_i \langle\mathcal{D}(Y)|$ (cf. exemple 2.14.5), on obtient

$$\mathcal{D}(X \times Y)' = (|\mathcal{D}(X)\rangle_i \langle\mathcal{D}(Y)|)^\dagger = \mathcal{L}_s\left(\mathcal{D}(Y), \mathcal{D}(X)'\right) \ .$$

Cette égalité est en fait le théorème des noyaux de Schwartz. Elle exprime que toute application linéaire continue de $\mathcal{D}(Y)$ dans $\mathcal{D}(X)'$ est de la forme $S_\varkappa$ pour un $\varkappa \in \mathcal{D}(X \times Y)'$ et définie par

$$\langle \varphi | S_\varkappa \gamma \rangle := \Big\langle |\varphi\rangle \langle\gamma| \Big| \varkappa \Big\rangle \quad \text{pour tout } \varphi \in \mathcal{D}(X) \text{ et } \gamma \in \mathcal{D}(Y) \ .$$

**REMARQUE 5** On peut voir (cf. 4.12, exercice 3 et remarque 7) que

$$\mathcal{M}(X \times Y) \neq \mathcal{L}_s(\mathcal{K}(Y), \mathcal{M}(X)) \ .$$

## 3.14 Les théorèmes du graphe fermé et d'isomorphie

Dans ce numéro $F$ et $G$ sont des espaces localement convexes **séparés** .

Ces deux théorèmes explicitent des conditions sur $F$ et $G$ telles que les assertions suivantes soient vraies :

**Graphe fermé** *Si le graphe* $\mathrm{Gr}\, T$ *d'une application linéaire* $T : F \longrightarrow G$ *est fermé dans* $F \times G$ *, alors* $T$ *est continue.*

**Isomorphie** *Si* $\Phi : G \longrightarrow F$ *est une application linéaire continue bijective, alors* $\Phi$ *est un isomorphisme.*

**REMARQUE 1** La condition dans le théorème du graphe fermé est évidemment nécessaire, puisque

$$\mathrm{Gr}\, T = \{ (\varphi, \gamma) \in F \times G \mid \gamma = T\varphi \} = (T, \mathrm{Id})^{-1} (\Delta)$$

est fermé dans $F \times G$ ; en effet la diagonale

$$\Delta := (\mathrm{pr}_1 - \mathrm{pr}_2)^{-1} (\{0\})$$

de $G \times G$ est fermée, puisque $G$ est séparé.

**REMARQUE 2** Le théorème du graphe fermé entraîne celui d'isomorphie.

En effet si $\Phi : G \longrightarrow F$ est continue, alors $\mathrm{Gr}\, \Phi$ est fermé dans $G \times F$ . Or

$$\% : G \times F \longrightarrow F \times G : (\gamma, \varphi) \longmapsto (\varphi, \gamma)$$

est un isomorphisme, donc $\mathrm{Gr}\, \Phi^{-1} = \% (\mathrm{Gr}\, \Phi)$ est fermé dans $F \times G$ , ce qui montre que $\Phi^{-1} : F \longrightarrow G$ est continue. $\square$

**REMARQUE 3** Réciproquement si $T : F \longrightarrow G$ a un graphe fermé considérons l'application linéaire bijective continue

$$\Phi := \mathrm{pr}_{1|\,\mathrm{Gr}\, T} : \mathrm{Gr}\, T \longrightarrow F \ .$$

Si le théorème d'isomorphie est applicable à $F$ et $\mathrm{Gr}\, T$ , on en déduit que $\Phi^{-1}$ est continue, et il en est alors de même de $T = \mathrm{pr}_2 \circ \Phi^{-1}$ . En particulier

Dans la catégorie des espaces de Fréchet, les théorèmes du graphe fermé et d'isomorphie sont équivalents.

En effet $\mathrm{Gr}\, T$ est un sous-espace vectoriel fermé de l'espace de Fréchet $F \times G$ , donc un espace de Fréchet. $\square$

**THEOREME** *Si* $F$ *et* $G$ *sont des espaces de Fréchet, les théorèmes du graphe fermé et d'isomorphie sont vrais.*

Nous devons montrer, pour toute semi-norme continue $q$ sur $G$ que la semi-norme $q \circ T$ est continue. Ceci revient à généraliser le théorème 2.13 montrant qu'un espace de Fréchet est tonnelé. En fait il nous suffirait de montrer que cette semi-norme $q \circ T$ est s.c.i. Nous allons montrer directement qu'elle est continue.

Soit $(q_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de semi-normes définissant la topologie de $G$ . On peut supposer que $q_0 = q$ . Pour tout $k \in \mathbb{N}$ , on a évidemment

$$F = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \overline{\{q_k \circ T \leqslant m\}} \,;$$

par le corollaire 2.12 du théorème de Baire, on a $\overset{\circ}{\overline{\{q_k \circ T \leqslant m_k\}}} \neq \emptyset$ pour un certain $m_k \in \mathbb{N}$ . Il existe donc $\varphi_k \in F$ et une semi-norme continue $p_k$ sur $F$ tels que

$$B_{p_k}(\varphi_k, 1) \subset \overline{\{q_k \circ T \leqslant m_k\}} \ .$$

Puisque la topologie est définie par les grandes semi-normes, nous pouvons supposer que la suite $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est croissante et définit la topologie de $F$ .

Grâce au corollaire 2.2.iii, il nous suffit de montrer que $q_0 \circ T$ est majorée sur $B_{p_0}(0,1)$ . Pour tout $\psi \in B_{p_k}(0,1)$ , on a $\varphi_k, \varphi_k - \psi \in B_{p_k}(\varphi_k, 1)$ , donc

$$\psi = \varphi_k - (\varphi_k - \psi) \in B_{p_k}(\varphi_k, 1) - B_{p_k}(\varphi_k, 1) \subset$$

$$\subset \overline{\{q_k \circ T \leqslant m_k\}} + \overline{\{q_k \circ T \leqslant m_k\}} = \overline{\{q_k \circ T \leqslant 2m_k\}}$$

puisque $+ : F \times F \longrightarrow F$ est continue, i.e.

$$B_{p_k}(0,1) \subset \overline{\{q_k \circ T \leqslant 2m_k\}} \ .$$

Choisissons une suite $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+^*$ telle

$$\alpha_0 = 1 \quad , \quad \lim_k \alpha_k = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{l=0}^{\infty} \alpha_k \cdot m_k < \infty \ .$$

On a évidemment

$$B_{p_k}(0, \alpha_k) \subset \overline{\{q_k \circ T \leqslant 2\alpha_k \cdot m_k\}} \quad \text{pour tout } k \in \mathbb{N} \ .$$

Remarquons que la différence avec le théorème 2.13 réside dans la présence de l'adhérence.

Soit donc $\varphi \in B_{p_0}(0,1)$ . Comme

$$B_{p_0}(0,1) \subset \overline{\{q_0 \circ T \leqslant 2m_0\}} \ ,$$

il existe $\varphi_0 \in \{q_0 \circ T \leqslant 2m_0\}$ tel que $p_1(\varphi - \varphi_0) \leqslant \alpha_1$ . Ceci nous permet de construire par récurrence une suite $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset F$ telle que

$$p_{k+1}\left(\varphi - \sum_{l=0}^{k} \varphi_l\right) \leqslant \alpha_{k+1} \quad \text{et} \quad q_k(T\varphi_k) \leqslant 2\alpha_k \cdot m_k \quad \text{pour tout } k \in \mathbb{N} \ .$$

En effet

$$\varphi - \sum_{l=0}^{k} \varphi_l \in B_{p_{k+1}}(0, \alpha_{k+1}) \subset \overline{\{q_{k+1} \circ T \leqslant 2\alpha_{k+1} \cdot m_{k+1}\}} \,;$$

il existe donc $\varphi_{k+1} \in \{q_{k+1} \circ T \leqslant 2\alpha_{k+1} \cdot m_{k+1}\}$ tel que $p_{k+2}\left(\varphi - \sum_{l=0}^{k+1} \varphi_l\right) \leqslant \alpha_{k+2}$ .

Ceci montre que $\varphi = \sum_{l=0}^{\infty} \varphi_l$ et que la série $\sum_{l=0}^{\infty} T\varphi_l$ est absolument convergente, car pour tout $j \in \mathbb{N}^*$ , on a

$$p_j\left(\varphi - \sum_{l=0}^{k} \varphi_l\right) \leqslant p_{k+1}\left(\varphi - \sum_{l=0}^{k} \varphi_l\right) \leqslant \alpha_{k+1} \quad \text{pour tout } k \geqslant j-1$$

et

$$\sum_{l=0}^{\infty} q_j\left(T\varphi_l\right) \leqslant \sum_{l=0}^{j-1} q_j\left(T\varphi_l\right) + \sum_{l=j}^{\infty} q_l\left(T\varphi_l\right) \leqslant \sum_{l=0}^{j-1} q_j\left(T\varphi_l\right) + \sum_{l=j}^{\infty} 2\alpha_l \cdot m_l < \infty \ .$$

Puisque le graphe de $T$ est fermé dans $F \times G$ , on a

$$\left(\varphi, \sum_{l=0}^{\infty} T\varphi_l\right) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(\varphi_l, T\varphi_l\right) \in \operatorname{Gr} T \ ,$$

donc $T\varphi = \sum_{l=0}^{\infty} T\varphi_l$ et par suite

$$q\left(T\varphi\right) \leqslant \sum_{l=0}^{\infty} q\left(T\varphi_l\right) \leqslant \sum_{l=0}^{\infty} q_l\left(T\varphi_l\right) \leqslant \sum_{l=0}^{\infty} 2\alpha_l \cdot m_l < \infty \ ,$$

ce qu'il fallait démontrer. $\square$

Nous allons maintenant discuter une généralisation très utile du théorème du graphe fermé. Pour commencer on a le

**LEMME** *Soit $T : F \longrightarrow G$ une application linéaire. Pour que $\operatorname{Gr} T$ soit fermé dans $F \times G$ , il faut et il suffit qu'il existe une topologie localement convexe séparée $\mathfrak{S}$ sur $G$ telle que*

$$T : F \longrightarrow G_{\mathfrak{S}} \quad \textit{et} \quad \operatorname{Id} : G \longrightarrow G_{\mathfrak{S}}$$

*soient continues.*

La condition est suffisante, puisque

$$(T, \operatorname{Id}) : F \times G \longrightarrow G_{\mathfrak{S}} \times G_{\mathfrak{S}}$$

est continue et $\Delta$ est fermée dans $G_{\mathfrak{S}} \times G_{\mathfrak{S}}$ . Réciproquement, considérons l'application surjective

$$S : (\varphi, \gamma) \longmapsto T\varphi - \gamma : F \times G \longrightarrow G \ .$$

On a

$$\operatorname{Ker} S = \{(\varphi, \gamma) \in F \times G \mid T\varphi - \gamma = 0\} = \operatorname{Gr} T \ ,$$

donc $S$ induit une bijection

$$\widetilde{S} : F \times G / \operatorname{Gr} T \longrightarrow G \ .$$

Comme $\operatorname{Gr} T$ est fermé, l'espace localement convexe $F \times G / \operatorname{Gr} T$ est séparé par le théorème 2.8. Soit $\mathfrak{S}$ la topologie localement convexe transportée (i.e. finale) par $\widetilde{S}$ sur $G$ . La commutativité des diagrammes

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "{(0,-\mathrm{Id})}"] \arrow[d, "\mathrm{Id}"'] & F \times G \arrow[d] \arrow[dl, "S"'] \\ G_{\mathfrak{S}} & F \times G\,/\mathrm{Gr}\,T \arrow[l, "\widetilde{S}"'] \end{tikzcd} \qquad \text{et} \qquad \begin{tikzcd} F \arrow[r, "{(\mathrm{Id},0)}"] \arrow[d, "T"'] & F \times G \arrow[d] \arrow[dl, "S"'] \\ G_{\mathfrak{S}} & F \times G\,/\mathrm{Gr}\,T \arrow[l, "\widetilde{S}"'] \end{tikzcd}$$

montrent alors que $\mathrm{Id} : G \longrightarrow G_{\mathfrak{S}}$ et $T : F \longrightarrow G_{\mathfrak{S}}$ sont continues. □

**THEOREME (de Ptak)** *Le théorème du graphe fermé est vrai pour toute application linéaire d'un espace tonnelé $F$ dans un espace localement convexe $G$ de l'une des classes suivantes :*

*(i) Il existe une topologie localement convexe métrisable $\mathfrak{M}$ sur $G^\dagger$ compatible avec la semi-dualité $\left\langle G^\dagger \middle| G\right\rangle$ , par exemple $G$ est un espace de Banach réflexif, en particulier un espace de Hilbert.*

*(ii) $G$ est un espace de Fréchet.*

**Démonstration de (i)** L'idée de la démonstration est simple. L'application

$$T_{fine} : F_{fine} \longrightarrow G$$

égale à $T$ , mais en ayant muni $F$ de la topologie localement convexe la plus fine, est continue (cf. exemple 2.10.4), donc

$$(T_{fine})^\dagger : G^\dagger \longrightarrow (F_{fine})^\dagger = F^\circledast$$

est continue. Il nous suffit de montrer que

$$(T_{fine})^\dagger \left(G^\dagger\right) \subset F^\dagger \ .$$

En effet cette inclusion montre que $T : F \longrightarrow G$ possède une adjointe, donc que $T$ est faiblement continue, puis continue par le scolie 2.7.

Puisque $T$ a un graphe fermé, il existe grâce au lemme une topologie localement convexe séparée $\mathfrak{S}$ sur $G$ moins fine que celle de $G$ et telle que $T : F \longrightarrow G_{\mathfrak{S}}$ soit continue. On en déduit que

$$(T_{fine})^\dagger \left((G_{\mathfrak{S}})^\dagger\right) \subset F^\dagger \ .$$

En outre $(G_{\mathfrak{S}})^\dagger$ est dense dans $G^\dagger$ . En effet toute forme linéaire continue $\neq 0$ sur $G^\dagger$ est de la forme $\langle\gamma|$ pour un $\gamma \in G \smallsetminus \{0\}$ (théorème 2.7), mais puisque $\mathfrak{S}$ est séparée, il existe $\nu \in (G_{\mathfrak{S}})^\dagger$ tel que $\langle\gamma|\nu\rangle \neq 0$; ceci montre que $\left[(G_{\mathfrak{S}})^\dagger\right]^\perp = \{0\}$ , d'où notre assertion par le corollaire 2.10.ii.

Grâce à notre hypothèse, le corollaire 2.10.i montre alors que $(G_{\mathfrak{S}})^\dagger$ est dense dans $G^\dagger_{\mathfrak{M}}$ . Pour tout $\nu \in G^\dagger_{\mathfrak{M}}$ , il existe donc une suite $(\nu_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset (G_{\mathfrak{S}})^\dagger$ telle que $\nu = \lim_k \nu_k$ dans $G^\dagger_{\mathfrak{M}}$ , et par suite dans $G^\dagger_\sigma$ . Il vient alors

$$(T_{fine})^\dagger \nu = \lim\nolimits_k (T_{fine})^\dagger \nu_k \quad \text{dans } F^\circledast \ .$$

Or $F^{\dagger}$ est séquentiellement complet par le théorème de Banach-Steinhaus 3.1, donc

$$(T_{fine})^{\dagger}\,\nu \in F^{\dagger}\ .$$

**Démonstration de (ii)** Cela découle d'une propriété satisfaite par les espaces de Fréchet, mais dont la démonstration est trop longue pour être reproduite ici : le théorème de Krein-Šmulian (cf. H. Schaefer [20], Chap. IV, theorem 6.4). Avec les notations de la remarque 4 ci-dessous on a

$$(G_{\mathfrak{S}})^{\dagger} \subset (G_{\mathfrak{T}})^{\dagger} \cap G^{\dagger} \subset G^{\circledast}\ ,$$

donc $(G_{\mathfrak{T}})^{\dagger} \cap G^{\dagger}$ est dense dans $G^{\dagger}$ . Si $q$ est une semi-norme continue sur $G$ l'ensemble convexe $\mathrm{co}_q$ est compact dans $G^{\dagger}$ par le théorème 3.11.iii, donc fermé dans $G^{\circledast}$ . En outre $\mathrm{co}_q \cap (G_{\mathfrak{T}})^{\dagger}$ est faiblement borné, donc

$$K := \overline{\mathrm{co}_q \cap (G_{\mathfrak{T}})^{\dagger}}^{(G_{\mathfrak{T}})^{\dagger}}$$

est compacte, puisque $\mathfrak{T}$ est tonnelée, et par suite fermée dans $G^{\circledast}$ . Ceci montre que

$$K := \overline{\mathrm{co}_q \cap (G_{\mathfrak{T}})^{\dagger}}^{(G_{\mathfrak{T}})^{\circledast}} \subset \mathrm{co}_q\ ,$$

donc que $K := \mathrm{co}_q \cap (G_{\mathfrak{T}})^{\dagger}$ est fermée dans $G^{\dagger}$ . Le théorème de Krein-Šmulian montre alors que $(G_{\mathfrak{T}})^{\dagger} \cap G^{\dagger}$ est fermé dans $G^{\dagger}$ , donc égal à $G^{\dagger}$ et par suite que $(G_{\mathfrak{T}})^{\dagger} \supset G^{\dagger}$ . On en déduit évidemment que $\mathfrak{T}$ est plus fine que la topologie de $G$ . □

**REMARQUE 4** Pour que le théorème du graphe fermé soit vrai pour tout espace tonnelé $F$ , il faut et il suffit que $G$ satisfasse à la propriété suivante :

Toute topologie tonnelée $\mathfrak{T}$ sur $G$ contenant une topologie localement convexe séparée $\mathfrak{S}$ contenue dans celle de $G$ , i.e. $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{T} \cap \mathfrak{T}_G$ , est plus fine que celle de $G$ , i.e. $\mathfrak{T}_G \subset \mathfrak{T}$ .

La condition est nécessaire, car $\mathrm{Id} : G_{\mathfrak{T}} \longrightarrow G$ a un graphe fermé par le lemme, donc est continue par le théorème du graphe fermé. Réciproquement il existe une topologie localement convexe séparé $\mathfrak{S}$ sur $G$ , moins fine que celle de $G$ , telle que $T : F \longrightarrow G_{\mathfrak{S}}$ soit continue. Considérons sur $G$ la topologie localement convexe finale $\mathfrak{T}$ par rapport à $T$ . Elle est plus fine que $\mathfrak{S}$ , donc séparée, et par suite tonnelée par la proposition 2.13. La condition montre qu'elle est plus fine que celle de $G$ , donc que

$$T : F \xrightarrow{T} G_{\mathfrak{T}} \xrightarrow{\mathrm{Id}} G$$

est continue. □

**EXEMPLE 1** La classe décrite en (i) contient plus généralement les espaces localement convexes qui sont réunion d'une suite d'ensembles faiblement compacts, mais cela nécessite de pousser plus à fond la théorie de la dualité.

**EXEMPLE 2** Soit $G$ un espace de Fréchet de dimension infinie. Cet espace muni de la topologie localement convexe la plus fine $\mathfrak{T}_{fine}$ ne satisfait pas à la propriété de la remarque 4 précédente. En effet la topologie de $G$ , qui est tonnelée, donc séparée, est **strictement** moins fine que $\mathfrak{T}_{fine}$ . En effet $\mathfrak{T}_{fine}$ n'est pas métrisable, puisque $G$ a une dimension algébrique nécesairement non-dénombrable (cf. théorème 2.11 et remarque 2.11.1).

## 3.15 Quelques applications du théorème du graphe fermé

**(1)** Soient $\mu$ une intégrale de Radon sur $X$ , $p, r \in [1, \infty]$ et $F$ un sous-espace vectoriel de $\mathbf{L}^p(\mu) \cap \mathbf{L}^r(\mu)$ . Si $F$ est fermé dans $\mathbf{L}^p(\mu)$ comme dans $\mathbf{L}^r(\mu)$ , alors les normes $\|\cdot\|_p$ et $\|\cdot\|_r$ sont équivalentes sur $F$ .

Il nous suffit par symétrie de montrer que $\mathrm{Id} : F_{\|\cdot\|_p} \longrightarrow F_{\|\cdot\|_r}$ est continue, donc que son graphe est fermé, puisque ces espaces sont de Banach. Soit donc $((\varphi_k, \varphi_k))_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathrm{Gr\,Id}$ convergente vers $(\varphi, \psi)$ dans $F_{\|\cdot\|_p} \times F_{\|\cdot\|_r} \subset \mathbf{L}^p(\mu) \times \mathbf{L}^r(\mu)$ . Par le théorème de Riesz-Fischer, il existe donc une sous-suite $\left(\varphi_{\alpha(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge $\mu$-p.p. vers $\varphi$ . Mais comme cette sous-suite converge encore vers $\psi$ dans $\mathbf{L}^r(\mu)$ , il existe une nouvelle sous-suite $\left(\varphi_{\beta\circ\alpha(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge $\mu$-p.p. vers $\psi$ , donc aussi vers $\varphi$ . Ceci montre que $\varphi = \psi$ , donc que

$$(\varphi, \psi) = \lim_k (\varphi_k, \varphi_k) = (\varphi, \varphi) \in \mathrm{Gr\,Id} \ .$$

□

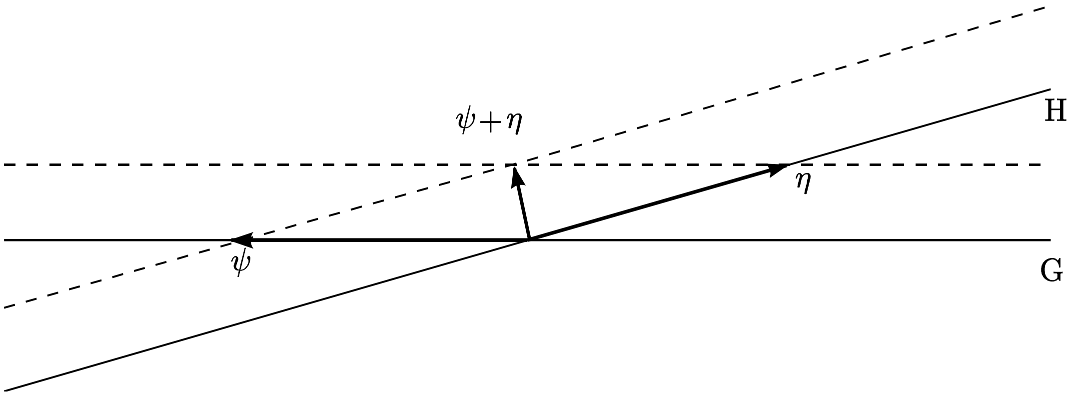
**(2)** Soient $F$ un espace de Fréchet et $G, H$ des sous-espaces vectoriels fermés de $F$ tels que $F = G \oplus H$ . Alors

$$(\gamma, \eta) \longmapsto \gamma + \eta : G \times H \longrightarrow F$$

est un isomorphisme. Si $F$ est un espace de Banach cela signifie qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\|\gamma\| + \|\eta\| \leqslant M \cdot \|\gamma + \eta\| \leqslant M \cdot (\|\gamma\| + \|\eta\|)$$

pour tout $\gamma \in G$ et $\eta \in H$ .




C'est immédiat par le théorème d'isomorphie. □

**(3)** Soient $\mu$ une intégrale de Radon bornée sur $X$ et $p \in [1, \infty[$ . Si $F$ est un sous-espace vectoriel fermé de $\mathbf{L}^p(\mu)$ contenu dans $\mathbf{L}^\infty(\mu)$ , alors $F$ est de dimension finie.

C'est un résultat de A. Grothendieck (cf. W. Rudin [18], theorem 5.2). Ainsi tout sous-espace vectoriel fermé de dimension infinie de $\mathbf{L}^p(\mu)$ contient des fonctions non-bornées, typiquement de la forme $\frac{1}{(\mathrm{id} - \tau)^s}$ sur tout intervalle fermé de $\mathbb{R}$ , pour autant que $s < \frac{1}{p}$ .

Comme dans l'exemple 1 on montre que l'injection canonique de $F$ , muni de la norme

$\|\cdot\|_p$ , dans $\mathbf{L}^\infty(\mu)$ est continue. Il existe donc une constante $M \in \mathbb{R}_+$ telle que l'on ait

$$\|\varphi\|_\infty \leqslant M \cdot \|\varphi\|_p \quad \text{pour tout } \varphi \in F \ .$$

On se ramène maintenant au cas $p = 2$ .

Si $p < 2$ , on applique l'inégalité de Hölder avec les exposants conjugués $\frac{2}{p}$ et $\frac{2}{2-p}$ et on obtient

$$\int |\varphi|^p \, d\mu \leqslant \left( \int |\varphi|^2 \, d\mu \right)^{\frac{p}{2}} \cdot \left( \int d\mu \right)^{\frac{2-p}{2}} \ ,$$

donc

$$\|\varphi\|_p \leqslant \mu(X)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}} \cdot \|\varphi\|_2 \ .$$

Si $p \geqslant 2$ , on a

$$|\varphi|^p \leqslant \|\varphi\|_\infty^{p-2} \cdot |\varphi|^2 \quad \mu\text{-p.p.} \ ,$$

d'où

$$\|\varphi\|_\infty \leqslant M \cdot \|\varphi\|_p \leqslant M \cdot \|\varphi\|_\infty^{\frac{p-2}{2}} \cdot \|\varphi\|_2^{\frac{2}{p}}$$

et par suite

$$\|\varphi\|_\infty \leqslant M^{\frac{p}{2}} \cdot \|\varphi\|_2 \ .$$

Soient alors $n \in \mathbb{N}$ et $(\varepsilon_j)_{j=1,\ldots,n}$ un système linéairement indépendant de $F \subset \mathbf{L}^2(\mu)$ . Par le procédé d'orthonormalisation de Gram_schmidt (cf. 3.8), on peut supposer que $(\varepsilon_j)_{j=1,\ldots,n}$ est orthonormé. Nous allons montrer que $n$ est majoré par $M^2 \cdot \mu(X) < \infty$ , ce qui prouve que $F$ est de dimension finie.

Pour tout $c = (c_j)_{j=1,\ldots,n} \in \mathbb{B}_{|\cdot|_2} \subset \mathbb{K}^n$ , on a

$$\left\| \sum_{j=1}^n c_j \cdot \varepsilon_j \right\|_\infty \leqslant M \cdot \left\| \sum_{j=1}^n c_j \cdot \varepsilon_j \right\|_2 = M \cdot |c|_2 \leqslant M$$

en ayant utiliser les relations d'orthogonalité (on peut aussi utiliser la proposition 3.7). Nous avons donc prouvé que

$$\left| \sum_{j=1}^n c_j \cdot \varepsilon_j \right| \leqslant M \quad \mu\text{-p.p.} \ ,$$

cet ensemble négligeable dépendant de $c$ . Puisqu'une réunion dénombrable d'ensembles négligeables est négligeable, il existe un ensemble négligeable $N \subset X$ tel que l'on ait

$$\left| \sum_{j=1}^n c_j \cdot \varepsilon_j \right| \leqslant M$$

pour tout $x \in X \smallsetminus N$ et tout $c \in \mathbb{Q}^n$ ou $(\mathbb{Q} + i \cdot \mathbb{Q})^n$ satisfaisant à $|c|_2 \leqslant 1$ . Mais par la densité de ce dernier ensemble dans $\mathbb{B}_{|\cdot|_2}$ et la continuité de l'application

$$c \longmapsto \sum_{j=1}^n c_j \cdot \varepsilon_j(x) \ ,$$

pour $x \in X \smallsetminus N$ donné, on en déduit que l'inégalité est vraie pour tout $c \in \mathbb{B}_{|\cdot|_2}$ . Finalement il vient

$$\sum_{j=1}^{n} |\varepsilon_j(x)|^2 = \left(\sum_{j=1}^{n} |\varepsilon_j(x)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \sum_{j=1}^{n} \frac{\overline{\varepsilon_j(x)}}{\left(\sum_{j=1}^{n} |\varepsilon_j(x)|^2\right)^{\frac{1}{2}}} \cdot \varepsilon_j(x) \leqslant \left(\sum_{j=1}^{n} |\varepsilon_j(x)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot M$$

en posant

$$c_j := \frac{\overline{\varepsilon_j(x)}}{\left(\sum_{j=1}^{n} |\varepsilon_j(x)|^2\right)^{\frac{1}{2}}} \quad \text{si } \sum_{j=1}^{n} |\varepsilon_j(x)|^2 \neq 0 \ .$$

Dans tous les cas il vient

$$\sum_{j=1}^{n} |\varepsilon_j(x)|^2 \leqslant M^2 \quad \text{pour tout } x \in X \smallsetminus N \ ,$$

d'où

$$n \leqslant M^2 \cdot \mu(X) < \infty$$

en intégrant. □

**EXERCICE** Soient $\mu$ une intégrale de Radon sur $X$ et $\rho, \kappa$ des fonctions $\mu$-mesurables $> 0$ $\mu$-p.p. . Montrer

(a) $\mathbf{L}^2(\mu, \rho)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{L}^2(\mu, \kappa)$ si, et seulement si, $\frac{\kappa}{\rho}$ est essentiellement $\mu$-bornée.

Dans ce cas

(b) L'injection canonique est continue et $\mathbf{L}^2(\mu, \rho)$ est dense dans $\mathbf{L}^2(\mu, \kappa)$ . En particulier si $A$ est une partie totale de $\mathbf{L}^2(\mu, \rho)$ , c'est aussi une partie totale de $\mathbf{L}^2(\mu, \kappa)$ .

## 3.16 La topologie forte

**DEFINITION 1** Soit $\langle F|\, G\rangle$ une semi-dualité. La *topologie forte* $\beta(F,G)$ sur $F$ est définie par l'ensemble des semi-normes s.c.i. pour l'une des topologies compatibles avec la dualité. On pose

$$F_\beta := F_{\beta\left(F,F^\dagger\right)} \quad \text{et} \quad F_\beta^\dagger := F_{\beta\left(F^\dagger,F\right)} \ .$$

**PROPOSITION**

*(i) La topologie forte $\beta(F,G)$ est plus fine que la topologie de Mackey $\tau(F,G)$ .*

*(ii) Un espace localement convexe séparé est tonnelé si, et seulement si, $F = F_\beta$ , i.e. si sa topologie coïncide avec la topologie forte $\beta\left(F,F^\dagger\right)$ .*

*(iii) Toute semi-norme continue pour la topologie forte $\beta\left(F,F^\dagger\right)$ est de la forme* $\mathrm{sn}_C$ *où $C$ est une partie (convexe absolument symétrique faiblement fermée) bornée de $F^\dagger$ .*

**Démonstration de (i)** Toute semi-norme de Mackey sur $F$ est s.c.i. par le corollaire 3.6.ii.

**Démonstration de (ii)** C'est une reformulation de la définition.

**Démonstration de (iii)** Cela découle du corollaire 3.9. □

**REMARQUE 1** C'est essentiellement la topologie forte $\beta\left(F^\dagger,F\right)$ sur un semi-dual qui est intéressante. Dans ce cas les semi-normes continues sont toutes de la forme $\mathrm{sn}_C$ , où $C$ est une partie bornée de $F$ .

Rappelons que les parties bornées, ainsi que les parties convexes fermées sont les mêmes pour toutes les topologies compatibles avec la semi-dualité (proposition 3.8 et théorème de Fenchel 3.9.iii).

**REMARQUE 2** Si $F$ est un espace normé l'espace de Banach $F_\beta^\dagger$ définit en 3.2.2 est muni de la topologie forte.

En effet toute partie bornée de $F$ est contenue dans une boule, donc toute semi-norme pour la topologie forte de $F_\beta^\dagger$ est majorée par un multiple de la norme duale.

**REMARQUE 3** Pour toute semi-norme continue $p$ sur $F$ , considérons l'espace quotient $F_p := F/\{p=0\}$ muni de la norme $[p]$ . Puisque l'application quotient $\pi_p : F \longrightarrow F_p$ est continue et surjective, on obtient une injection canonique

$$\pi_p^\dagger : (F_p)_\beta^\dagger \hookrightarrow F_\beta^\dagger : |\nu\rangle \longmapsto \langle \pi_p \cdot|\, \nu\rangle = |\nu\rangle \circ \pi_p \ .$$

Elle est continue, car si $C$ est une partie bornée de $F$ , on a $\sup p(C) < \infty$ et

$$\mathrm{sn}_C\left(\left|\pi_p^\dagger \nu\right\rangle\right) = \sup\nolimits_{\varphi\in C} \left|\left\langle \varphi|\, \pi_p^\dagger \nu\right\rangle_F\right| = \sup\nolimits_{\varphi\in C} \left|\left\langle \pi_p\varphi|\, \nu\right\rangle_{F_p}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{\varphi\in C} \|\pi_p\varphi\|_{F_p} \cdot \|\nu\|_{[p]} \leqslant \sup p\,(C) \cdot \|\nu\|_{[p]} \ .$$

D'autre part

$$\bigcup_{p\in\overline{\mathcal{P}}} (F_p)^\dagger = F^\dagger$$

et la topologie localement convexe finale sur $F^\dagger$ de $\varinjlim \left((F_p)^\dagger_\beta, \pi_p^\dagger\right)$ est plus fine que celle de $F^\dagger_\beta$ , qui elle est plus fine que celle de $F^\dagger$ .

D'autre part si $\mathfrak{s} \in S\,(F,G)$ (cf. définition 3.13), il existe des semi-normes continues $p$ et $q$ sur $F$ et $G$ respectivement telles que

$$|\langle\varphi|\, S\gamma\rangle| = |\mathfrak{s}\,(\varphi,\gamma)| \leqslant p\,(\varphi)\cdot q\,(\gamma) \ .$$

Cette dernière inégalité peut s'écrire

$$\|S\gamma\|_p \leqslant q\,(\gamma)$$

et montre que $S$ factorise par $(F_p)^\dagger_\beta$ en une application linéaire

$$S : G \longrightarrow (F_p)^\dagger_\beta \hookrightarrow \varinjlim \left((F_p)^\dagger_\beta, \pi_p^\dagger\right)$$

continue.

Utilisant les remarques 1 et 4 de 3.13 on obtient les inclusions et égalités suivantes :

$$\left|F^\dagger\right\rangle\left\langle G^\dagger\right| = \mathcal{L}^f\left(G,F^\dagger\right) = S\,(F_\sigma,G_\sigma) \subset S\,(F,G) = \Big(|F\rangle_\pi\,\langle G|\Big)^\dagger \subset \mathcal{L}\left(G, \varinjlim\left((F_p)^\dagger_\beta,\pi_p^\dagger\right)\right) \subset$$

$$\subset \mathcal{L}\left(G,F^\dagger_\beta\right) \subset \mathcal{S}\,(F,G) = \mathcal{L}_s\left(G,F^\dagger\right) = \Big(|F\rangle_i\,\langle G|\Big)^\dagger \ .$$

**PROBLEME** Quand a-t-on l'égalité

$$S\,(F,G) = \mathcal{S}\,(F,G) \quad \text{, i.e.} \quad \Big(|F\rangle_\pi\,\langle G|\Big)^\dagger = \Big(|F\rangle_i\,\langle G|\Big)^\dagger \ .$$

i.e. quand est-ce que toute forme sesquilinéaire séparément continue est continue ? Voici une réponse élémentaire.

**THEOREME** *Si $F$ est un espace localement convexe et $G$ un espace tonnelé, alors*

$$\mathcal{L}\left(G,F^\dagger_\beta\right) = \mathcal{L}\left(G,F^\dagger\right) \ .$$

Si $T : G \longrightarrow F^\dagger$ est continue et si $p$ est une semi-norme s.c.i. sur $F^\dagger$ , on a $p = \sup\left|\,\langle \mathrm{co}_p|\right|$ par le corollaire 3.9.iv appliqué à la semi-dualité $\left\langle F^\dagger\right|\left. F\right\rangle$ ; on a donc

$$p\circ T = \sup|\langle \mathrm{co}_p|\circ T| = \sup|\langle \mathrm{co}_p|\, T\cdot\rangle|$$

et $\langle \mathrm{co}_p|\, T\cdot\rangle \subset F^\dagger$ . Le scolie 2.13 montre que $p\circ T$ est une semi-norme continue, donc que $T : G \longrightarrow F^\dagger_\beta$ est continue. La réciproque est évidente puisque la topologie forte est plus fine que la topologie faible. □

**COROLLAIRE** *Si $F$ est normé et $G$ tonnelé, alors toute forme sesquilinéaire séparément continue sur $F\times G$ est continue.*

Puisque $\mathcal{L}\left(G, F^{\dagger}\right) = \mathcal{L}\left(G, F_{\beta}^{\dagger}\right)$ , la semi-norme $\gamma \longmapsto \|S\gamma\|_{F_{\beta}^{\dagger}}$ est continue sur $G$ ; mais comme

$$|\langle\varphi|\, S\gamma\rangle_F| \leqslant \|\varphi\|_F \cdot \|S\gamma\|_{F_{\beta}^{\dagger}} \ ,$$

la proposition 2.4 permet de conclure. □

Nous renvoyons à 2.13 pour des exemples d'espaces tonnelés et à N. Bourbaki [3], III, corollaire 1, p. 30 et IV, théorème 2, p. 26 pour d'autres résultats du même type.

## Les topologies de la convergence uniforme

**DEFINITION 2** Soit $\mathfrak{S}$ un ensemble de parties bornée de $F$ . On désigne par $\mathcal{L}_{\mathfrak{S}}(F, G)$ l'espace vectoriel des applications linéaires continues muni des semi-normes

$$q_B : T \longmapsto \sup_{\varphi \in B} q\left(T\varphi\right)$$

où $q$ est une semi-norme continue sur $G$ et $B \in \mathfrak{S}$ . On dit que c'est la *topologie de la convergence* (dans $G$ ) *uniforme sur les parties de* $\mathfrak{S}$ .

On ne change pas cette topologie en remplaçant les parties de $\mathfrak{S}$ par l'ensemble de toutes les parties contenues dans l'enveloppe fermée convexe absolument symétrique d'une partie de $\mathfrak{S}$ . Puisque $\mathrm{sn}_B = \mathrm{sn}_{\overline{\mathrm{cs}}(B)}$ , il est équivalent de se donner $\mathfrak{S}$ ou une famille de semi-normes s.c.i. sur $F^{\dagger}$ .

**EXEMPLE** On considère essentiellement les topologies de la convergence uniforme sur les parties suivantes :

(a) finies : $\mathcal{L}_s(F, G)$ .

(b) convexes compactes : $\mathcal{L}_{cc}(F, G)$ .

(c) compactes : $\mathcal{L}_c(F, G)$ .

(d) bornées : $\mathcal{L}_b(F, G)$ .

On dit que c'est la topologie de la convergence simple (cf. définition 3.1.3), convexe compacte, compacte et respectivement bornée.

On a $\mathcal{L}_b(F, \mathbb{K}) = F'_{\beta}$ par la remarque 1 ci-dessus. Attention l'enveloppe fermée convexe d'une partie compacte n'est pas nécessairement compacte.

(e) Soit $\mathfrak{E}$ l'ensemble des parties de $F^{\dagger}$ contenues dans une partie de la forme $\mathrm{co}_p$ , où $p$ est une semi-norme continue sur $F$ . Ce sont exactement les ensembles *équicontinus* de formes semi-linéaires sur $F$ .

Puisque toute semi-norme continue $p$ sur $F$ s'écrit $p = \mathrm{sn}_E = |\cdot|_E$ , où $E \in \mathfrak{E}$ (corollaire 3.9.iv), on a

$$F = \mathcal{L}_{\mathfrak{E}}(F', \mathbb{K}) \ .$$

Rappelons que $F_{\sigma} = (F')'$ (théorème 3.7).

## 3.17 Les opérateurs dans un espace de Hilbert

**DEFINITION 1** Soient $\mathcal{H}$ et $\mathcal{G}$ des espaces de Hilbert et $T : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{G}$ une application linéaire continue. On dit que c'est un *opérateur borné* . On dit aussi opérateur continu. Comme précédemment (cf. 3.8), nous désignerons par

$$T^\dagger : \mathcal{G}_\beta^\dagger \longrightarrow \mathcal{H}_\beta^\dagger$$

l' *opérateur adjoint* .

Rappelons que le dual fort $\mathcal{H}_\beta^\dagger$ de $\mathcal{H}$ est un espace de Hilbert, mais que l'on n'identifie pas nécessairement avec $\mathcal{H}$ (cf. remarque 1.5.2). Si l'on fait toutefois cette identification, alors

**DEFINITION 2** Nous désignerons l'opérateur adjoint par

$$T^* : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H} .$$

Il est caractérisé par

$$(\xi | T^*\gamma)_\mathcal{H} = (T\xi | \gamma)_\mathcal{G} \quad \text{pour tout } \xi \in \mathcal{H} \text{ et } \gamma \in \mathcal{G} ,$$

i.e. $T^*\gamma$ est l'unique élément de $\mathcal{H}$ qui grâce au théorème de Riesz représente la forme semi-linéaire continue

$$\xi \longmapsto (T\xi | \gamma)_\mathcal{G} : \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{K} .$$

Les formules de la proposition 3.7 et des corollaires 3.8 et 3.10 sont évidemment valables pour $\diamond^*$ à la place de $\diamond^\dagger$ .

Nous n'utiliserons donc la notation $T^*$ que lorsque $\mathcal{H}$ et $\mathcal{G}$ sont identifiés avec leur semi-dual fort.

**THEOREME (Hellinger-Toeplitz)** *Soient $\mathcal{H}, \mathcal{G}$ des espaces de Hilbert et $T : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{G}$ une application linéaire possédant une adjointe $S : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H}$ , i.e. telle que*

$$(\xi | S\gamma)_\mathcal{H} = (T\xi | \gamma)_\mathcal{G} \quad \textit{pour tout } \xi \in \mathcal{H} \textit{ et } \gamma \in \mathcal{G} .$$

*Alors $T$ est un opérateur borné et $S = T^*$ .*

C'est immédiat par le scolie 3.7.ii. C'est aussi une conséquence du théorème du graphe fermé 3.14. Si $((\xi_k, T\xi_k))_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $(\xi, \gamma)$ dans $\mathcal{H} \times \mathcal{G}$ , il nous suffit de montrer que $\gamma = T\xi$ . Mais pour tout $\theta \in \mathcal{G}$ , par la continuité du produit scalaire on a

$$(T\xi | \theta)_\mathcal{G} = (\xi | S\theta)_\mathcal{H} = (\lim_k \xi_k | S\theta)_\mathcal{H} = \lim_k (\xi_k | S\theta)_\mathcal{H} =$$

$$= \lim_k (T\xi_k | \theta)_\mathcal{G} = (\lim_k T\xi_k | \gamma)_\mathcal{G} = (\gamma | \theta)_\mathcal{G} ,$$

donc $T\xi = \gamma$ . □

Rappelons les notions suivantes :

**DEFINITION 3** Soit $T : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{G}$ un opérateur borné. On dit que $T$ est

(a) *unitaire* si

$$T^*T = \mathrm{Id}_{\mathcal{H}} \quad \text{et} \quad TT^* = \mathrm{Id}_{\mathcal{G}} \ .$$

Si $T$ un opérateur borné dans $\mathcal{H}$ , on dit qu'il est

(a) *normal* si

$$T^*T = TT^* \ ,$$

(b) *auto-adjoint* si

$$T = T^* \ ,$$

(c) *auto-adjoint positif* si $T$ est auto-adjoint et

$$(\xi | T\xi) \geqslant 0 \quad \text{pour tout } \xi \in \mathcal{H} \ .$$

**EXERCICE** Montrer que $T : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{G}$ est une isométrie si, et seulement si, $T$ est borné et $T^*T = \mathrm{Id}_{\mathcal{H}}$ . En déduire que $T$ est unitaire si, et seulement si, $T$ est une isométrie surjective, ou encore si $T$ est un opérateur borné bijectif et

$$T^{-1} = T^* \ ,$$

**PROPOSITION** *Soit $T$ un opérateur dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ .*

*(i) On a*

$$\|T\| = \sup_{\xi,\eta \in \mathcal{H}, \|\xi\|,\|\eta\| \leqslant 1} |(\xi | T\eta)| \ .$$

*Si $T$ est auto-adjoint, alors*

$$\|T\| = \sup_{\xi \in \mathcal{H}, \|\xi\| \leqslant 1} |(\xi | T\xi)| \ .$$

*(ii) Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ , alors*

$$\|T\| \leqslant 2 \cdot \sup_{\xi \in \mathcal{H}, \|\xi\| \leqslant 1} |(\xi | T\xi)| \ ,$$

$$T \text{ auto-adjoint} \iff (\xi | T\xi) \in \mathbb{R} \quad \text{pour tout } \xi \in \mathcal{H}$$

*et*

$$T \text{ auto-adjoint positif} \iff (\xi | T\xi) \geqslant 0 \quad \text{pour tout } \xi \in \mathcal{H} \ .$$

*(iii) Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et $T = U + i \cdot V$ , où $U, V$ sont des opérateurs auto-adjoints dans $\mathcal{H}$ , alors*

$$U = \operatorname{Re} T := \frac{1}{2} \cdot (T + T^*) \quad , \quad V = \operatorname{Im} T := \frac{1}{2i} \cdot (T - T^*)$$

*et*

$$T \text{ est borné} \iff U, V \text{ sont bornés.}$$

*En outre*

$$T \text{ est normal} \iff U, V \text{ commutent.}$$

**Démonstration de (i)** Utilisant le théorème 2.8, on obtient tout d'abord

$$\|T\| = \sup_{\|\eta\| \leqslant 1} \|T\eta\| = \sup_{\|\eta\| \leqslant 1} \sup_{\|\xi\| \leqslant 1} |(\xi | T\eta)| \geqslant \sup_{\|\xi\| \leqslant 1} |(\xi | T\xi)| =: M \ ,$$

ce qui prouve en particulier la première partie. Remarquons que l'on a

$$|(\xi|\, T\xi)| \leqslant M \cdot \|\xi\|^2 \ .$$

Si $T$ est auto-adjoint, on a

$$(\xi|\, T\eta) = (T^*\xi|\, \eta) = (T\xi|\, \eta) = \overline{(\eta|\, T\xi)} \ ,$$

donc

$$4 \cdot \mathrm{Re}\,(\xi|\, T\eta) = 2 \cdot \left[(\xi|\, T\eta) + \overline{(\xi|\, T\eta)}\right] = 2 \cdot [(\xi|\, T\eta) + (\eta|\, T\xi)] =$$

$$= (\xi + \eta|\, T\,(\xi + \eta)) - (\xi - \eta|\, T\,(\xi - \eta))$$

en appliquant la première formule de polarisation, proposition 1.3.i, à la forme sesquilinéaire

$$(\xi, \eta) \longmapsto (\xi|\, T\eta) \ .$$

Grâce à l'égalité du parallélogramme, corollaire 1.3, on obtient alors

$$4 \cdot |\mathrm{Re}\,(\xi|\, T\eta)| \leqslant |(\xi + \eta|\, T\,(\xi + \eta))| + |(\xi - \eta|\, T\,(\xi - \eta))| \leqslant$$

$$\leqslant M \cdot \left(\|\xi + \eta\|^2 + \|\xi - \eta\|^2\right) = 2M \cdot \left(\|\xi\|^2 + \|\eta\|^2\right) \leqslant 4M$$

si $\|\xi\|, \|\eta\| \leqslant 1$ . Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , on en déduit que $|(\xi|\, T\eta)| \leqslant M$ , donc que $\|T\| \leqslant M$ . Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ , il existe $u \in \mathbb{U}$ tel que

$$|(\xi|\, T\eta)| = u \cdot (\xi|\, T\eta) = (u \cdot \xi|\, T\eta) = |\mathrm{Re}\,(u \cdot \xi|\, T\eta)| \leqslant M \ ,$$

ce qui prouve aussi que $\|T\| \leqslant M$ .

**Démonstration de (ii)** Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ , la formule de polarisation, proposition 1.3.iii, et l'égalité du parallélogramme, corollaire 1.3, montrent que

$$4 \cdot |(\xi|\, T\eta)| \leqslant \sum_{\varepsilon^4 = 1} |(\xi + \overline{\varepsilon} \cdot \eta|\, T\,(\xi + \overline{\varepsilon} \cdot \eta))| \leqslant M \cdot \sum_{\varepsilon^4 = 1} \|\xi + \overline{\varepsilon} \cdot \eta\|^2 =$$

$$= 2M \cdot \left(\|\xi\|^2 + \|\eta\|^2 + \|\xi\|^2 + \|i \cdot \eta\|^2\right) \leqslant 8M \ ,$$

si $\|\xi\|, \|\eta\| \leqslant 1$ , donc que $\|T\| \leqslant 2M$ .

Les conditions sont évidemment nécessaires, puisque

$$(\xi|\, T\xi) = (T^*\xi|\, \xi) = (T\xi|\, \xi) = \overline{(\xi|\, T\xi)} \ .$$

Réciproquement, si $(\xi|\, T\xi) \in \mathbb{R}$ , on a

$$(\xi|\, (T - T^*)\, \xi) = (\xi|\, T\xi) - (T\xi|\, \xi) = (\xi|\, T\xi) - \overline{(\xi|\, T\xi)} = 0 \ ,$$

donc

$$\|T - T^*\| \leqslant 2 \cdot \sup\nolimits_{\xi \in \mathcal{H}, \|\xi\| \leqslant 1} |(\xi|\, (T - T^*)\, \xi)| = 0 \ ,$$

et par suite $T = T^*$ . La dernière partie est alors immédiate.

**Démonstration de (iii)** La démonstration est laissé au lecteur. ——— □

**REMARQUE 1** Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , les assertions de (ii) sont fausses comme le montre une rotation de $\frac{\pi}{2}$ dans $\mathbb{R}^2$ .

**REMARQUE 2** Il est recommandé de comparer ces résultats avec ceux de 3.13 et 1.5.

**EXERCICE (Théorème de Lax-Milgram)** Soient $F, G$ des espaces normés et $T$ une application linéaire de $F$ dans $G$ . Montrer :

(a) Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) Il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$\|T\varphi\| \geqslant \varepsilon \cdot \|\varphi\| \quad \text{pour tout } \varphi \in F \ .$$

(ii) $T$ est injectif et $\overset{-1}{T} : T(F) \longrightarrow F$ est continu.

(b) Si $F$ est complet, $T$ est continu et l'une des propriétés de (a) est satisfaite, alors $T(F)$ est complet.

(c) Si $T$ est un isomorphisme, alors $F$ est complet si, et seulement si, $G$ est complet.

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ .

(d) $\operatorname{Im} T$ dense dans $\mathcal{H}$ , si, et seulement si, $T^*$ est injectif.

(e) Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $T$ est inversible.

(ii) $T^*$ est inversible.

(iii) $T^*$ est injectif et il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$\|T\xi\| \geqslant \varepsilon \cdot \|\xi\| \quad \text{pour tout } \xi \in \mathcal{H} \ .$$

## 3.18 Les opérateurs intégraux de Hilbert-Schmidt

**Soient $\mu$ et $\nu$ des intégrales de Radon sur $X$ et $Y$ respectivement.**

Etant donné $\varkappa \in \mathbf{L}^2(\mu \otimes \nu)$ , le théorème de Tonelli et Fubini, cours d'Analyse [17] 16.3, ainsi que le critère d'intégrabilité, cours d'Analyse [17] 15.10, montrent que $\varkappa(x,\cdot) \in \mathbf{L}^2(\nu)$ pour $\mu$-presque tous les $x \in X$ . Si $\eta \in \mathbf{L}^2(\nu)$ , on peut donc définir

$$T_\varkappa \eta(x) := \int \varkappa(x,\diamond) \cdot \eta \, d\nu \quad \text{pour } \mu\text{-presque tous les } x \in X \ ,$$

et par 0 sinon.

Pour tout $K \in \mathfrak{K}(X)$ , on a

$$1_K \cdot T_\varkappa \eta := \int \varkappa(\diamond, y) \cdot 1_K \cdot \eta(y) \, d\nu(y) \quad \mu\text{-p.p.} \ ,$$

et $1_K \otimes \eta \in \mathbf{L}^2(\mu \otimes \nu)$ (cours d'Analyse [17], corollaire 16.3 et critère d'intégrabilité 15.10). On en déduit que $\varkappa \cdot 1_K \otimes \eta \in \mathbf{L}^1(\mu \otimes \nu)$ , et le théorème de Fubini, (cf. aussi cours d'Analyse [17], théorème 15.2.ii), montre que $1_K \cdot T_\varkappa \eta \in \mathbf{L}^1(\mu)$ . Cette fonction est en particulier $\mu$-mesurable, donc $T_\varkappa \eta$ est $\mu$-mesurable (cf. cours d'Analyse [17], théorème 15.9.i). D'autre part, on a

$$\int^* |T_\varkappa \eta|^2 \, d\mu = \int^* \left| \int \varkappa(x,\diamond) \cdot \eta \, d\nu \right|^2 d\mu(x) \leqslant \int^* \left( \int |\varkappa(x,\diamond)|^2 \, d\nu \cdot \int |\eta|^2 \, d\nu \right) d\mu(x) =$$

$$= \|\eta\|_{2,\nu}^2 \cdot \int^* \left( \int^* |\varkappa(x,\diamond)|^2 \, d\nu \right) d\mu(x) = \|\eta\|_{2,\nu}^2 \cdot \|\varkappa\|_{2,\mu\otimes\nu} < \infty \ .$$

Le critère d'intégrabilité montre donc que $T_\varkappa \eta \in \mathbf{L}^2(\mu)$ . Nous avons donc prouvé

**THEOREME** *Si $\varkappa \in \mathbf{L}^2(\mu \otimes \nu)$ , il existe un opérateur continu*

$$T_\varkappa : \mathbf{L}^2(\nu) \longrightarrow \mathbf{L}^2(\mu) : \eta \longmapsto T_\varkappa \eta$$

*tel que*

$$T_\varkappa \eta(x) := \int \varkappa(x,\diamond) \cdot \eta \, d\nu \quad \textit{pour } \mu\textit{-presque tous les } x \in X \ ,$$

*et*

$$\|T_\varkappa\| \leqslant \|\varkappa\|_{2,\mu\otimes\nu} \ .$$

*On dit que c'est un* opérateur intégral de Hilbert-Schmidt *de noyau $\varkappa$ .*

*Son adjoint*

$$T_\varkappa^* : \mathbf{L}^2(\mu) \longrightarrow \mathbf{L}^2(\nu)$$

*est l'opérateur intégral de Hilbert-Schmidt provenant du noyau $\varkappa^* \in \mathbf{L}^2(\nu \otimes \mu)$ défini par*

$$\varkappa^*(y,x) := \overline{\varkappa(x,y)} \ .$$

Il nous reste à calculer $T_{\varkappa}^{*}$ . Pour tout $\eta \in \mathbf{L}^2(\nu)$ et $\xi \in \mathbf{L}^2(\mu)$ , le corollaire 16.3.i et le théorème de Fubini 16.3 (cours d'Analyse [17]) nous permettent d'écrire

$$(\eta | T_{\varkappa}^{*}\xi) = (T_{\varkappa}\eta | \xi) = \int \overline{T_{\varkappa}\eta} \cdot \xi \, d\mu = \int \left( \overline{\int \varkappa(x,y) \cdot \eta(y) \, d\nu(y)} \right) \cdot \xi(x) \, d\mu(x) =$$

$$= \int \overline{\varkappa} \cdot |\xi\rangle \langle \eta| \, d\mu \otimes \nu = \int \overline{\eta} \cdot \left( \int \overline{\varkappa(x,\diamond)} \cdot \xi(x) \, d\mu(x) \right) d\nu = \left( \eta \middle| \int \overline{\varkappa(x,\diamond)} \cdot \xi(x) \, d\mu(x) \right) ,$$

d'où notre assertion. $\square$

**REMARQUE** L'inégalité $\|T_{\varkappa}\| \leqslant \|\varkappa\|_{2,\mu\otimes\nu}$ est en général stricte.

**EXERCICE 1 (Les opérateurs abstraits de Hilbert-Schmidt)**

Soient $\mathcal{H},\mathcal{G}$ des espaces de Hilbert. On dit qu'un opérateur $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H},\mathcal{G})$ est de *Hilbert-Schmidt* si pour une base hilbertienne $(\epsilon_j)_{j\in J}$ de $\mathcal{H}$ , on a

$$\sum_{j\in J} \|T\epsilon_j\|_{\mathcal{G}}^2 < \infty . \qquad (*)$$

On désigne par $\mathcal{L}^2(\mathcal{H},\mathcal{G})$ l'ensemble de ces opérateurs. Montrer

**EXERCICE 2** (a)

$$T \in \mathcal{L}^2(\mathcal{H},\mathcal{G}) \iff T^* \in \mathcal{L}^2(\mathcal{G},\mathcal{H}) .$$

Utiliser l'égalité de Parseval.

(b) Si $T \in \mathcal{L}^2(\mathcal{H},\mathcal{G})$ , on a $(*)$ pour toute base hilbertienne de $\mathcal{H}$ et les sommes sont égales.

(c) La fonction

$$(T,S) \longmapsto (T|S) := \sum_{j\in J} (T\epsilon_j | S\epsilon_j)_{\mathcal{G}} : \mathcal{L}^2(\mathcal{H},\mathcal{G}) \times \mathcal{L}^2(\mathcal{H},\mathcal{G}) \longrightarrow \mathbb{K}$$

est un produit scalaire sur $\mathcal{L}^2(\mathcal{H},\mathcal{G})$ et on a

$$\|T\| \leqslant (T|T)^{\frac{1}{2}} =: \|T\|_2 \quad \text{pour tout } T \in \mathcal{L}^2(\mathcal{H},\mathcal{G}) .$$

(d) $\mathcal{L}^2(\mathcal{H},\mathcal{G})$ est un espace de Hilbert.

(e) On a

$$\mathcal{L}^2(\mathcal{H},\mathcal{G}) = |\mathcal{G}\rangle \widehat{\,}_2 \langle \mathcal{H}| .$$

**EXERCICE 3** Soient $\mu,\nu$ des intégrales de Radon respectivement sur les espaces séparés $X$ et $Y$ , $\varkappa \in \mathbf{L}^2(X \times Y, \mu \otimes \nu)$ et $T_{\varkappa}$ l'opérateur de Hilbert-Schmidt associé. Montrer :

(a) Si $(\epsilon_j)_{j\in J}$ est une base hilbertienne de $\mathbf{L}^2(\nu)$ , pour $\mu$-presque tous les $x \in X$ il existe une famille $(\alpha_j(x))_{j\in J} \in \ell^2(J)$ telle que

$$\varkappa(x,\cdot) = \sum_{j\in J} \alpha_j(x) \cdot \epsilon_j \quad \text{dans } \mathbf{L}^2(\nu) .$$

(b) Pour toute base hilbertienne $(\epsilon_j)_{j\in J}$ de $\mathbf{L}^2(\nu)$ , on a

$$\sum_{j\in J} \|T_{\varkappa}\epsilon_j\|_{2,\mu}^2 = \int_{X\times Y} |\varkappa|^2 \, d\,\mu\otimes\nu = \|\varkappa\|_2^2 \ .$$

Remarquer que si $(\epsilon_j)_{j\in J}$ est une base hilbertienne de $\mathbf{L}^2(\nu)$, il en est de même de $(\overline{\epsilon_j})_{j\in J}$ .

(c) On a

$$\mathcal{L}^2\left(\mathbf{L}^2(\nu), \mathbf{L}^2(\mu)\right) = \left|\mathbf{L}^2(\mu)\right)\widehat{\ }_2\left(\mathbf{L}^2(\nu)\right| = \mathbf{L}^2(\mu\otimes\nu) \ .$$

## 3.19 Les opérateurs intégraux faiblement singuliers

Soient $\mu$ et $\nu$ des intégrales de Radon sur $X$ et $Y$ respectivement.

**THEOREME** *Soit $\varkappa : X \times Y \longrightarrow \mathbb{K}$ une fonction $\mu \otimes \nu$-mesurable telle que l'on ait*

$$M := \sup_{\|\xi\|_{2,\mu}, \|\eta\|_{2,\nu} \leqslant 1} \iint^* |\xi(x) \cdot \varkappa(x,y) \cdot \eta(y)| \; d(\mu \otimes \nu)(x,y) < \infty \; .$$

*Alors, pour tout $\eta \in \mathbf{L}^2(\nu)$ , la fonction $\varkappa(x, \diamond) \cdot \eta$ est $\nu$-intégrable pour localement $\mu$-presque tous les $x \in X$ et la fonction*

$$T_\varkappa \eta := \int \varkappa(\diamond, y) \cdot \eta(y) \; d\nu(y) \;\; ,$$

*qui est définie localement $\mu$-p.p. , appartient à $\mathbf{L}^2(\mu)$ . L'application linéaire $T_\varkappa : \mathbf{L}^2(\nu) \longrightarrow \mathbf{L}^2(\mu)$ ainsi définie est continue et $\|T_\varkappa\| \leqslant M$ .*

En effet, la forme sesquilinéaire sur $\mathbf{L}^2(\mu) \times \mathbf{L}^2(\nu)$ définie par

$$\mathfrak{s} : (\xi, \eta) \longmapsto \iint \overline{\xi(x)} \cdot \varkappa(x,y) \cdot \eta(y) \; d(\mu \otimes \nu)(x,y)$$

est bornée, puisque

$$|\mathfrak{s}(\xi, \eta)| \leqslant M \cdot \|\xi\|_{2,\mu} \cdot \|\eta\|_{2,\nu} \;\; .$$

Il existe donc d'après le corollaire 1.5 une application linéaire continue $T_\varkappa : \mathbf{L}^2(\nu) \longrightarrow \mathbf{L}^2(\mu)$ telle que

$$(\xi | T_\varkappa \eta) = \iint \overline{\xi(x)} \cdot \varkappa(x,y) \cdot \eta(y) \; d(\mu \otimes \nu)(x,y) \;\; ,$$

et on a

$$\|T_\varkappa\| = \sup_{\|\xi\|_{2,\mu}, \|\eta\|_{2,\nu} \leqslant 1} |(\xi | T_\varkappa \eta)| \leqslant M \; .$$

Pour tout $\eta \in \mathbf{L}^2(\nu)$ et $\xi \in \mathbf{L}^2(\mu, 1_K)$ , les théorèmes de Tonneli et Fubini montrent que la fonction $\overline{\xi(x)} \cdot \varkappa(x, \diamond) \cdot \eta$ est $\nu$-intégrable pour $\mu$-presque tous les $x \in X$ et que la fonction $\overline{\xi} \cdot \int \varkappa(\diamond, y) \cdot \eta(y) \; d\nu(y)$ , qui est définie $\mu$-p.p. , est $\mu$-intégrable. En particulier, pour tout $K \in \mathfrak{K}(X)$ , la fonction $1_K \cdot \int \varkappa(\diamond, y) \cdot \eta(y) \; d\nu(y)$ est définie $\mu$-p.p. et $\mu$-mesurable. On en déduit par le lemme 1.16.i et le théorème 15.9.i du cours d'Analyse [17] que $\int \varkappa(\diamond, y) \cdot \eta(y) \; d\nu(y)$ est définie localement $\mu$-p.p. et $\mu$-mesurable. On a alors

$$\int \overline{\xi} \cdot T_\varkappa \eta \, d\mu = (\xi | T_\varkappa \eta) = \int \overline{\xi} \cdot \left( \int \varkappa(x\diamond, y) \cdot \eta(y) \; d\nu(y) \right) d\mu \; .$$

Grâce à la proposition et l'exemple 1.16.1, on obtient

$$T_\varkappa \eta = \int \varkappa(\diamond, y) \cdot \eta(y) \; d\nu(y) \quad \text{localement } \mu\text{-p.p. ,}$$

et prouve que $\int \varkappa(\diamond, y) \cdot \eta(y) \; d\nu(y) \in \mathbf{L}^2(\mu)$ (cf. lemme 1.16.iv). ——— □

**DEFINITION** On dit que $T_\varkappa$ est un *opérateur intégral faiblement singulier* de noyau $\varkappa$ .

**REMARQUE 1** Ce résultat est évidemment applicable aux noyaux de carré intégrables de l'exemple précédent. Il suffit de constater que

$$\iint^* |\xi(x) \cdot \varkappa(x,y) \cdot \eta(y)| \; d(\mu \otimes \nu)(x,y) \leqslant$$

$$\leqslant \left[\iint^* |\varkappa(x,y)|^2 \; d(\mu \otimes \nu)(x,y)\right]^{\frac{1}{2}} \left[\iint^* |\xi(x) \cdot \eta(y)|^2 \; d(\mu \otimes \nu)(x,y)\right]^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \|\varkappa\|_{2,\mu\otimes\nu} \cdot \|\xi\|_{2,\mu} \cdot \|\eta\|_{2,\nu} \; .$$

**APPLICATION** Pour pouvoir estimer le nombre $M$ il suffit appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz, mais de manière un peu moins brutale que ci-dessus. L'idée consiste à décomposer le noyau.

Si

$$\varkappa = u \cdot v \quad , \text{ où } u, v \text{ sont } \mu \otimes \nu\text{-mesurables} ,$$

on a

$$\left[\iint^* |\xi(x) \cdot \varkappa(x,y) \cdot \eta(y)| \; d(\mu \otimes \nu)(x,y)\right]^2 \leqslant$$

$$\leqslant \left[\iint^* |\xi(x)|^2 \cdot |u(x,y)|^2 \; d(\mu \otimes \nu)(x,y)\right] \left[\iint^* |v(x,y)|^2 \cdot |\eta(y)|^2 \; d(\mu \otimes \nu)(x,y)\right] \leqslant$$

$$\leqslant \left[\int^* |\xi|^2 \cdot \left(\int^* |u(\cdot,y)|^2 \; d\nu(y)\right) d\mu\right] \left[\int^* |\eta|^2 \cdot \left(\int^* |v(x,\cdot)|^2 \; d\mu(x)\right) d\nu\right] \leqslant$$

$$\leqslant \left\|\int^* |u(\cdot,y)|^2 \; d\nu(y)\right\|_{\infty,\mu} \cdot \left\|\int^* |v(x,\cdot)|^2 \; d\mu(x)\right\|_{\infty,\nu} \cdot \|\xi\|_{2,\mu}^2 \cdot \|\eta\|_{2,\nu}^2 \; .$$

Ainsi, si les deux suprema essentiels sont finis, le noyau $\varkappa$ définit une application linéaire continue $T_\varkappa$ de $\mathbf{L}^2(\nu)$ dans $\mathbf{L}^2(\mu)$ telle que

$$\|T_\varkappa\| \leqslant \left\|\int^* |u(\cdot,y)|^2 \; d\nu(y)\right\|_{\infty,\mu}^{\frac{1}{2}} \cdot \left\|\int^* |v(x,\cdot)|^2 \; d\mu(x)\right\|_{\infty,\nu}^{\frac{1}{2}} \; .$$

Plaçons-nous maintenant dans un ouvert $X$ de $\mathbb{R}^n$ . Ces conditions sont par exemple satisfaites si

$$\varkappa(x,y) = b(x,y) \cdot \widetilde{\varkappa}(x-y) \quad \text{pour tout } x, y \in X ,$$

pour un $\widetilde{\varkappa} \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^n)$ et $b$ une fonction $\lambda_X \otimes \lambda_X$-mesurable et bornée.

Il suffit de poser

$$u := |\varkappa|^{\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad v := \operatorname{signum}(\varkappa) \cdot |\varkappa|^{\frac{1}{2}} \; ;$$

il vient alors

$$\int^* |u(x,y)|^2 \; dy = \int^* |b(x,y) \cdot \widetilde{\varkappa}(x-y)| \; dy \leqslant \|b\|_\infty \cdot \|\widetilde{\varkappa}\|_1 < \infty \quad \text{pour tout } x \in X ,$$

et de même

$$\int^{*} |v(x,y)|^2 \, dx \leqslant \|b\|_\infty \cdot \|\widetilde{\varkappa}\|_1 < \infty \quad \text{pour tout } y \in X \ .$$

En particulier si $X$ est borné et si, pour un $s < n$ , on a

$$\varkappa(x,y) = \frac{b(x,y)}{|x-y|^s} \quad \text{pour tout } x,y \in X \ ,$$

il suffit de prendre

$$\widetilde{\varkappa}(x) := \begin{cases} \frac{1}{|x|^s} & \quad x \in \mathbb{B}_R^n \\ & \text{si} \\ 0 & \quad \text{sinon} \end{cases}$$

en ayant choisi $R$ tel que $X - X \subset \mathbb{B}_R^n$ , par exemple si $X \subset \mathbb{B}_{\frac{R}{2}}^n$ .

Ces noyaux sont dits *faiblement singuliers* car, bien que singuliers au voisinage de la diagonale, ils satisfont à une condition d'intégrabilité.

## 3.20 Les opérateurs intégraux généraux

Soient $\mu$ et $\nu$ des intégrales de Radon
sur des espaces localement compacts $X$ et $Y$ respectivement.

Rappelons que si $\varkappa$ est une intégrale de Radon quelconque sur $X \times Y$ , nous avons défini dans l'exemple 3.13.2 une application linéaire (faiblement) continue $S_\varkappa : \mathcal{K}(Y) \longrightarrow \mathcal{M}(X)$ définie par

$$\langle \varphi | S_\varkappa \gamma \rangle = \left\langle |\varphi\rangle \langle\gamma| \middle| \varkappa \right\rangle = \int \overline{\varphi(x)} \cdot \gamma(y)\, d\varkappa(x,y) \ .$$

De même si $X, Y$ sont des ouverts de $\mathbb{R}^n$ et respectivement $\mathbb{R}^m$ , pour tout $\varkappa \in \mathcal{D}(X \times Y)'$ , nous avons défini dans l'exemple 3.13.3 une application linéaire (faiblement) continue $S_\varkappa$ : $\mathcal{D}(Y) \longrightarrow \mathcal{D}(X)'$ définie par

$$\langle \varphi | S_\varkappa \gamma \rangle = \left\langle |\varphi\rangle \langle\gamma| \middle| \varkappa \right\rangle \ .$$

On dit que $\varkappa$ est le *noyau* de $S_\varkappa$ .

**PROBLEME** Peut-on trouver des conditions sur $\varkappa$ telles que $S_\varkappa$ se factorise par $\mathbf{L}^2(\mu) \hookrightarrow \mathcal{M}(X)$ , puis se prolonge continûment à $\mathbf{L}^2(\nu)$ , i.e. qu'il existe une application linéaire continue $T_\varkappa : \mathbf{L}^2(\nu) \longrightarrow \mathbf{L}^2(\mu)$ telle que le diagramme suivant soit commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{K}(Y) \arrow[r] \arrow[d, "S_\varkappa"'] \arrow[dr] & \mathbf{L}^2(\nu) \arrow[d, "T_\varkappa"] \\
\mathcal{M}(X) & \mathbf{L}^2(\mu) \arrow[l, hook']
\end{tikzcd}$$

.

C'est l'un des problèmes les plus difficiles de l'Analyse fonctionnelle. Même dans le cadre des noyaux dits singuliers ou plus généralement des noyaux de Calderon-Zygmund (au sens de Meyer [16]), la réponse est très complexe !

Comme nous l'avons déjà mentionné dans la remarque 3.13.5 (cf. exercice et remarque 4.12.3), on a

$$\mathcal{M}(X \times Y) \subsetneqq \mathcal{L}_s(\mathcal{K}(Y), \mathcal{M}(X)) \ ,$$

tandis que dans le cadre des distributions on a le théorème des noyaux de Schwartz

$$\mathcal{D}(X \times Y)' = \mathcal{L}_s\left(\mathcal{D}(Y), \mathcal{D}(X)'\right)$$

(cf. exemple 3.13.3).

**EXEMPLE** Si $X = Y$ et

$$\varkappa = \int |\varepsilon_x\rangle \langle\varepsilon_x|\, d\mu(x) = \iota(\mu) \in \mathcal{M}(X \times X) \ ,$$

où $\iota : X \longrightarrow X \times X : x \longmapsto (x, x)$ désigne l'application diagonale, on a

$$S_{\varkappa} : \gamma \longmapsto \gamma \cdot \mu : \mathcal{K}(X) \longrightarrow \mathcal{M}(X) \ ,$$

donc $T_{\varkappa} = \mathrm{Id}_{\mathbf{L}^2(\mu)}$ . Ceci montre que $\mathrm{Id} : \mathbf{L}^2(\mu) \longrightarrow \mathbf{L}^2(\mu)$ ne peut pas être défini par un noyau-fonction.

## 3.21 La matrice d'un operateur

Si $\mathcal{H}, \mathcal{G}$ sont des espaces de Hilbert identifiés avec leur semi-dual, les remarques 2 et 3 de 3.13 montrent que

$$\mathcal{L}_s(\mathcal{H}, \mathcal{G}_\sigma) = (|\mathcal{G}\rangle_i \langle\mathcal{H}|)^\dagger \quad \text{et} \quad \mathcal{L}^f(\mathcal{H}, \mathcal{G}) = |\mathcal{G}\rangle\langle\mathcal{H}| \ .$$

(cf. corollaire 3.5). Ceci montre la première partie du

**THEOREME**

*(i) Tout opérateur de rang fini $R$ de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{G}$ est de la forme*

$$R = \sum_{j=1}^n |\gamma_j)(\xi_j| \ ,$$

*pour des suites $(\xi_j)_{j=1,\ldots,n} \subset \mathcal{H}$ et $(\gamma_j)_{j=1,\ldots,n} \subset \mathcal{G}$ .*

*Pour tout $\xi \in \mathcal{H}$ et $\gamma \in \mathcal{G}$ , on a*

$$\Big(|\gamma)(\xi|\Big)^* = |\xi)(\gamma| \ ,$$

*et plus généralement*

$$R^* = \sum_{j=1}^n |\xi_j)(\gamma_j| \ .$$

*(ii) Soient $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{G})$ et $(\epsilon_x)_{x\in X}$ une base hilbertiennes de $\mathcal{H}$ . La famille $(|T\epsilon_x)(\epsilon_x|)_{x\in X}$ d'opérateurs de rang 1 est sommable dans $\mathcal{L}_s(\mathcal{H}, \mathcal{G})$ et on a*

$$T = \sum_{x\in X} |T\epsilon_x)(\epsilon_x| \ .$$

*En particulier $\mathcal{L}^f(\mathcal{H}, \mathcal{G})$ est dense dans $\mathcal{L}_s(\mathcal{H}, \mathcal{G})$ et*

$$\mathrm{Id}_{\mathcal{H}} = \sum_{x\in X} |\epsilon_x)(\epsilon_x| \ .$$

*(iii) Si $(\vartheta_y)_{y\in Y}$ est une base hilbertiennes de $\mathcal{G}$ , alors*

$$T = \sum_{x\in X} \left|\sum_{y\in Y} \vartheta_y \cdot (\vartheta_y|\, T\epsilon_x)\right)\left(\epsilon_x\right| = \sum_{y\in Y} \left|\vartheta_y\right)\left(\sum_{x\in X} (\vartheta_y|\, T\epsilon_x)\cdot \epsilon_x\right|$$

*dans $\mathcal{L}_s(\mathcal{H}, \mathcal{G})$ .*

**Démonstration de (i)** La seconde partie découle immédiatement de l'exemple 3.7.1.

**Démonstration de (ii)** Puisque les semi-normes $p_\xi : T \longmapsto \|T\xi\|_{\mathcal{G}}$ pour $\xi \in \mathcal{H}$ définissent la topologie de $\mathcal{L}_s(\mathcal{H}, \mathcal{G})$ et que $\xi = \sum_{x\in X} \epsilon_x \cdot (\epsilon_x|\, \xi)$ d'après le théorème 1.10.iii, on a $T\xi = \sum_{x\in X} T\epsilon_x \cdot (\epsilon_x|\, \xi)$ par continuité (cf. remarque 2.6.2), donc

$$\lim_{K\in\mathfrak{K}(X)} p_\xi\left(\sum_{x\in K} |T\epsilon_x)(\epsilon_x| - T\right) = \lim_{K\in\mathfrak{K}(X)} \left\|\sum_{x\in K} T\epsilon_x \cdot (\epsilon_x|\, \xi) - T\xi\right\|_{\mathcal{G}} = 0 \ .$$

**Démonstration de (iii)** En effet

$$T\epsilon_x \cdot (\epsilon_x|\,\xi) = \left(\sum_{y\in Y} \vartheta_y \cdot (\vartheta_y|\,T\epsilon_x)\right) \cdot (\epsilon_x|\,\xi) \quad \text{dans } \mathcal{G} \ ,$$

donc

$$|T\epsilon_x)\,(\epsilon_x| = \left|\sum_{y\in Y} \vartheta_y \cdot (\vartheta_y|\,T\epsilon_x)\right)\left(\epsilon_x\right| \quad \text{dans } \mathcal{L}_s(\mathcal{H},\mathcal{G}) \ .$$

On en déduit que

$$T = \sum_{x\in X} |T\epsilon_x)\,(\epsilon_x| = \sum_{x\in X} \left|\sum_{y\in Y} \vartheta_y \cdot (\vartheta_y|\,T\epsilon_x)\right)\left(\epsilon_x\right| \ ,$$

dans $\mathcal{L}_s(\mathcal{H},\mathcal{G})$ .

Il vient alors

$$T = (T^*)^* = \left[\sum_{y\in Y} \left|\sum_{x\in X} \epsilon_x \cdot (\epsilon_x|\,T^*\vartheta_y)\right)\left(\vartheta_y\right|\right]^* = \sum_{y\in Y} \left|\vartheta_y\right)\left(\sum_{x\in X} (\vartheta_y|\,T\epsilon_x) \cdot \epsilon_x\right| \ ,$$

puisque l'adjonction est continue. Directement il aurait suffit d'écrire

$$T\xi = \sum_{y\in Y} \vartheta_y \cdot \left(\vartheta_y \middle| T\left(\sum_{x\in X} \epsilon_x \cdot (\epsilon_x|\,\xi)\right)\right) = \sum_{y\in Y} \left|\vartheta_y\right)\left(\sum_{x\in X} (\vartheta_y|\,T\epsilon_x) \cdot \epsilon_x\right| (\xi) \ .$$

$\square$

**DEFINITION** On dit que $\left((\vartheta_y|\,T\epsilon_x)\right)_{(y,x)\in Y\times X}$ est la *matrice* de $T$ dans les bases $(\epsilon_x)_{x\in X}$ et $(\vartheta_y)_{y\in Y}$ .

**REMARQUE 1** La seconde formule correspond à la formule classique en dimension finie.

**REMARQUE 2** Attention la famille $\left(|\vartheta_y) \cdot (\vartheta_y|\,T\epsilon_x) \cdot (\epsilon_x|\right)_{(x,y)\in X\times Y}$ n'est pas nécessairement sommable dans $\mathcal{L}_s(\mathcal{H},\mathcal{G})$ .

**REMARQUE 3** Si $S, T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ , alors la matrice de $ST$ est

$$\left(\sum_{u\in X} (\epsilon_y|\,S\epsilon_u)\,(\epsilon_u|\,T\epsilon_x)\right)_{y,x\in X} .$$

En effet

$$\sum_{u\in X} (\epsilon_y|\,S\epsilon_u)\,(\epsilon_u|\,T\epsilon_x) = \left(\epsilon_y \middle| S\left(\sum_{u\in X} \epsilon_u \cdot (\epsilon_u|\,T\epsilon_x)\right)\right) = (\epsilon_y\,|ST\epsilon_x) \ .$$

On aurait aussi pu écrire

$$ST = \left[\sum_{y\in Y} \left|\epsilon_y\right)\left(\sum_{x\in X} \overline{(\epsilon_y|\,S\epsilon_x)} \cdot \epsilon_x\right|\right] \circ \left[\sum_{u\in X} \left|\sum_{v\in Y} \epsilon_v \cdot (\epsilon_v|\,T\epsilon_u)\right)\left(\epsilon_u\right|\right] =$$

$$= \sum_{y \in Y} \left| \epsilon_y \right) \left( \left[ \sum_{u \in X} \left( \sum_{x \in X} \overline{(\epsilon_y | S\epsilon_x)} \cdot (\epsilon_x | T\epsilon_u) \right) \right] \epsilon_u \right| .$$

## 3.22 Le formalisme de Dirac

Le formalisme de Dirac consiste à composer des applications linéaires entre espaces localement convexes et leur semi-dual. Plus particulièrement si $F$ est un espace localement convexe séparé, pour $\varphi \in F$ et $\mu \in F^\dagger$ , on considère les vecteurs bra :

$$\langle\varphi| : F^\dagger \longrightarrow \mathbb{K} : \nu \longmapsto \langle\varphi|\,\nu\rangle \quad \text{et} \quad \langle\mu| : F \longrightarrow \mathbb{K} : \psi \longmapsto \langle\mu|\,\psi\rangle \ ,$$

comme des formes linéaires continues et les vecteurs ket :

$$|\varphi\rangle : \mathbb{K} \longrightarrow F : \alpha \longmapsto \varphi\cdot\alpha \quad \text{et} \quad |\mu\rangle : \mathbb{K} \longrightarrow F^\dagger : \alpha \longmapsto \mu\cdot\alpha$$

comme des droites paramétrées. En général le signe $\circ$ de composition n'est pas écrit. Il est probablement superflu de préciser que les compositions doivent être correctement définies ; cela correspond aux règles de calcul du formalisme.

On a

$$\langle\mu|^\dagger = |\mu\rangle \quad \text{et} \quad |\mu\rangle^\dagger = \langle\mu| \ ,$$

puisque pour tout $\varphi \in F$ , il vient trivialement

$$\left\langle \varphi \,\middle|\, \langle\mu|^\dagger\,\alpha \right\rangle = \left\langle\, \langle\mu|\,\varphi\rangle \,\middle|\, \alpha \right\rangle = \overline{\langle\mu|\,\varphi\rangle}\cdot\alpha = \langle\varphi|\,\mu\cdot\alpha\rangle \ .$$

Par symétrie on obtient également

$$\langle\varphi|^\dagger = |\varphi\rangle \quad \text{et} \quad |\varphi\rangle^\dagger = \langle\varphi| \ .$$

Cet exemple montre que les deux semi-dualités $\left\langle F \,\middle|\, F^\dagger \right\rangle$ et $\left\langle F^\dagger \,\middle|\, F \right\rangle$ sont fondamentales pour le formalisme de Dirac (cf. 5.19) : $\langle\varphi|$ dépend de $\left\langle F \,\middle|\, F^\dagger \right\rangle$ , tandis que $\langle\mu|$ de $\left\langle F^\dagger \,\middle|\, F \right\rangle$ !

Ce formalisme tire toute sont importance essentiellement des formules suivantes. Pour tout $\gamma \in G$ et $\mu \in F^\dagger$ , on a

$$|\gamma\rangle \circ \langle\mu| = |\gamma\rangle\,\langle\mu| : F \longrightarrow G\,;$$

c'est l'application linéaire de rang 1 définie dans le corollaire 3.5. En particulier

$$|\varphi\rangle \circ \langle\mu| = |\varphi\rangle\,\langle\mu| : F \longrightarrow F$$

et

$$|\mu\rangle \circ \langle\varphi| = |\mu\rangle\,\langle\varphi| : F^\dagger \longrightarrow F^\dagger \ .$$

En effet

$$|\gamma\rangle \circ \langle\mu| : \varphi \longmapsto |\gamma\rangle \Big( \langle\mu|\,\varphi\rangle \Big) = \gamma\cdot\langle\mu|\,\varphi\rangle = |\gamma\rangle\,\langle\mu| \Big(\psi\Big) \ .$$

On a

$$\Big( |\gamma\rangle\,\langle\mu| \Big)^\dagger = |\mu\rangle\,\langle\gamma| : G^\dagger \longrightarrow F^\dagger \ ,$$

puisque

$$\Big( |\gamma\rangle\,\langle\mu| \Big)^\dagger = \Big( |\gamma\rangle \circ \langle\mu| \Big)^\dagger = |\mu\rangle \circ \langle\gamma| = |\mu\rangle\,\langle\gamma| \ .$$

L'identification $\mathbb{K}^\dagger = \mathbb{K}$ et celle décrite dans la remarque 3.13.1 :

$$\left|F^\dagger\right\rangle = \left|F^\dagger\right\rangle \langle\mathbb{K}| = \mathcal{L}\left(\mathbb{K}, F^\dagger\right) : |\mu\rangle \longmapsto |\mu\rangle\,\langle 1| := \text{"}\alpha \longmapsto |\mu\rangle\cdot\alpha\text{"} \ ,$$

montrent qu'il est naturel de considéré un vecteur ket comme une droite paramétrée, tandis que par adjonction un vecteur bra est bien une forme linéaire :

$$\langle\mu| = |\mu\rangle^{\dagger} = \Big(|\mu\rangle\langle 1|\Big)^{\dagger} = |1\rangle\langle\mu| = \text{"}\varphi \longmapsto 1\cdot\langle\mu|\,\varphi\rangle\text{"} = \langle\mu| \ .$$

On retrouve la bijection canonique semi-linéaire

$$\diamond^{\dagger} : F^{\dagger} = \mathcal{L}\left(\mathbb{K}, F^{\dagger}\right) \longrightarrow \mathcal{L}\left(F, \mathbb{K}\right) = F' : |\mu\rangle \longmapsto \langle\mu|$$

de l'exemple 3.4.2.

Nous ferons l'identification

$$\langle\varphi| \circ |\mu\rangle = \langle\varphi|\,\mu\rangle \cdot \mathrm{Id}_{\mathbb{K}} = \langle\varphi|\,\mu\rangle \quad \text{et} \quad \langle\mu| \circ |\varphi\rangle = \langle\mu|\,\varphi\rangle \cdot \mathrm{Id}_{\mathbb{K}} = \langle\mu|\,\varphi\rangle \ .$$

On peut donc écrire

$$\langle\varphi|\,\mu\rangle = \langle\varphi|\,\mu\rangle \cdot \mathrm{Id}_{\mathbb{K}} = \langle\varphi| \circ |\mu\rangle = |\varphi\rangle^{\dagger} \circ |\mu\rangle \ .$$

Si $\psi \in F$ et $\nu \in F^{\dagger}$ , on a par exemple

$$|\varphi\rangle\langle\mu|\,|\psi\rangle\langle\nu| = |\varphi\rangle \cdot \langle\mu|\,\psi\rangle \cdot \langle\nu| = \langle\mu|\,\psi\rangle \cdot |\varphi\rangle\langle\nu| \ .$$

En outre la semi-dualité $\left\langle |F\rangle_i \langle G| \,\middle|\, \mathcal{L}_s\left(G, F^{\dagger}\right) \right\rangle$ définie en 3.13 s'écrit

$$\Big\langle |\varphi\rangle\langle\gamma| \,\Big|\, S \Big\rangle_{|F\rangle\langle G|} = \langle\varphi|\,S\gamma\rangle = \mathrm{Tr}\Big(|\gamma\rangle\langle\varphi| \circ S\Big) = \mathrm{Tr}\Big(\left(|\varphi\rangle\langle\gamma|\right)^{\dagger} \circ S\Big)$$

pour tout $\varphi \in F$ , $\gamma \in G$ et $S \in L\left(G, F^{\circledast}\right)$ , en ayant utilisé la trace d'une application linéaire de rang fini définie dans le corollaire 3.4.

Comme autre exemple si $\xi \in \mathcal{H}$ , on a

$$h^{\dagger}\,|\xi) = h^{\dagger} \circ |\xi) = \left|h^{\dagger}\xi\right\rangle = |\xi\rangle$$

et

$$(\xi|\,h = \Big(h^{\dagger}\,(\xi|^{\dagger}\Big)^{\dagger} = \Big(h^{\dagger}\,|\xi)\Big)^{\dagger} = |\xi\rangle^{\dagger} = \langle\xi| \ .$$