Fachbereich Mathematik und Informatik
Philipps-Universität Marburg

Übungen zur Vorlesung

FUNKTIONALANALYSIS II

Prof. Dr. C. Portenier

Sommersemester 2004

Fassung vom 23. Juli 2004

Funktionalanalysis II

Blatt 1

Abgabe : Freitag, 30. April 2004

Aufgabe 1 (Die Hilbert-Schmidt-Operatoren) Seien $\mathcal{H}, \mathcal{G}$ Hilberträume. Ein Operator $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{G})$ heißt *Hilbert-Schmidt-Operator* , falls für eine hilbertsche Basis $(\epsilon_j)_{j \in J}$ in $\mathcal{H}$

$$\sum_{j \in J} \|T\epsilon_j\|_{\mathcal{G}}^2 < \infty \tag{$*$}$$

gilt. Mit $\mathcal{L}^2(\mathcal{H}, \mathcal{G})$ sei die Menge der Hilbert-Schmidt-Operatoren bezeichnet. Zeigen Sie :

(a)

$$T \in \mathcal{L}^2(\mathcal{H}, \mathcal{G}) \quad \Longleftrightarrow \quad T^* \in \mathcal{L}^2(\mathcal{G}, \mathcal{H})$$

Hinweis : Parseval-Gleichung.

(b) Ist $T \in \mathcal{L}^2(\mathcal{H}, \mathcal{G})$, so gilt $(*)$ für jede hilbertsche Basis von $\mathcal{H}$ und die Summe liefert stets denselben Wert.

(c) Durch

$$(T, S) \longmapsto (T|\, S) := \sum_{j \in J} (T\epsilon_j|\, S\epsilon_j)_{\mathcal{G}}$$

wird ein Skalarprodukt auf $\mathcal{L}^2(\mathcal{H}, \mathcal{G})$ definiert und es gilt :

$$\|T\| \leqslant (T|\, T)^{\frac{1}{2}} =: \|T\|_2 \quad \text{für jedes } T \in \mathcal{L}^2(\mathcal{H}, \mathcal{G}) \ .$$

(d) $\mathcal{L}^2(\mathcal{H}, \mathcal{G})$ ist bezüglich $\|\cdot\|_2$ vollständig.

Aufgabe 2 (Dirac-Folgen) Sei $f \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^n)$ mit $\int f \, d\lambda = 1$. Für $\varepsilon > 0$ definiert man f_ε auf $\mathbb{R}^n$ durch

$$f_\varepsilon(x) := \frac{1}{\varepsilon^n} \cdot f\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \ .$$

Zeigen Sie :

Ist $g \in \mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}^n)$ stetig in 0 , so ist

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int g \cdot f_\varepsilon \, d\lambda = g(0) \ .$$

Folgern Sie, daß

$$\delta_0 = \lim_{\varepsilon \to 0} f_\varepsilon \quad \text{in } \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)' \quad \text{bzw. in } \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'$$

gilt.

Aufgabe 3 (Funktionen und Distributionen) Zeigen Sie :

(a)

$$\exp \in \mathcal{D}(\mathbb{R})' \smallsetminus \mathcal{S}(\mathbb{R})' \ .$$

Hinweis: Methode des gleitenden Buckels. Wählen Sie ein $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ mit $\operatorname{supp} \varphi \subset [0,1]$ und betrachten Sie die Folge $(\varphi(\diamond - l))_{l \in \mathbb{N}}$.

(b)

$$\exp \cdot \cos(\exp) \in \mathcal{D}(\mathbb{R})' \quad \text{, sowie } \in \mathcal{S}(\mathbb{R})' \ .$$

(c) Wie rechnet man $\langle \varphi | \exp \cdot \cos(\exp) \rangle$ für $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ bzw. $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$?

Funktionalanalysis II

Blatt 2

Abgabe : Freitag, 7. Mai 2004

Aufgabe 1 (Der Cauchy-Hauptwert) Zeigen Sie, daß für alle $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ gilt

$$\langle \varphi | \partial (\ln |\mathrm{id}|) \rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{R} \smallsetminus]-\varepsilon,\varepsilon[} \overline{\varphi(x)} \cdot \frac{1}{x} \, dx =: \left\langle \varphi \middle| HW \left(\frac{1}{\mathrm{id}} \right) \right\rangle .$$

Was können Sie sagen, wenn $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$?

Aufgabe 2 (Singuläre Funktionen und Ableitungen) Zeigen Sie, daß für

$$\mathbb{D} := \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < 1 \right\}$$

und alle $s \in \mathbb{R}$ die Funktion

$$\left(\ln \frac{1}{|\mathrm{id}|} \right)^s : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{R}$$

und alle ihre ersten Ableitungen in $\mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{D})$ liegen.

Aufgabe 3 (Die Topologien sind verschieden)

(a) Konstruieren Sie eine Folge in $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, welche gegen 0 in der Topologie von $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ konvergiert, aber nicht in der von $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

(b) Konstruieren Sie eine Folge von Polynomen, welche in der Topologie von $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)'$, aber nicht in der von $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'$ konvergiert.

Aufgabe 4 (Uneigentliche Integrale)

(a) Sei $f \in \mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$, so daß für alle $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ die Funktion $\varphi \cdot f$ uneigentlich integrierbar ist. Zeigen Sie, daß die Distribution $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})'$ auch in $\mathcal{S}(\mathbb{R})'$ liegt und daß

$$\langle \varphi | f \rangle = \lim_{a \to -\infty, b \to \infty} \int_a^b \overline{\varphi(x)} \cdot f(x) \, dx \quad \text{für alle } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) .$$

Hinweis : Benutzen Sie den Satz von Banach-Steinhaus.

(b) Können Sie für die Funktion $\exp \cdot \cos(\exp)$ aus Aufgabe 3, Blatt 1, leichter schließen ?

Funktionalanalysis II

Blatt 3

Abgabe : Freitag, 14. Mai 2004

Aufgabe 1 (Konvergenz von Reihen) Zeigen Sie :

(a) Die kanonische Injektion $\mathcal{C}^b(\mathbb{R}) \hookrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R})' : f \longmapsto f \cdot \lambda$ ist stetig.

(b) Für jedes $s \in \mathbb{R}$ ist die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^s \cdot e^{2\pi i \cdot k \cdot \mathrm{id}}$$

in $\mathcal{S}(\mathbb{R})'$ konvergent.

Hinweis : Weierstraß-Kriterium und Stetigkeit der Ableitung in $\mathcal{S}(\mathbb{R})'$.

Aufgabe 2 (Ein einfacher Regularitätssatz) Sei J ein offenes Intervall in $\mathbb{R}$.

(a) Man zeige, daß die Differentiation auf $\mathcal{D}(J)'$ die Differentiation auf $\mathcal{AC}(J)$ fortsetzt, also folgendes Diagramm kommutativ ist :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}(J)' & \stackrel{\partial}{\longrightarrow} & \mathcal{D}(J)' \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathcal{AC}(J) & \stackrel{\partial}{\longrightarrow} & \mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(J) \end{array}$$

(b) Beweisen Sie folgenden Regularitätssatz :
Ist $\mu \in \mathcal{D}(J)'$ mit $\partial\mu \in \mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(J)$, so ist $\mu \in \mathcal{AC}(J)$.

Aufgabe 3 (Stammdistributionen) Seien J ein offenes Intervall in $\mathbb{R}$ und $\nu \in \mathcal{D}(J)'$.

Zeigen Sie, dass die Differenzialgleichung $\partial\mu = \nu$ in $\mathcal{D}(J)'$ bis auf eine Konstante eindeutig lösbar ist.

Hinweis : Bestimmen Sie die allgemeine Lösung, indem Sie untersuchen, wie der Kern der Linearform $\lambda : \varphi \longmapsto \int_J \varphi \, d\lambda$ auf $\mathcal{D}(J)$ mit $\partial(\mathcal{D}(J))$ zusammenhängt.

Funktionalanalysis II

Blatt 4

Abgabe : Freitag, 21. Mai 2004

Aufgabe 1 (Die Gauß-Funktion) Berechnen Sie $\mathcal{F}e^{-\pi a \cdot \mathrm{id}^2}$ für $a > 0$ durch Herleitung und Lösung einer Differenzialgleichung erster Ordnung.

Aufgabe 2 (Der Sinus Cardinalis) Man definiert auf $\mathbb{R}$ durch

$$\operatorname{sinc}(x) := \begin{cases} \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} & \text{falls } x \neq 0 \\ 1 & \text{falls } x = 0 \end{cases}$$

die Funktion Sinus Cardinalis. Zeigen Sie, dass sinc sowohl in $\mathcal{D}(\mathbb{R})'$, als auch in $\mathcal{S}(\mathbb{R})'$ liegt. Berechnen Sie die Fouriertransformierte.

Hinweis: Blatt 2, Aufgabe 4 und eine gute Idee.

Aufgabe 3 (Die Gleichung $\mathrm{id} \cdot \mu = c$) Seien $\mu \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ und $c \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass μ genau dann die Gleichung $\mathrm{id} \cdot \mu = c$ in $\mathcal{D}(\mathbb{R})'$ löst, wenn es $\alpha \in \mathbb{C}$ gibt mit

$$\mu = \alpha \cdot \delta + c \cdot HW\left(\frac{1}{\mathrm{id}}\right) .$$

Hinweis: Zeigen Sie, dass für $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ mit $\psi(0) = 0$ gilt

$$\psi(x) = x \cdot \int_0^1 \psi'(xs)\, ds \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R} .$$

Funktionalanalysis II

Blatt 5

Abgabe : Freitag, 28. Mai 2004

Aufgabe 1 (Integrale von Exponentialfunktionen)

(a) Sei $y \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie: Die Funktion

$$\lambda \longmapsto \begin{pmatrix} (e_\lambda)_y \\ \sin(2\pi\lambda \bullet y) \cdot e_\lambda \\ \cos(2\pi\lambda \bullet y) \cdot e_\lambda \end{pmatrix} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)^3$$

ist λ^n-integrierbar (im Sinne von Pettis) und es gilt

$$\overset{-1}{\mathcal{F}} \begin{pmatrix} (e_\lambda)_y \\ \cos(2\pi\lambda \bullet y) \cdot e_\lambda \\ \sin(2\pi\lambda \bullet y) \cdot e_\lambda \end{pmatrix} = \int \begin{pmatrix} (e_\lambda)_y \\ \cos(2\pi\lambda \bullet y) \cdot e_\lambda \\ \sin(2\pi\lambda \bullet y) \cdot e_\lambda \end{pmatrix} d\lambda = \begin{pmatrix} \delta_y \\ \frac{1}{2}(\delta_{-y} + \delta_y) \\ \frac{1}{2i}(\delta_{-y} - \delta_y) \end{pmatrix} .$$

(b) Zeigen Sie: Für $\alpha \in \mathbb{N}^n$ ist die Funktion

$$\lambda \longmapsto \lambda^\alpha \cdot e_\lambda : \mathbb{R}^n \longmapsto \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$$

λ^n-integrierbar (im Sinne von Pettis) und es gilt

$$\overset{-1}{\mathcal{F}} \operatorname{id}^\alpha = \int \lambda^\alpha \cdot e_\lambda \, d\lambda = \not{\partial}^\alpha \delta .$$

(c) Zeigen Sie :

$$\overset{-1}{\mathcal{F}} 1_{\mathbb{R}_+} = \int_{\mathbb{R}_+} e_\lambda \, d\lambda = \frac{1}{2} \cdot \delta - \frac{1}{2\pi i} \cdot HW\left(\frac{1}{\operatorname{id}}\right)$$

und

$$\overset{-1}{\mathcal{F}} 1_{\mathbb{R}_-} = \int_{\mathbb{R}_-} e_\lambda \, d\lambda = \frac{1}{2} \cdot \delta + \frac{1}{2\pi i} \cdot HW\left(\frac{1}{\operatorname{id}}\right)$$

in $\mathcal{S}(\mathbb{R})'$. Insbesondere gilt

$$\overset{-1}{\mathcal{F}} \operatorname{signum} = \int_{\mathbb{R}} \operatorname{signum}(\lambda) \cdot e_\lambda \, d\lambda = -\frac{1}{\pi i} \cdot HW\left(\frac{1}{\operatorname{id}}\right) ,$$

sowie

$$\int_{\mathbb{R}} \cos(2\pi \cdot \lambda \cdot \operatorname{id}) \, d\lambda = \frac{1}{2} \cdot \delta \quad \text{und} \quad \int_{\mathbb{R}} \sin(2\pi \cdot \lambda \cdot \operatorname{id}) \, d\lambda = \frac{1}{2\pi} \cdot HW\left(\frac{1}{\operatorname{id}}\right)$$

in $\mathcal{S}(\mathbb{R})'$.

Hinweis : Benutzen Sie die Aufgabe 3 aus Blatt 4.

Aufgabe 2 (Der Beppo Levi-Raum) Sei $J \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $n \in \mathbb{N}$. Betrachte den Beppo Levi-Raum

$$\mathcal{BL}^{(n)}(J) := \left\{ f \in \mathcal{AC}^{(n)}(J) \;\middle|\; \partial^n f \in \mathbf{L}^2(J) \right\} .$$

(a) Seien $\mu_j : \mathcal{BL}^{(n)}(J) \longrightarrow \mathbb{K}$, $j = 0, \ldots, n-1$ Semilinearformen und

$$B := \left(\mu_j\right)_{j=0,\ldots,n-1} : \mathcal{BL}^{(n)}(J) \longrightarrow \mathbb{K}^n .$$

Unter welcher Bedingung an B ist die Sesquilinearform

$$(\cdot|\cdot)_{\mathcal{BL},(n)} : (f,g) \longmapsto \sum_{j=0}^{n-1} \overline{\langle \mu_j | f \rangle} \cdot \langle \mu_j | g \rangle + \int_J \overline{\partial^n f} \cdot \partial^n g$$

ein Skalarprodukt auf $\mathcal{BL}^{(n)}(J)$? Beweisen Sie ihre Vermutung!

(b) Falls $(\cdot|\cdot)_{\mathcal{BL},(n)}$ ein Skalarprodukt ist, zeigen Sie, dass $\mathcal{BL}^{(n)}(J)$ ein Hilbert-Raum ist und

$$\mathcal{BL}^{(n)}(J) = \mathcal{P}_{n-1}(J) \boxplus \operatorname{Ker} B .$$

(c) Zeigen Sie: Sind $\nu_j : \mathcal{BL}^{(n)}(J) \longrightarrow \mathbb{K}^n$, $j = 0, \ldots, n-1$ *stetige* Linearformen, so ist die durch $C := (\nu_j)_{j=0,\ldots,n-1}$ definierte Norm zu der durch B definierten äquivalent.

Fachbereich Mathematik und Informatik
Philipps-Universität Marburg

Prof. Dr. C. Portenier
Sommersemester 2004

Funktionalanalysis II

Blatt 6

Abgabe : Freitag, 4. Juni 2004

Aufgabe 1 (Hilbertsche Unterräume eines Hilbertraums als Bilder) Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $\mathcal{G} \hookrightarrow \mathcal{H}$ hilbertscher Unterraum von $\mathcal{H}$ Zeige, dass ein positiver Operator $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ existiert, so dass $\mathcal{G}$ das Bild von $\mathcal{H}$ unter T ist, d.h. $\mathcal{G} = T(\mathcal{H})$. Drücke den Kern von $\mathcal{G}$ durch T aus.

Hinweis: Benutze, dass es zu jedem positiven Operator $S \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ einen positiven Operator $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ gibt mit $T^2 = S$.

Aufgabe 2 (Die Summe zweier hilbertscher Unterräume) Seien $\mathcal{H}, \mathcal{G} \hookrightarrow F^\dagger$ hilbertsche Unterräume mit Kernen $h, g : F \longrightarrow F^\dagger$. Betrachte die Abbildung

$$\Phi = + \circ \left(h^\dagger \times g^\dagger\right) : \mathcal{H} \times \mathcal{G} \longrightarrow F^\dagger : (\xi, \eta) \longmapsto \xi + \eta \ .$$

(a) Zeige: Der hilbertsche Unterraum $\mathcal{H} + \mathcal{G} := \Phi(\mathcal{H} \times \mathcal{G}) \hookrightarrow F^\dagger$ hat den Kern $h + g$. Für $\varphi \in F$ ist der Parsevalrepräsentant von $(h+g)\varphi$ gerade $(h\varphi, g\varphi)$.

(b) Der Parsevalrepräsentant von $\gamma \in \mathcal{H} + \mathcal{G}$ in $\mathcal{H} \times \mathcal{G}$ wird mit $(p_{\mathcal{H}}\gamma, p_{\mathcal{G}}\gamma)$ bezeichnet. $p_{\mathcal{H}} : \mathcal{H} + \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H}$ heißt Parsevalabbildung. Zeige: $p_{\mathcal{H}}$ ist der Kern von $\mathcal{H}$ in $\mathcal{H} + \mathcal{G}$, insbesondere gilt: $p_{\mathcal{H}}, p_{\mathcal{G}}$ sind beschränkte, kommutierende Operatoren, und es gilt

$$p_{\mathcal{H}} + p_{\mathcal{G}} = \mathrm{Id}_{\mathcal{H}+\mathcal{G}} \quad , \text{sowie} \quad 0 \leqslant p_{\mathcal{H}}, p_{\mathcal{G}} \leqslant \mathrm{Id}_{\mathcal{H}+\mathcal{G}} \ .$$

(c) Zeige: $\operatorname{Ker} p_{\mathcal{H}} = \mathcal{H}^{\perp(\mathcal{H}+\mathcal{G})}$.

Aufgabe 3 (Der hilbertsche Unterraum der Polynome) Seien $J \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $\tau \in J$ und $n \in \mathbb{N}$. Zeige: Der Raum $\mathcal{P}_n(J)$ der Polynomfunktionen auf J vom Grad $\leqslant n$ wird mit dem Skalarprodukt

$$(p|\, q)_{\mathcal{P}_n} := \sum_{j=0}^{n} \overline{\partial^j p(\tau)} \cdot \partial^j q(\tau)$$

zu einem Hilbertraum. Die Einbettung in $\mathcal{D}(J)'$, die durch das Pivotintegral λ_J gegeben ist, macht $\mathcal{P}_n(J) \hookrightarrow \mathcal{D}(J)'$ zu einem hilbertschen Unterraum, dessen Kern der Integraloperator

$$p_n : \varphi \longmapsto \int_J \varkappa_n(\cdot, t) \cdot \varphi(t)\, dt : \mathcal{D}(J) \longrightarrow \mathcal{D}(J)'$$

ist, wobei

$$\varkappa_n(s,t) = \sum_{l=0}^{n} \frac{(s-\tau)^l}{l!} \cdot \frac{(t-\tau)^l}{l!} \quad \text{für alle} \quad s, t \in J \ .$$

Funktionalanalysis II

Blatt 7

Abgabe : Freitag, 11. Juni 2004

Aufgabe 1 (Hilbertsche Basen hilbertscher Unterräume) Sei $\mathcal{H} \hookrightarrow F^\dagger$ ein hilbertscher Unterraum mit Kern h und $\mathcal{B} \subset \mathcal{H}$ eine hilbertsche Basis.

(a) Wende den Bildsatz an, um zu zeigen, dass

$$h = \sum_{\xi \in \mathcal{B}} |\xi\rangle \langle\xi| \quad \text{in} \quad \mathcal{L}_s\left(F, F^\dagger\right) .$$

Kann man mit Hilfe dieser Formel in Blatt 6, Aufgabe 3, leichter schließen?

(b) Zeige: $\mathcal{H}$ ist auf natürliche Weise hilbertscher Unterraum von $\mathbb{C}^\mathcal{B}$. Berechne den Kern $h_\mathcal{B}$ von $\mathcal{H}$ in $\mathbb{C}^\mathcal{B}$.

Aufgabe 2 (Sobolevräume als hilbertsche Unterräume) Seien $J \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $\tau \in [\inf J, \sup J] \subset \overline{\mathbb{R}}$. Man betrachte λ_J als Pivotintegral in $\mathcal{M}(J)$.

(a) Zeige, dass auf dem Raum

$$\mathcal{H}_\tau^{(1)}(J) := \left\{ \xi \in \mathcal{H}^{(1)}(J) \;\middle|\; \xi(\tau) = 0 \right\}$$

durch

$$(\xi|\,\eta)_{((1))} : (\xi, \eta) \longmapsto \int_J \overline{\partial\xi} \cdot \partial\eta \ ,$$

ein Skalarprodukt erklärt ist, und dass er genau dann hilbertscher Unterraum von $\mathcal{M}(J)$ ist, wenn $\inf J, \sup J \in \mathbb{R}$.

Im folgenden sei $J = \left]a, b\right[$ mit $\tau \in [a, b] \subset \mathbb{R}$.

(b) Zeige, dass

$$\mathcal{H}^{(1),0}(]a,b[) := \left\{ \xi \in \mathcal{H}^{(1)}(]a,b[) \;\middle|\; \xi(a) = \xi(b) = 0 \right\} \hookrightarrow \mathcal{M}(]a,b[)$$

ein hilbertscher Unterraum ist und berechne seinen Kern h^0 .

(c) Betrachte den Spezialfall $\tau = a$. Stelle den Raum $\mathcal{H}_a^{(1)}(]a,b[)$ als Summe zweier hilbertscher Unterräume dar, und berechne seinen Kern h_a .

(d) Berechne den Kern h_0 von $\mathcal{H}_0^{(1)}(]0,1[)$ mit Hilfe einer hilbertschen Basis.

Hinweis: Finde einen unitären Operator von $\mathcal{H}_0^{(1)}(]0,1[)$ zu einem Raum mit bekannter hilbertscher Basis.

Aufgabe 3 (Reproduzierende Kernhilberträume) Sei X eine Menge. Zeige, dass eine ein-eindeutige Beziehung besteht zwischen:

(a) den hilbertschen Unterräumen $\mathcal{H} \hookrightarrow \mathbb{C}^X$ und

(b) den Funktionen

$$\varkappa : X \times X \longrightarrow \mathbb{C}$$

mit $\varkappa(x,y) = \overline{\varkappa(y,x)}$ für alle $x, y \in X$ und

$$\sum_{k,l=0}^{m} \overline{z_k} \cdot z_l \cdot \varkappa(x_k, x_l) \geqslant 0 \quad \text{für alle} \quad (z_k)_{0 \leqslant k \leqslant m} \subset \mathbb{C}\,,\ (x_k)_{0 \leqslant k \leqslant m} \subset X\ .$$

Diese Funktionen heißen *(Kern-) Funktionen positiven Typs* .

Funktionalanalysis II

Blatt 8

Abgabe : Freitag, 18. Juni 2004

Aufgabe 1 (Die Hilbert-Schmidt-Operatoren als hilbertscher Unterraum)

Seien μ, ν Radonintegrale auf X, Y. Für $\varkappa \in \mathbf{L}^2(\mu \otimes \nu)$ sei $T_\varkappa$ der zugehörige Hilbert-Schmidt-Operator.

(a) Zeige: Die Zuordnung

$$j : \varkappa \longmapsto T_\varkappa : \mathbf{L}^2(\mu \otimes \nu) \longrightarrow \mathcal{L}_s\left(\mathbf{L}^2(\nu), \mathbf{L}^2(\mu)_\sigma\right)$$

macht $\mathbf{L}^2(\mu \otimes \nu)$ zu einem hilbertschen Unterraum von $\mathcal{L}_s(\mathbf{L}^2(\nu), \mathbf{L}^2(\mu)_\sigma)$. Berechne den zugehörigen Kern.

(b) Welches Kriterium für die Zugehörigkeit zu $\mathcal{L}^2(\mathbf{L}^2(\nu), \mathbf{L}^2(\mu))$ ergibt sich hieraus?

Aufgabe 2 ($\mathbf{L}^2$-Räume von hilbertraumwertigen Funktionen)

Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und σ ein Radon-Integral auf dem Hausdorffraum Λ. Für eine Abbildung $\theta : \Lambda \longrightarrow \mathcal{H}$ definiere

$$\|\theta\|_2 := \left(\int^* \|\theta(\lambda)\|_{\mathcal{H}}^2 \, d\sigma(\lambda)\right)^{\frac{1}{2}} \in \overline{\mathbb{R}}_+ .$$

(a) Betrachte den Quotientenraum

$$\mathbf{\Lambda}^2(\sigma, \mathcal{H}) = \{\theta : \Lambda \longrightarrow \mathcal{H} \mid \theta \text{ skalar } \sigma\text{-meßbar}, \ \|\theta\|_2 < \infty\} / \{\theta = 0 \quad \sigma\text{-f.ü.}\} .$$

Zeige, dass $\|\cdot\|_2$ eine Norm induziert, und dass zu jeder Cauchy-Folge $(\xi_k) \subset \mathbf{\Lambda}^2(\sigma, \mathcal{H})$ ein Grenzwert $\xi \in \mathbf{\Lambda}^2(\sigma, \mathcal{H})$ und eine Teilfolge existiert, die pktw. σ-f.ü. gegen ξ konvergiert.

Hinweis : Beweis des Satzes von Riesz-Fischer.

(b) Sei $\Phi : |\mathcal{H})(\mathbf{L}^2(\sigma)| \longrightarrow \mathbf{\Lambda}^2(\sigma, \mathcal{H})$ die durch

$$\Phi(|\xi)(f|) = \overline{f} \cdot \xi$$

eindeutig bestimmte lineare Abbildung. Zeige, dass Φ injektiv ist.

(c) Sei $\mathbf{L}^2(\sigma, \mathcal{H})$ der Abschluss von $\Phi\left(|\mathcal{H})(\mathbf{L}^2(\sigma)|\right)$ in $\mathbf{\Lambda}^2(\sigma, \mathcal{H})$. Zeige, dass

$$(\zeta|\,\theta)_\Diamond : \lambda \longmapsto (\zeta(\lambda)|\,\theta(\lambda))_{\mathcal{H}} : \Lambda \longrightarrow \mathbb{K} \quad \text{für alle} \quad \zeta \in \mathbf{L}^2(\sigma, \mathcal{H}) \ , \ \theta \in \mathbf{\Lambda}^2(\sigma, \mathcal{H})$$

σ-meßbar ist.

(d) Zeige, dass durch

$$(\zeta|\,\theta) := \int_\Lambda (\zeta|\,\theta)_\Diamond \; d\sigma \quad \text{für alle} \quad \zeta, \theta \in \mathbf{L}^2(\sigma, \mathcal{H})$$

ein Skalarprodukt mit $(\zeta|\,\zeta) = \|\zeta\|_2^2$ definiert ist, mit dem $\mathbf{L}^2(\sigma, \mathcal{H})$ ein Hilbertraum ist.

(e) Wie verhalten sich $\mathbf{L}^2(\sigma, \mathcal{H})$ und $\mathbf{\Lambda}^2(\sigma, \mathcal{H})$ zueinander, wenn $\mathcal{H}$ separabel ist? Finde für nicht separables $\mathcal{H}$ ein Gegenbeispiel zu dieser Eigenschaft!

Funktionalanalysis II

Blatt 9

Abgabe : Freitag, 25. Juni 2004

DEFINITION 1 Sei $\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right)$ eine Zerlegung von $\mathcal{H}$ in $F^{\dagger}$.

Sie heißt *nicht-entartet* , falls für jede σ-meßbare Menge $A \subset \Lambda$ gilt

$$1_A \cdot \widehat{h} = 0 \text{ skalar } \sigma\text{-f.ü.} \quad \Longrightarrow \quad A \text{ ist eine lokale } \sigma\text{-Nullmenge.}$$

Sie heißt *direkt* , falls sie nicht-entartet ist und die Abbildung

$$\int \diamond \, d\sigma : \mathbf{L}^2\left(\sigma, \widehat{\mathcal{H}}\right) \longrightarrow \mathcal{H}$$

injektiv ist.

In diesem Fall ist $\int \diamond \, d\sigma$ unitär und man schreibt

$$\mathcal{H} = \int^{\oplus} \widehat{\mathcal{H}} \, d\sigma \quad \text{in } F^{\dagger} \ .$$

Aufgabe 1 (Die triviale Zerlegung von $\mathbf{L}^2(\sigma)$) Sei σ ein Radon-Integral auf dem lokalkompakten Raum X . Zeigen Sie, dass

$$\mathbf{L}^2(\sigma) = \int^{\oplus} \mathbb{C} \cdot \varepsilon_x \, d\sigma \quad \text{in } \mathcal{M}(X) \ .$$

Aufgabe 2 (Die Fourier-Zerlegung von $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n)$) Zeigen Sie, dass

$$\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n) = \int_{\mathbb{R}^n}^{\oplus} \mathbb{C} \cdot e_\lambda \, d\lambda \quad \text{in } \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)' \ .$$

Gilt diese Zerlegung auch in $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$?

Aufgabe 3 (Die Zerlegung der geraden und ungeraden $\mathbf{L}^2$-Funktionen) Zeige, dass

$$\mathbf{L}^2(\mathbb{R}) = \int_{\mathbb{R}_+^*}^{\oplus} \mathbb{C} \cdot e_\lambda \oplus \mathbb{C} \cdot e_{-\lambda} \, d\lambda = \int_{\mathbb{R}_+^*}^{\oplus} \mathbb{C} \cdot \sqrt{2} \sin(2\pi\lambda\cdot) \, d\lambda \oplus \int_{\mathbb{R}_+^*}^{\oplus} \mathbb{C} \cdot \sqrt{2} \cos(2\pi\lambda\cdot) \, d\lambda$$

und

$$\mathbf{L}_u^2(\mathbb{R}) = \int_{\mathbb{R}_+^*}^{\oplus} \mathbb{C} \cdot \sqrt{2} \sin(2\pi\lambda\cdot) \, d\lambda \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{L}_g^2(\mathbb{R}) = \int_{\mathbb{R}_+^*}^{\oplus} \mathbb{C} \cdot \sqrt{2} \cos(2\pi\lambda\cdot) \, d\lambda$$

in $\mathcal{S}(\mathbb{R})'$ ist.

Funktionalanalysis II

Blatt 10

Abgabe : Freitag, 2. Juli 2004

Aufgabe 1 (Berechnung des Inversen in einer Banach-Algebra) Sei $\mathcal{A}$ eine Banach-Algebra mit Eins, $a \in \mathcal{A}$ ein invertierbares Element, $q \in \,]0,1[$ und

$$B := \left\{ b \in \mathcal{A} \;\middle|\; \max\left(\|e - ab\|, \|e - ba\|\right) \leqslant \frac{q}{2} \right\} .$$

Zeigen Sie :

(a) Jedes $b \in B$ ist invertierbar.

(b) Durch

$$\Phi(b) := 2b - bab \quad \text{für alle } b \in B$$

ist eine q-Lipschitz-stetige Abbildung $\Phi : B \longrightarrow B$ definiert, deren einziger Fixpunkt a^{-1} ist.

(c) Setzt man für beliebiges $b_0 \in A$ und alle $n \in \mathbb{N}$

$$b_n := \Phi^n(b_0) \ ,$$

so gilt:

$$b_n = \sum_{k=0}^{2^n-1} (e - b_0 a)^k b_0 \quad \text{und} \quad a^{-1} = \lim_{n \longrightarrow \infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty} (e - b_0 a)^k b_0 \quad \text{in } \mathcal{A} .$$

Aufgabe 2 (Die Banach-Algebra $\ell^1(\mathbb{Z})$) Zeigen Sie, dass durch

$$\varphi * \psi(k) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} \varphi(k - l) \cdot \psi(l) \quad \text{für alle } k \in \mathbb{Z} \text{ und } \varphi, \psi \in \ell^1(\mathbb{Z})$$

eine Verknüpfung $*$ wohldefiniert ist, mit der versehen $\ell^1(\mathbb{Z})$ zu einer kommutativen Banach-Algebra über dem Körper $\mathbb{C}$ wird.

Welches ist das Einselement von $\ell^1(\mathbb{Z})$?

Aufgabe 3 (Das Spektrum von $\mathcal{C}(X)$) Sei X ein kompakter Raum. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\varepsilon : X \longrightarrow \mathrm{Sp}(\mathcal{C}(X)) : x \longmapsto \varepsilon_x$$

ein Homöomorphismus ist.

Hinweis: Zum Beweis der Surjektivität betrachte man für $\chi \in \mathrm{Sp}\,\mathcal{C}(X)$ die Mengen $\{\varphi = 0\}$ für $\varphi \in \mathrm{Ker}\,\chi$.

Fachbereich Mathematik und Informatik
Philipps-Universität Marburg

Prof. Dr. C. Portenier
Sommersemester 2004

Funktionalanalysis II

Blatt 11

Abgabe : Freitag, 9. Juli 2004

Aufgabe 1 (Das Spektrum von $\ell^1(\mathbb{Z})$ und der Satz von Wiener)

(a) Eine Semilinearform $\chi : \ell^1(\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{C}$ ist genau dann ein Charakter, falls ein $z \in \mathbb{U}$ existiert mit

$$\langle \chi | \varphi \rangle = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \varphi(k) \cdot z^k \quad \text{für alle } \varphi \in \ell^1(\mathbb{Z}) \ .$$

Hinweis: Zeige, dass mit

$$e_k : l \longmapsto \delta_{k,l} : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C}$$

gilt

$$\varphi = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \varphi(k) \cdot e_k \quad \text{in } \ell^1(\mathbb{Z}) \ .$$

Berechne für $k, l \in \mathbb{Z}$ das Faltungsprodukt $e_k * e_l$.

(b) Sei $f : \mathbb{U} \longrightarrow \mathbb{C}$ eine stetige Funktion, deren Fourierreihe $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathcal{F}f(k) \cdot \mathrm{id}^k$ absolut konvergiert. Dabei ist

$$\mathcal{F}f(k) := \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{\mathbb{U}} \overline{z}^k \cdot f(z) \, d\lambda_{\mathbb{U}}(z) = \int_0^1 e^{-2\pi i k t} \cdot f\left(e^{2\pi i t}\right) \, dt \ .$$

Zeige, dass gilt:

$$f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathcal{F}f(k) \cdot \mathrm{id}^k \quad \text{in } \mathcal{C}(\mathbb{U}) \ .$$

(c) Beweisen Sie den *Satz von Wiener* (Norbert Wiener, 1932): Ist $f : \mathbb{U} \longrightarrow \mathbb{C}$ eine stetige Funktion mit absolut konvergenter Fourierreihe und $f(z) \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{U}$, so konvergiert die Fourierreihe von $\frac{1}{f}$ absolut.

Hinweis : Zeigen Sie, dass die Gelfand Abbildung

$$\mathcal{G} : \varphi \longmapsto \sum_{l \in \mathbb{Z}} \varphi(l) \cdot \overline{\mathrm{id}}^l : \ell^1(\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathcal{C}\left(\mathrm{Sp}\, \ell^1(\mathbb{Z})\right)$$

ein Algebra-Isomorphismus auf die Unteralgebra $\mathcal{A}$ der stetigen Funktionen mit absolut konvergenter Fourierreihe ist.

Aufgabe 2 (Diagonalisierung normaler Endomorphismen)

Sei $\mathcal{H}$ ein endlich-dimensionaler Vektorraum über $\mathbb{C}$ und T ein normaler Endomorphismus von $\mathcal{H}$, d.h. $T^*T = TT^*$.

(a) Deuten Sie T als eine stetige Funktion auf $\operatorname{Sp} T$. Durch welche Funktion auf dieser Menge wird T dargestellt? Durch welche wird $\mathrm{Id}_{\mathcal{H}}$ dargestellt?

Hinweis: Betrachten Sie die von T und $\mathrm{Id}_{\mathcal{H}}$ erzeugte Unter-C*-Algebra $\mathcal{A}(T)$ von $\mathcal{L}(\mathcal{H})$.

(b) Zeigen Sie: wenn X ein topologischer Raum ist und $x \in X$, so ist

$$1_{\{x\}} : y \longmapsto \delta_{x,y} : X \longrightarrow \mathbb{C}$$

genau dann stetig, wenn $\{x\}$ in X abgeschlossen und offen ist.

(c) Schreiben Sie $\mathrm{id}_{\operatorname{Sp} T}$ und $1_{\operatorname{Sp} T}$ im Vektorraum $\mathcal{C}(\operatorname{Sp} T)$ als Linearkombination von $1_{\{\lambda\}}$, $\lambda \in \operatorname{Sp} T$.

(d) Sei $P_\lambda := \Phi 1_{\{\lambda\}}$. Schreiben Sie $\mathrm{Id}_{\mathcal{H}}$ und T als eine Linearkombination der P_λ .

(e) Zeigen Sie: $1_{\{\lambda\}}$ stellt die orthogonale Projektion P_λ auf den Eigenraum $E(\lambda)$ zum Eigenwert λ von T dar.

Hinweis: Betrachten Sie Produkte $\mathrm{id}_{\operatorname{Sp} T} \cdot 1_{\{\lambda\}}$.

(f) Folgern Sie: es gibt eine Orthonormalbasis von $\mathcal{H}$, bezüglich derer die Matrixdarstellung von T Diagonalgestalt hat.

Funktionalanalysis II

Blatt 12

Abgabe : Freitag, 16. Juli 2004

Aufgabe 1 (Die Ableitung ist abgeschlossen) Zeige:

(a) Der Operator $\not{\partial}$ in $\mathcal{C}([0,1])$ mit Definitionsbereich $\mathcal{C}^{(1)}([0,1])$ ist abgeschlossen, aber nicht stetig.

(b) Gleiches gilt in $\mathbf{L}^2([0,1])$ mit dem Definitionsbereich $\mathcal{H}^{(1)}(]0,1[)$ oder

$$\mathcal{H}^{(1),0}(]0,1[) := \left\{ \xi \in \mathcal{H}^{(1)}(]0,1[) \;\middle|\; \xi(0) = \xi(1) = 0 \right\} .$$

Aufgabe 2 (Die (unbeschränkten) Multiplikationsoperatoren) Sei μ ein Radon-Integral auf einem Hausdorffraum X und sei $f : X \longrightarrow \mathbb{K}$ μ-messbar. Sei

$$M_f : D(f) \longrightarrow \mathbf{L}^2(\mu) : \xi \longmapsto f \cdot \xi ,$$

wobei der Definitionsbereich definiert als

$$D(f) := \left\{ \xi \in \mathbf{L}^2(\mu) \;\middle|\; f \cdot \xi \in \mathbf{L}^2(\mu) \right\} .$$

Zeige:

(a) Es gilt $M_f^* = M_{\overline{f}}$.

(b) Es gilt $D\left(|f|^2\right) \subset D(f)$ und

$$M_{\overline{f}} M_f = M_f M_{\overline{f}} = M_{|f|^2} .$$

(c) M_f ist normal.

(d) M_f ist genau dann selbstadjungiert, wenn f μ-fast überall reell ist.

(e) Es gilt

$$\|M_f\| = \|f\|_\infty := \inf \left\{ \lambda \in \mathbb{R}_+ \mid |f| \leqslant \lambda \ \mu\text{-f.ü.} \right\} ;$$

insbesondere ist M_f genau dann beschränkt, wenn f μ-wesentlich beschränkt ist.

(f) Das Punktspektrum $\operatorname{Sp}_p M_f$ ist die Menge aller $\lambda \in \mathbb{K}$ mit $\mu\left(\overset{-1}{f}(\lambda)\right) > 0$. Für $\lambda \in \operatorname{Sp}_p M_f$ gilt

$$\operatorname{Ker}(M_f - \lambda \cdot \mathrm{Id}) = \mathbf{L}^2\left(\mu, \overset{-1}{f}(\lambda)\right) := \left\{ \xi \in \mathbf{L}^2(\mu) \;\middle|\; \xi = 0 \text{ f.ü. auf } X \setminus \overset{-1}{f}(\lambda) \right\} .$$

(g) Das Spektrum $\operatorname{Sp} M_f$ ist die Menge aller $\lambda \in \mathbb{K}$ mit $\mu\left(\overset{-1}{f}(U)\right) > 0$ für alle Umgebungen U von λ . Es gilt auch

$$\operatorname{Sp} M_f = \bigcap \overline{f(A)} \ ,$$

wobei der Durchschnitt über alle Teilmengen $A \subset X$ mit $\mu(X \setminus A) = 0$ gebildet wird.

(h) Ist $g : X \longrightarrow \mathbb{K}$ μ-messbar, so gilt

$$M_{f+g} = \overline{M_f + M_g} \quad \text{und} \quad M_{f \cdot g} = \overline{M_f M_g} \ .$$

(i) Ist $X \subset \mathbb{R}^n$ offen, so dass $f \in \mathbf{L}^2_{\mathrm{loc}}(X)$, so ist $\mathcal{D}(X)$ wesentlicher Definitionsbereich von M_f .

Funktionalanalysis II

Blatt 13

Abgabe : Freitag, 23. Juli 2004

Aufgabe 1 (Die s.a. Fortsetzungen des Impulsoperators) Sei $I =]0,1[$. Betrachte den Operator $P = \not{\partial}$ in $\mathbf{L}^2(I)$ mit Definitionsbereich $\mathcal{D}(I)$. Für $\alpha \in \mathbb{U}$ seien

$$D(P_\alpha) := \left\{ \xi \in \mathcal{H}^{(1)}(I) \;\middle|\; \xi(0) = \alpha \cdot \xi(1) \right\}$$

und $P_\alpha := P^*|_{D(P_\alpha)}$. Zeige, dass $P_\alpha^* = P_\alpha \supset P$, und dass jede selbstadjungierte Fortsetzung von P von dieser Form ist.

Aufgabe 2 (Die Zerlegung des Impulsoperators P_α) Betrachte für $\alpha \in \mathbb{U}$ den Operator P_α aus der letzten Aufgabe.

(a) Zeige, dass die Eigenvektoren von P_α zum Eigenwert z die Form

$$C \cdot \exp(2\pi i z \cdot \mathrm{id}) \quad \text{mit} \quad C \in \mathbb{C}$$

haben. Welche Bedingung ergibt sich für z oder was ist das Punktspektrum von P_α ?

(b) Zeige, dass $\mathrm{Sp}_p\, P_\alpha = \mathrm{Sp}\, P_\alpha$.

(c) Gebe eine diskrete Diagonalisierung von P_α an.