Chapitre 4

ESPACES DE DISTRIBUTIONS

Version du 12 juillet 2004

4.1 Une manière d'interpréter la notion de dualité

Exemple physique

Soient F un ensemble de fonctions-test sur un espace métrique X et m une intégrale de Radon sur X , canoniques pour le problème considéré, par exemple un ouvert X de $\mathbb{R}^n$ et l'intégrale de Lebesgue λ . Une fonction m-mesurable f sur X décrivant un certain phénomène est en général connue par l'intermédiaire de moyennes pondérées de f :

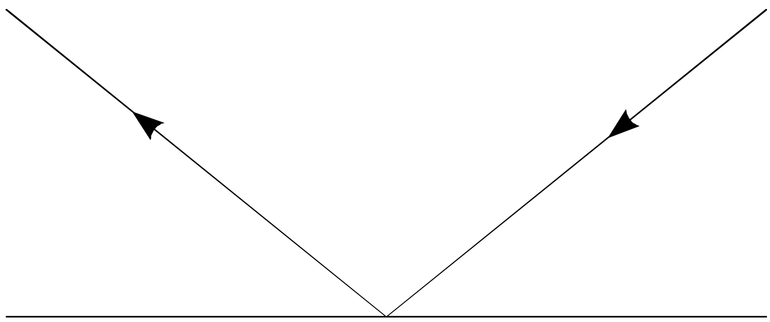
$$\langle \varphi | f \cdot m \rangle := \int \overline{\varphi} \cdot f \, dm \, ;$$

ce sont des "mesures" de f à l'aide des "appareils" φ . La forme semi-linéaire

$$\langle \diamond | f \cdot m \rangle : \varphi \longmapsto \langle \varphi | f \cdot m \rangle \ ,$$

i.e. l'intégrale de densité f par rapport à m , est donc plus naturelle que la fonction f elle-même.

Ceci va nous conduire à la théorie des distributions. Voici une manière de comprendre la nécessité de leur utilisation, et le rôle tout à fait naturel qu'elles jouent. Considérons une boule de billard et le problème de la réflexion sur une bande :



Admettons que, pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$, il existe un appareil qui, entre les temps a et b , mesure la variation de la seconde coordonné p de l'impulsion. On obtient

$$p(b) - p(a) = \begin{cases} \alpha & \text{si } a \leqslant \tau \leqslant b \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

pour un certain $\alpha > 0$, dépendant de la vitesse et de l'angle d'incidence, et τ le temps du choc. Si ce phénomène est décrit par une fonction force de composante F , la loi de Newton $F = \dot{p}$ entraîne

$$p(b) - p(a) = \int_a^b \dot{p} = \int_a^b F = \int 1_{[a,b]} \cdot F \ .$$

Si F est continue, voire même $F \in \mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$, le théorème de Lebesgue montre que

$$\int 1_{[a,b]} \cdot F \longrightarrow 0 \quad \text{si} \quad a \leqslant \tau \leqslant b \text{ et } b - a \longrightarrow 0 \ ,$$

ce qui est absurde. Il n'existe donc pas de fonction force. Par quoi faut-il la remplacer ?

En fait l'expérience nous fournit la correspondance

$$1_{[a,b]} \longmapsto \alpha \cdot 1_{[a,b]}(\tau) \ ,$$

puis

$$\alpha \cdot \varepsilon_\tau : \varphi \longmapsto \alpha \cdot \varphi(\tau) : \mathcal{E}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C} \ ,$$

où $\mathcal{E}(\mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel des fonctions en escalier sur $\mathbb{R}$. Cela nécessite évidemment une caractérisation convenable d'un appareil par une fonction, dite test, l'addition de deux fonctions s'exprimant par un certain amalgamme des appareils correspondants. Remarquons en outre que dans le cas classique, l'opération de moyenne pondérée de F

$$\varphi \longmapsto \int \varphi \cdot F \ ,$$

est plus proche de la réalité expérimentale, une fonction n'étant connue ponctuellement que par certaines limites de telles moyennes.

Ceci montre qu'il est plus général et plus naturel de considérer des formes linéaires (semi-linéaires si l'on travail sur le corps des nombres complexes $\mathbb{C}$) que des fonctions. L'espace vectoriel des fonctions-test peut être de nature très différente suivant les besoins :

$\mathcal{E}(\mathbb{R})$ pour les probabilités (théorie de la mesure)

$\mathcal{K}(\mathbb{R})$ pour l'analyse (théorie de l'intégration)

$\mathcal{D}(\mathbb{R})$ ou $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ pour l'analyse fonctionnelle (théorie des distributions).

Nous allons dans la suite concentrer notre attention sur le dernier cas, la théorie de l'intégration ne suffisant pas. Par exemple en électrodynamique, il est nécessaire de pouvoir dériver les intégrales de Dirac ε_τ pour formaliser la notion de dipôle.

Exemple économique

On interprète F ($= \mathbb{R}^n$) comme un ensemble de *corbeilles (de biens)* qu'un certain fabricant pourrait produire. Le vecteur

$$\varphi = \sum_{j=1}^{n} \varphi_j \cdot e_j$$

désigne la corbeille contenant φ_j du j-ième bien. Le dual F' ($= \mathbb{R}^n$) est interprété comme un ensemble d'*économies* :

$\mu(\varphi)$ est le *prix* de la corbeille φ réalisable dans l'économie μ .

La linéarité de μ traduit bien la manière de payer ! On se donne une *fonction de coût* $f : F \longrightarrow \widetilde{\mathbb{R}}$:

$f(\varphi)$ est le *coût de production* de la corbeille φ.

Alors

$$\mu(\varphi) - f(\varphi) \text{ est le } \textit{profit} \text{ fait sur la corbeille } \varphi \text{ dans l'économie } \mu \ ,$$

donc

$$f^{\circ}(\mu) := \sup_{\varphi\in F}[\mu(\varphi) - f(\varphi)]$$

est le *profit maximum* réalisable dans l'économie μ . Remarquons que dans certains cas il existe une corbeille $\varphi_{\max}$ telle que

$$f^{\circ}(\mu) = \mu(\varphi_{\max}) - f(\varphi_{\max}) \ ,$$

qui engendre donc le profit maximum dans l'économie μ .

Le nombre $\mu(\varphi) - f^{\circ}(\mu)$ est le coût de production "idéal" de la corbeille φ qu'il ne faudrait pas dépasser pour réaliser le profit maximum dans l'économie μ , donc

$$f^{\circ\circ}(\varphi) := \sup_{\mu\in F'}[\mu(\varphi) - f^{\circ}(\mu)]$$

est le plus grand coût "idéal" de production de la corbeille φ .

Nous avons vu en 3.9 que f° et $f^{\circ\circ}$ sont des fonctions convexes s.c.i.. Si f est convexe et s.c.i. $\neq \infty$, alors le théorème de Fenchel (théorème 3.9) exprime que

$$f = f^{\circ\circ} \ ,$$

donc que le coût de la corbeille φ est égal au coût "idéal" maximal de φ .

4.2 Les intégrales de Radon comme fonctions généralisées

Dans ce paragraphe X désigne un espace localement compact.

DEFINITION 1 Si μ est une intégrale de Radon positive, nous désignerons par $\dot{\mathcal{N}}(\mu)$ l'espace vectoriel des fonctions localement μ-négligeables et nous poserons

$$\mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mu) := \mathcal{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mu) / \dot{\mathcal{N}}(\mu) \ ;$$

Remarquons que si $f = g$ localement μ-p.p. , alors $\varphi \cdot f = \varphi \cdot g$ μ-p.p. pour tout $\varphi \in \mathcal{K}(X)$, puisque $\varphi \cdot f$ et $\varphi \cdot g$ sont μ-modérées (cf. lemme 1.16).

DEFINITION 2 Nous munirons $\mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mu)$ de la topologie localement convexe définie par les semi-normes

$$f \longmapsto \int |\varphi \cdot f| \, d\mu \quad \text{pour } \varphi \in \mathcal{K}(X) \ .$$

Les semi-normes

$$f \longmapsto \int_K |f| \, d\mu \quad \text{pour } K \in \mathfrak{K}(X)$$

forment un système équivalent, car

$$\int |\varphi \cdot f| \, d\mu \leqslant \|\varphi\|_\infty \cdot \int_{\operatorname{supp} \varphi} |f| \, d\mu \ ,$$

et

$$\int_K |f| \, d\mu \leqslant \int |\chi \cdot f| \, d\mu$$

en choisissant $\chi \in \mathcal{K}(X)$ telle que $\chi \geqslant 1_K$.

LEMME *Les applications canoniques*

$$\mathcal{K}(X) \longrightarrow \mathbf{L}^2(\mu) \hookrightarrow \mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mu)$$

sont continues et d'image dense.

En effet, pour tout $K \in \mathfrak{K}(X)$ et $\varphi \in \mathcal{K}(X, K)$, on a

$$\|\varphi\|_2^2 = \int |\varphi|^2 \, d\mu \leqslant \mu(K) \cdot \|\varphi\|_\infty^2 \ ,$$

ce qui prouve la continuité de la première application. Elle est d'image dense d'après le théorème de densité pour $\mathbf{L}^2(\mu)$ (cf. cours d'Analyse [17], théorème 15.15). Quant à la seconde, elle est injective par le lemme 1.16.iv et continue, car pour tout $\varphi \in \mathcal{K}(X)$ et $\xi \in \mathbf{L}^2(\mu)$, on a

$$\int |\varphi \cdot \xi| \, d\mu \leqslant \|\varphi\|_2 \cdot \|\xi\|_2 \ .$$

Pour la densité soit $f \in \mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mu)$, $K \in \mathfrak{K}(X)$ et $\varepsilon > 0$. On a $1_K \cdot f \in \mathbf{L}^1(1_K \cdot \mu)$ et, puisque $[\mathcal{K}(X)]$ est dense dans $\mathbf{L}^1(\mu)$, il existe $\psi \in \mathcal{K}(X) \subset \mathbf{L}^2(\mu)$ tel que

$$\int_K |\psi - f| \, d\mu = \int |\psi - 1_K \cdot f| \cdot 1_K \, d\mu \leqslant \varepsilon \ ,$$

ce qu'il fallait démontrer. □

Rappelons l'exemple 3.4.8.

THEOREME

(i) Si μ est une intégrale de Radon positive, alors l'application

$$f \longmapsto f \cdot \mu : \mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mu) \longrightarrow \mathcal{M}(X)$$

est injective et continue.

(ii) Si pour tout ouvert $O \neq \emptyset$, on a $\mu(O) > 0$, alors

$$\varphi \longmapsto \varphi \cdot \mu : \mathcal{K}(X) \longrightarrow \mathcal{M}(X)$$

est injective, continue et d'image dense.

Démonstration de (i) Remarquons tout d'abord, en écrivant f comme combinaison linéaire de fonctions positives, que $f \cdot \mu \in \mathcal{M}(X)$. Si $f \cdot \mu = 0$, on a $\int \varphi \cdot f \, d\mu = 0$ pour tout $\varphi \in \mathcal{K}(X)$, donc $f = 0$ localement μ-p.p. puisque $\mathcal{K}(X)$ est un espace test (cf. exemple 1.16.2). La continuité découle du lemme 3.7 car on a

$$|\langle \varphi | f \cdot \mu \rangle| \leqslant \int |\varphi \cdot f| \, d\mu \ .$$

Démonstration de (ii) $\mathcal{K}(X)$ se plonge injectivement dans $\mathbf{L}^2(\mu)$ (cf. remarque 1.2.1), donc dans $\mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mu)$, et par suite dans $\mathcal{M}(X)$ par (i). Cette application est continue par le lemme. Finalement la densité découle du corollaire 3.10.ii car, pour tout $\psi \in \mathcal{K}(X)$, si $\langle \psi | \mathcal{K}(X) \cdot \mu \rangle = \{0\}$, i.e. $\int \overline{\psi} \cdot \varphi \, d\mu = 0$ pour tout $\varphi \in \mathcal{K}(X)$, on obtient $\int |\psi|^2 \, d\mu = 0$, donc $\psi = 0$. □

REMARQUE 1 Dans le cas général, on a

$$\mathcal{K}(X) \longrightarrow \mathbf{L}^2(\mu) \hookrightarrow \mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mu) \hookrightarrow \mathcal{M}(X) \ .$$

Il ne faut pas oublier que l'image $[\mathcal{K}(X)]$ de $\mathcal{K}(X)$ dans $\mathcal{M}(X)$ dépend de l'intégrale μ , dite *pivot* , que l'on a choisie. S'il faut préciser, on désigne cette image par $\mathcal{K}(X) \cdot \mu$. On pourrait aussi écrire $\mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mu) \cdot \mu$ pour l'image de $\mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mu)$.

REMARQUE 2 Sous l'hypothèse de (ii), on a

$$\mathcal{K}(X) \hookrightarrow \mathbf{L}^2(\mu) \hookrightarrow \mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mu) \hookrightarrow \mathcal{M}(X)$$

et toutes ces applications sont d'image dense.

Puisque $\mathcal{M}(X)$ est séquentiellement complet par le théorème de Banach-Steinhaus (corollaire 3.1) et l'exemple 2.13.2, cet espace est une complétion séquentielle de $\mathcal{K}(X) \cdot \mu$ (ou de $\mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mu)$) pour la topologie induite par la topologie faible $\sigma(\mathcal{M}(X), \mathcal{K}(X))$ de $\mathcal{M}(X)$. Cela nous permet de dire que les intégrales de Radon sont des *fonctions généralisées* , les fonctions de $\mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mu)$ étant identifiées avec les intégrales de Radon de la forme $\mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mu) \cdot \mu$ correspondantes.

Remarquons que l'image de la fonction 1 est $1 \cdot \mu = \mu$, donc μ est la fonction (généralisée) 1 !

EXEMPLE 1 Pour tout $x \in X$, l'intégrale de Dirac ε_x définie par

$$\langle \varphi | \, \varepsilon_x \rangle := \overline{\varphi(x)} \quad \text{pour tout } \varphi \in \mathcal{K}(X)$$

est une fonction généralisée bien connue des physiciens. On représente souvent ε_x comme la limite dans $\mathcal{M}(X)$ d'une suite $(f_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mu)$; on écrit

$$\varepsilon_x = \lim_k f_k \ ,$$

mais cette limite ne peut pas être représentée par une fonction ! Rappelons que, par définition de la topologie faible sur $\mathcal{M}(X)$, cela signifie que

$$\overline{\varphi(x)} = \langle \varphi \, | \varepsilon_x \rangle = \lim_k \langle \varphi \, | f_k \cdot \mu \rangle = \lim_k \int \overline{\varphi} \cdot f_k \, d\mu$$

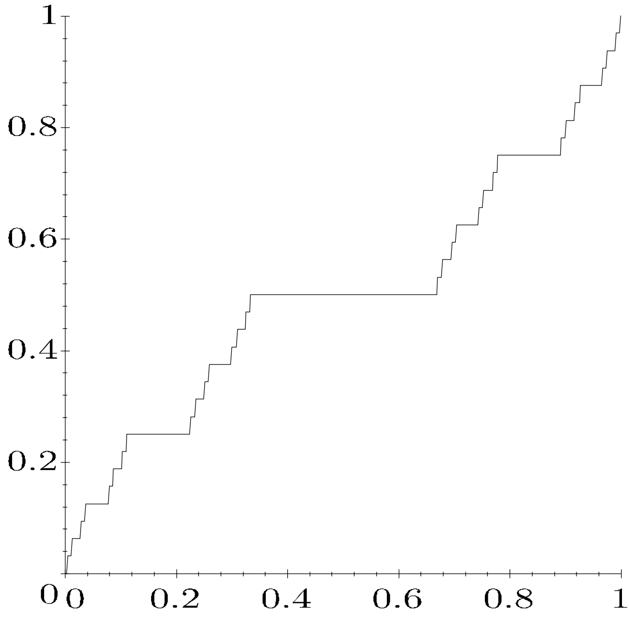
pour tout $\varphi \in \mathcal{K}(X)$.

EXEMPLE 2 Soit ρ une fonction croissante sur un intervalle ouvert J de $\mathbb{R}$. Il est clair que

$$\lambda_\rho : \varphi \longmapsto \int \varphi(x) \, d\rho(x)$$

est une forme linéaire positive sur $\mathcal{K}(J)$ (cf. cours d'Analyse [17], exemple 14.6.2). Nous verrons dans les exemples 3 et 4 de 4.4 la correspondance réciproque entre λ_ρ et ρ .

On peut construire une fonction ρ strictement croissante et continue, qui définisse l'intégrale de Hausdorff sur l'ensemble de Cantor. Rappelons que cet ensemble a une mesure de Lebesgue nulle ! Le graphe approximatif de cette fonction est



Comme exemple simple

$$\lambda := \lambda_{\mathrm{id}} : \varphi \longmapsto \int \varphi$$

est l'intégrale de Lebesgue.

On dit, pour $t \in J$, que

$$h_t := 1_{[t,\infty[\cap J}$$

est la *fonction de Heaviside* en t . On a

$$\int \overline{\varphi}\, dh_t = \overline{\varphi(t)} = \langle \varphi | \, \varepsilon_t \rangle \ ,$$

ce qui montre que λ_{h_t} est l'intégrale de Dirac ε_t en t . Par commodité en écrit h et δ pour h_0 et ε_0 .

EXEMPLE 3 Voici encore un espace d'intégrales, donc de fonctions généralisées, que nous rencontrerons. On pose

$$\mathcal{M}^b(X) := \mathcal{C}^0(X)' \ .$$

L'injection canonique $\mathcal{K}(X) \hookrightarrow \mathcal{C}^0(X)$ est évidemment continue et d'image dense par le théorème de Stone-Weierstraß. Son application adjointe, qui est l'application de restriction

$$\mu \longmapsto \mu_{|\mathcal{K}(X)} : \mathcal{M}^b(X) \longrightarrow \mathcal{M}(X)$$

est aussi injective, continue et d'image dense. On voit immédiatement que toute intégrale de Radon *bornée* , i.e telle que $|\mu|^*(X) < \infty$, définit par

$$\varphi \longmapsto \int \varphi\, d\mu : \mathcal{C}^0(X) \longrightarrow \mathbb{K}$$

une forme linéaire continue sur $\mathcal{C}^0(X)$. On peut montrer que toute forme linéaire continue sur $\mathcal{C}^0(X)$ est de cette forme (cf. Dieudonné, ibid., XIII.20). On a

$$\|\mu\| = |\mu|(X) \ .$$

Si μ est une intégrale de Radon quelconque sur X et $f \in \mathbf{L}^1(\mu)$, alors $f \cdot \mu \in \mathcal{M}^b(X)$ et

$$\|f \cdot \mu\| = \|f\|_{1,\mu} \ ,$$

ce qui montre que

$$\mathbf{L}^1(\mu) \hookrightarrow \mathcal{M}^b(X)_\beta = \mathcal{C}^0(X)'_\beta$$

est une isométrie et que

$$\mathbf{L}^1(\mu) \hookrightarrow \mathcal{M}^b(X) = \mathcal{C}^0(X)'_\sigma$$

est continue.

4.3 Les distributions

Dans tout les paragraphes qui suivent X désigne un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

DEFINITION On dit qu'une forme linéaire continue μ sur $\mathcal{D}(X)$, i.e. $\mu \in \mathcal{D}(X)'$, est une *distribution* , ou une *fonction généralisée* . Nous considérerons toujours la semi-dualité $\left\langle \mathcal{D}(X) \middle| \mathcal{D}(X)' \right\rangle$ définie par

$$\langle \varphi | \mu \rangle := \langle \overline{\varphi}, \mu \rangle \ .$$

Par définition de la topologie localement convexe finale sur $\mathcal{D}(X)$ (cf. exemple 2.10.3), la proposition 2.10 montre qu'une forme linéaire μ sur $\mathcal{D}(X)$ est une distribution si, et seulement si, pour tout compact $K \subset X$, la restriction de μ à $\mathcal{D}(X, K)$ est continue, ce qui signifie qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ et $c \in \mathbb{R}_+$ tels que

$$|\langle \varphi | \mu \rangle| \leqslant c \cdot p_{K,k}(\varphi) \quad \text{pour tout } \varphi \in \mathcal{D}(X, K) \ .$$

THEOREME

(i) L'injection canonique $\mathcal{D}(X) \hookrightarrow \mathcal{K}(X)$ est continue et d'image dense. Son application adjointe, qui est l'application de restriction

$$\mu \longmapsto \mu_{|\mathcal{D}(X)} : \mathcal{M}(X) \longrightarrow \mathcal{D}(X)' \ ,$$

est aussi injective, continue et d'image dense.

(ii) Il en est de même de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n)$, ainsi que de leur application adjointe

$$\mu \longmapsto \mu_{|\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)' \longrightarrow \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)' \quad \text{et} \quad \xi \longmapsto \xi \cdot \lambda : \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)' \ .$$

En outre, si l'on prend l'intégrale de Lebesgue λ comme pivot, $\mathcal{D}(X)$ est dense dans $\mathcal{D}(X)'$, de même que $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'$.

Démonstration de (i) La continuité est immédiate par la proposition 2.10, car pour tout $K \in \mathfrak{K}(X)$, l'espace $\mathcal{D}(X, K)$ est continûment plongé dans $\mathcal{K}(X, K)$, la norme $\|\cdot\|_{\infty,K}$ de ce dernier espace étant aussi par restriction une norme sur $\mathcal{D}(X, K)$, et l'injection canonique $\mathcal{K}(X, K) \hookrightarrow \mathcal{K}(X)$ est continue. Quant à la densité, elle découle du théorème de Stone-Weierstraß, puisque $\mathcal{K}(X, K)_{|K^\circ} = \mathcal{C}^0(K^\circ)$ et $\mathcal{D}(X, K)_{|K^\circ}$ est une sous-algèbre involutive séparant fortement les points de K° . Calculons l'adjointe $j^\dagger : \mathcal{M}(X) \longrightarrow \mathcal{D}(X)'$ de $j : \mathcal{D}(X) \hookrightarrow \mathcal{K}(X)$: pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(X)$ et $\mu \in \mathcal{M}(X)$, on a

$$\left\langle \varphi \middle| j^\dagger \mu \right\rangle_{\mathcal{D}(X)} = \langle j\varphi | \mu \rangle_{\mathcal{M}(X)} = \left\langle \varphi \middle| \mu_{|\mathcal{D}(X)} \right\rangle_{\mathcal{D}(X)} \ ,$$

d'où le résultat par le corollaire 3.10.iv.

Démonstration de (ii) Pour tout $K \in \mathfrak{K}(\mathbb{R}^n)$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n, K)$, on a

$$p_k(\varphi) = \max_{\alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha|_1 \leqslant k} \left\| \langle \mathrm{id} \rangle^k \cdot \partial^\alpha \varphi \right\|_\infty \leqslant \left\| \langle \mathrm{id} \rangle^k \right\|_{\infty,K} \cdot \max_{\alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha|_1 \leqslant k} \|\partial^\alpha \varphi\|_{\infty,K} =$$

$$= \left\| \langle \mathrm{id} \rangle^k \right\|_{\infty,K} \cdot p_{K,k}(\varphi) \ ,$$

ce qui prouve la continuité de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n, K) \hookrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, donc celle de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ par la proposition 2.10. Pour prouver celle de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathbf{L}^2(\mu)$, il suffit de constater que, pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, on a

$$\|\varphi\|_2^2 = \int \langle \mathrm{id} \rangle^{2k} \cdot |\varphi|^2 \cdot \langle \mathrm{id} \rangle^{-2k} \, d\lambda \leqslant \left\| \langle \mathrm{id} \rangle^k \cdot \varphi \right\|_\infty^2 \cdot \int^* \langle \mathrm{id} \rangle^{-2k} \, d\lambda \leqslant$$

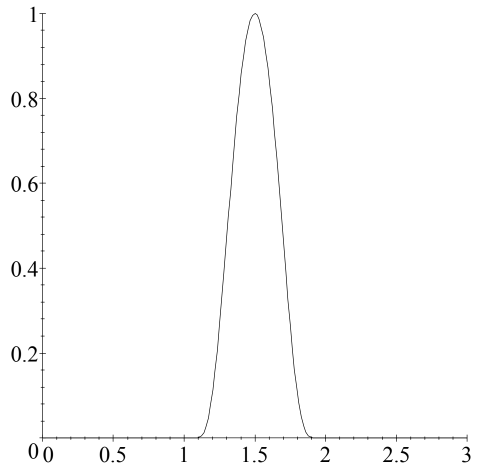
$$\leqslant \left(\int^* \langle \mathrm{id} \rangle^{-2k} \, d\lambda \right) \cdot p_k(\varphi)^2$$

et que

$$\int^* \langle \mathrm{id} \rangle^{-2k} \, d\lambda < \infty \quad \Longleftrightarrow \quad 2k > \frac{n}{2} \ .$$

Pour la densité considérons tout d'abord la fonction $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+)$ définie par

$$\chi(x) := \begin{cases} 0 & 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ e^4 \cdot \exp\left(-\frac{1}{(x-1)\cdot(2-x)}\right) \quad \text{si} & 1 < x < 2 \\ 0 & 2 \leqslant x \end{cases} \ .$$



χ

On a

$$\int_1^2 e^4 \cdot \exp\left(-\frac{1}{(x-1)\cdot(2-x)}\right) dx \simeq .38382$$

Définissons alors la fonction $\rho \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+)$ par

$$\rho(x) := 1 - \frac{1}{\int_0^\infty \chi \, d\lambda} \cdot \int_0^x \chi \, d\lambda \ .$$

On a

$$\rho(x) \begin{cases} = 1 & 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ \in \,]0,1[\quad \text{si} & 1 < x < 2 \\ = 0 & 2 \leqslant x \end{cases} \ .$$

Cette fonction nous permet alors de définir les fonctions $\rho_l \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ pour $l \in \mathbb{N}^*$ par

$$\rho_l(x) := \rho\left(\frac{|x|^2}{l}\right) .$$

Pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, nous allons montrer que $\varphi = \lim_l \rho_l \cdot \varphi$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$; pour cela estimons

$$p_k(\rho_l \cdot \varphi - \varphi) = \max_{|\alpha|_1 \leqslant k} \left\| \langle \mathrm{id} \rangle^k \cdot \partial^\alpha \left[(\rho_l - 1) \cdot \varphi \right] \right\|_\infty \leqslant$$

$$\leqslant \max_{|\alpha|_1 \leqslant k} \sum_{0 \leqslant \beta \leqslant \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \cdot \left\| \langle \mathrm{id} \rangle^k \cdot \partial^\beta (\rho_l - 1) \cdot \partial^{\alpha - \beta} \varphi \right\|_\infty \leqslant$$

$$\leqslant \left[\sum_{0 \leqslant \beta \leqslant \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \right] \cdot \max_{|\alpha|_1 \leqslant k} \left\| \langle \mathrm{id} \rangle^{k+1} \cdot \partial^\alpha \varphi \right\|_\infty \cdot \max_{|\alpha|_1 \leqslant k} \left\| \langle \mathrm{id} \rangle^{-1} \cdot \partial^\alpha (\rho_l - 1) \right\|_\infty .$$

Le membre de droite tend vers 0 car on a

$$\left\| \langle \mathrm{id} \rangle^{-1} \cdot (\rho_l - 1) \right\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left| \frac{\rho\left(\frac{|x|^2}{l}\right) - 1}{1 + |x|^2} \right| = \sup_{y \in \mathbb{R}_+, y \geqslant 1} \left| \frac{\rho(y) - 1}{1 + l \cdot y} \right| \leqslant \frac{1}{l}$$

et

$$\left\| \langle \mathrm{id} \rangle^{-1} \cdot \partial^\alpha (\rho_l - 1) \right\|_\infty \leqslant \| \partial^\alpha \rho_l \|_\infty \leqslant \frac{cst}{l} \quad \text{pour } |\alpha|_1 \leqslant k \ , \ \alpha \neq 0 .$$

En effet par récurrence on obtient

$$\partial^\alpha \rho_l(x) = \sum_{j=0}^{|\alpha|_1} P_j^\alpha(x) \cdot \left(\frac{2}{l}\right)^j \cdot \partial^j \rho\left(\frac{|x|^2}{l}\right) ,$$

où P_j^α sont des polynômes tels que $P_0^0 = 1$, $P_0^\alpha = 0$ si $\alpha \neq 0$, $\deg P_j^\alpha \leqslant 1$ si $j < |\alpha|_1$ et $\deg P_{|\alpha|_1}^\alpha = |\alpha|_1$. Notre assertion est évidemment vraie pour $\alpha = 0$. On a alors

$$\partial^{\alpha + e_k} \rho_l(x) = \partial_k \left(\sum_{j=0}^{|\alpha|_1} P_j^\alpha(x) \cdot \left(\frac{2}{l}\right)^j \cdot \partial^j \rho\left(\frac{|x|^2}{l}\right) \right) =$$

$$= \sum_{j=0}^{|\alpha|_1} \left[\partial_k P_j^\alpha(x) \cdot \left(\frac{2}{l}\right)^j \cdot \partial^j \rho\left(\frac{|x|^2}{l}\right) + P_j^\alpha(x) \cdot \left(\frac{2}{l}\right)^j \cdot \partial^{j+1} \rho\left(\frac{|x|^2}{l}\right) \cdot \frac{2}{l} \cdot x_k \right] =$$

$$= \sum_{j=0}^{|\alpha|_1 + 1} P_j^{\alpha + e_k}(x) \cdot \left(\frac{2}{l}\right)^j \cdot \partial^j \rho\left(\frac{|x|^2}{l}\right)$$

en ayant posé

$$P_j^{\alpha + e_k} = \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & & j = 0 \\ \partial_k P_j^\alpha + P_{j-1}^\alpha & \text{si} & j = 1, \ldots, |\alpha|_1 \\ x_k \cdot P_j^\alpha & & j = |\alpha|_1 + 1 \end{array} \right. .$$

Ceci finit de prouver la densité de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

La densité de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ dans $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n)$ découle de celle de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, qui elle provient de (i) et du lemme 4.2, ou bien directement de l'exemple 1.16.3.

Le calcul de d'adjointe de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ se fait comme dans (i). Calculons maintenant celle de $j : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n)$. Pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et $\xi \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n)$, on a

$$\left\langle \varphi \middle| j^\dagger \xi \right\rangle = (j\varphi| \xi) = \int \overline{\varphi} \cdot \xi \, d\lambda = \langle \varphi | \xi \cdot \lambda \rangle \ .$$

Le reste découle du corollaire 3.10.iv. □

REMARQUE Comme $\mathcal{D}(X)'$ est séquentiellement complet par le théorème de Banach-Steinhaus (corollaire 3.1) et l'exemple 2.13.3, cet espace est une complétion séquentielle de $\mathcal{D}(X)$ (ou de $\mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(X)$). Comme pour les intégrales de Radon, cela justifie le terme de fonctions généralisées. L'importance de cet espace de distributions provient du fait que l'on peut généraliser la notion de dérivée partielle et que toute distribution est indéfiniment dérivable.

Il en est de même de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'$. On dit que c'est l'espace des *distributions tempérées* .

Plus généralement si F est un espace test de fonctions par rapport à μ (cf. définition 1.16.2), dont l'injection canonique dans $\mathbf{L}^2(\mu)$ est continue, par adjonction on obtient le diagramme

$$F \hookrightarrow \mathbf{L}^2(\mu) \hookrightarrow F^\dagger \ .$$

Dorénavant nous identifierons une fonction $f \in \mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(X)$ avec la distribution $f \cdot \lambda \in \mathcal{D}(X)'$ correspondante. Nous écrirons donc simplement f à la place de $f \cdot \lambda$ si aucune confusion n'en résulte.

Soient F et G des espaces localement convexes et $j : F \longrightarrow G$ une application linéaire continue d'image dense. Son application adjointe, qui est l'application de restriction

$$\nu \longmapsto \nu_{|F} : G^\dagger \longrightarrow F^\dagger \ ,$$

est injective. L'un des problèmes fondamentaux, dit de *régularité* , est le suivant : Si $\mu \in F^\dagger$, quand a-t-on $\mu \in G^\dagger$? Plus précisément, quand existe-t-il $\nu \in G^\dagger$ tel que $\mu = \nu_{|F}$? Le problème le plus simple de ce type est de donner des conditions assurant qu'une fonction $f \in \mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)'$ appartienne à $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'$.

PROPOSITION *Soit $\mu \in F^\dagger$. Pour que $\mu \in G^\dagger$, il faut et il suffit que μ soit continue pour la topologie induite par G sur F .*

La condition est évidemment nécessaire. La réciproque est aussi immédiate par le théorème de Hahn-Banach 3.6. □

EXEMPLE 1 Pour tout $x \in X$, on désigne en général par δ_x la restriction de l'intégrale de Dirac ε_x à $\mathcal{D}(X)$ et on dit que c'est la *distribution de Dirac* en x . Nous ne ferons par contre aucune distinction lorsque nous considérerons une intégrale comme une distribution.

EXEMPLE 2 (Intégrales à croissance modérée) Soit μ une intégrale de Radon sur $\mathbb{R}^n$. S'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que

$$\int^* \langle \mathrm{id} \rangle^{-k} \, d|\mu| < \infty \ ,$$

on dit que μ est *à croissance modérée* et on désigne par $\mathcal{M}^{\mathrm{mod}}(\mathbb{R}^n)$ l'espace vectoriel des ces intégrales. On a

$$\mathcal{M}^{\mathrm{mod}}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)' \ .$$

En effet, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, on a

$$|\langle \varphi|\, \mu\rangle| \leqslant \int |\varphi| \; d|\mu| = \int^* \langle \mathrm{id}\rangle^k \cdot |\varphi| \cdot \langle \mathrm{id}\rangle^{-k} \; d|\mu| \leqslant \left(\int^* \langle \mathrm{id}\rangle^{-k} \; d|\mu|\right) \cdot p_k(\varphi) \ ,$$

ce qui prouve que $\mu_{|\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)}$ est continue pour la topologie de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. □

Dans beaucoup de situations il est nécessaire de connaître le prolongement de $\mu_{|\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)}$ à $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, que nous noterons évidemment par μ . La dernière inégalité ci-dessus est encore valable pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, ce qui montre que φ est μ-intégrable et que $\varphi \longmapsto \int \overline{\varphi}\, d\mu$ est une forme semi-linéaire continue sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. On en déduit que

$$\langle \varphi|\, \mu\rangle = \int \overline{\varphi}\, d\mu \quad \text{pour tout } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \ .$$

EXEMPLE 3 (Fonctions à croissance modérée et à croissance lente) Nous désignerons par $\mathbf{L}^1_{\mathrm{mod}}(\mathbb{R}^n)$ l'espace vectoriel des fonctions *à croissance modérée* , i.e. l'ensemble des $f \in \mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ telles que

$$\int^* \frac{|f|}{\langle \mathrm{id}\rangle^k} d\lambda < \infty$$

pour un certain $k \in \mathbb{N}$, et par $\mathbf{L}^1_{\mathrm{len}}(\mathbb{R}^n)$ l'ensemble des fonctions f *à croissance lente* , i.e. l'ensemble des $f \in \mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ telles que

$$\left\| \langle \mathrm{id}\rangle^{-l} \cdot f \right\|_\infty < \infty$$

pour un certain $l \in \mathbb{N}$.

(a) On a

$$\mathbf{L}^1_{\mathrm{len}}(\mathbb{R}^n) \subset \mathbf{L}^1_{\mathrm{mod}}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{M}^{\mathrm{mod}}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)' \ .$$

En effet

$$\int^* |f| \cdot \langle \mathrm{id}\rangle^{-k} \; d\lambda \leqslant \left\| \langle \mathrm{id}\rangle^{-l} \cdot f \right\|_\infty \cdot \int^* \langle \mathrm{id}\rangle^{l-k} \; d\lambda < \infty$$

en choisissant $k > \frac{n}{2} + l$, ce qui prouve la première inclusion. La deuxième est évidente, puisque $|f \cdot \lambda| = |f| \cdot \lambda$ et la troisième découle de l'exemple 2. □

(b) On a

$$\mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \subset \mathbf{L}^1_{\mathrm{len}}(\mathbb{R}^n) \ ,$$

où $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ désigne l'espace vectoriel des polynômes sur $\mathbb{R}^n$. Plus généralement, toute fonction majorée par un polynôme est à croissance lente et réciproquement.

(c) Pour tout $p \in [1, \infty]$, on a

$$\mathbf{L}^p(\mathbb{R}^n) \subset \mathbf{L}^1_{\mathrm{mod}}(\mathbb{R}^n) \ .$$

Si $f \in \mathbf{L}^p(\mathbb{R}^n)$, alors

$$\int^* |f| \cdot \langle \mathrm{id}\rangle^{-k} \; d\lambda \leqslant \|f\|_p \cdot \left\| \langle \mathrm{id}\rangle^{-k} \right\|_q < \infty$$

en choisissant $k > \frac{n}{2q}$. ◻

REMARQUE On a donc des injections canoniques d'image dense

$$\mathcal{D}(X) \hookrightarrow \mathcal{K}(X) \hookrightarrow \mathbf{L}^2(X) \hookrightarrow \mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(X) \hookrightarrow \mathcal{M}(X) \hookrightarrow \mathcal{D}(X)' \ ,$$

ainsi que

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbf{L}^1_{\mathrm{mod}}(\mathbb{R}^n) \arrow[dr, phantom, "\subset"] & & & \\
 & & \mathcal{M}^{\mathrm{mod}}(\mathbb{R}^n) \arrow[dr, phantom, "\subset"] & & \\
 & \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \arrow[dr, hook] & & \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)' \arrow[dr, hook] & \\
\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \arrow[ur, hook] \arrow[dr, hook] & & \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n) \arrow[ur, hook] \arrow[dr, hook] & & \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)' \\
 & \mathcal{K}(\mathbb{R}^n) \arrow[ur, hook] & & \mathcal{M}(\mathbb{R}^n) \arrow[ur, hook] & \\
 & & \mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n) \arrow[ur, phantom, "\subset"] & &
\end{tikzcd}$$

EXEMPLE 4 Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}^n$, nous poserons

$$e_\lambda(x) := e^{2\pi i \cdot \langle \lambda | x \rangle} \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^n \ ,$$

où

$$\langle \lambda | x \rangle := \sum_{j=1}^n \overline{\lambda_j} \cdot x_j \ .$$

On a $e^{2\pi i \cdot \langle \lambda | x \rangle} \in \mathbf{L}^1_{\mathrm{mod}}(\mathbb{R}^n)$ si, et seulement si, $\lambda \in \mathbb{R}^n$, car

$$\left| e^{2\pi i \cdot \langle \lambda | \mathrm{id} \rangle} \right| = e^{2\pi \cdot \langle \operatorname{Im} \lambda | \mathrm{id} \rangle} \ .$$

Plus généralement on montre, comme dans l'exercice 1ci-dessous, que $e^{2\pi i \cdot \langle \lambda | \mathrm{id} \rangle} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)'$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}^n$ et que $e^{2\pi i \cdot \langle \lambda | \mathrm{id} \rangle} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'$ si, et seulement si, $\lambda \in \mathbb{R}^n$.

EXERCICE 1 On a évidemment $\exp \in \mathcal{D}(\mathbb{R})'$, mais $\exp \notin \mathcal{S}(\mathbb{R})'$.

On le démontre en utilisant la méthode de la bosse glissante. Il suffit de choisir un $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ tel que $\operatorname{supp} \varphi \subset [0, 1]$ et de considérer la suite $(\varphi(\diamond - l))_{l \in \mathbb{N}}$.

EXERCICE 2 On a évidemment $\exp \cdot \cos(\exp) \in \mathcal{D}(\mathbb{R})'$, mais aussi

$$\exp \cdot \cos(\exp) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})' \ .$$

Mais attention, l'expression de $\langle \varphi | \exp \cdot \cos(\exp) \rangle$ pour $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ n'est pas celle que l'on espère.

On intègre par partie, ce qui revient à utiliser les idées du numéro suivant.

EXERCICE 3 (Suite de Dirac) Soit $f \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^n)$ tel que $\int f \, d\lambda = 1$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et $\varepsilon > 0$, on définit la fonction $f_{x,\varepsilon}$ sur $\mathbb{R}^n$ par

$$f_{x,\varepsilon}(y) := \frac{1}{\varepsilon^n} \cdot f\left(\frac{y-x}{\varepsilon}\right) .$$

Montrer que, pour toute fonction $g \in \mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}^n)$ continue en x , on a

$$g(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int g \cdot f_{x,\varepsilon} \, d\lambda .$$

En particulier

$$\delta_x = \lim_{\varepsilon \to 0} f_{x,\varepsilon} \quad \text{dans } \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)' \text{ et } \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)' .$$

On dit que $(f_{x,\varepsilon})_{\varepsilon>0}$ est une *suite de Dirac* .

EXERCICE 4 Construire une fonction $f \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R}) \subset \mathbf{L}^1_{\mathrm{mod}}(\mathbb{R})$ mais telle que $\left\| \langle \mathrm{id} \rangle^{-l} \cdot f \right\|_\infty = \infty$ pour tout $l \in \mathbb{N}$.

EXERCICE 5 Montrer que si $\mu \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'$ et $\langle \varphi | \mu \rangle \geqslant 0$ pour tout $\varphi \in \mathcal{S}_+(\mathbb{R}^n)$, alors $\mu \in \mathcal{M}^{\mathrm{mod}}(\mathbb{R}^n)$.

Utiliser les fonctions ρ_l qui ont été introduites dans la démonstration du théorème 3.3.ii.

4.4 Dérivation

Si $f \in \mathcal{C}^{(1)}(X)$ et $j \in \{1, \ldots, n\}$, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(X)$, on peut choisir une partition de l'unité $(\rho_l)_{l \in \mathbb{N}}$ indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}^n$, associée au réseau de maille $\varepsilon := \frac{1}{2} \cdot d\left(\operatorname{supp} \varphi, \complement X\right)$ (cf. cours d'Analyse [17] 17.4). On a alors

$$\langle \varphi | \partial f_j \cdot \lambda \rangle = \int \overline{\sum_l \rho_l \cdot \varphi} \cdot \partial_j f \, d\lambda = \sum_l \int \overline{\rho_l \cdot \varphi} \cdot \partial_j f \, d\lambda = -\sum_l \int \overline{\partial_j (\rho_l \cdot \varphi)} \cdot f \, d\lambda =$$

$$= -\int \overline{\partial_j \left[\left(\sum_l \rho_l \right) \cdot \varphi \right]} \cdot f \, d\lambda = -\langle \partial_j \varphi | f \cdot \lambda \rangle$$

en ayant utilisé le théorème de Fubini et la formule d'intégration par partie.

LEMME *L'application linéaire*

$$\partial_j : \mathcal{D}(X) \longrightarrow \mathcal{D}(X) : \varphi \longmapsto \partial_j \varphi$$

est continue. En particulier, si $\mu \in \mathcal{D}(X)'$ est une distribution, alors la forme semi-linéaire

$$|\mu\rangle \circ \partial_j : \varphi \longmapsto \langle \partial_j \varphi | \mu \rangle$$

est continue.

En effet, pour tout $K \in \mathfrak{K}(\mathbb{X})$ et $k \in \mathbb{N}$, on a

$$p_{K,k}(\partial_j \varphi) = \max\nolimits_{|\alpha|_1 \leqslant k} \|\partial^\alpha \partial_j \varphi\|_{\infty,K} \leqslant p_{K,k+1}(\varphi) \quad \text{pour tout } \varphi \in \mathcal{D}(X,K) \ .$$

Ceci montre que

$$\partial_j : \mathcal{D}(X,K) \longrightarrow \mathcal{D}(X,K) \hookrightarrow \mathcal{D}(X)$$

est continue, d'où notre assertion par la proposition 2.10. □

Ceci nous conduit à poser la

DEFINITION Pour tout $\mu \in \mathcal{D}(X)'$ et $j \in \{1, \ldots, n\}$, on définit une distribution

$$|\partial_j \mu\rangle := -|\mu\rangle \circ \partial_j \in \mathcal{D}(X)' \ ,$$

ce qui revient à poser

$$\langle \varphi | \partial_j \mu \rangle := -\langle \partial_j \varphi | \mu \rangle \quad \text{pour tout } \varphi \in \mathcal{D}(X) \ .$$

On dit que c'est la *j-ième dérivée partielle* de μ (au sens des distributions). Plus généralement, si $\alpha \in \mathbb{N}^n$, on définit la distribution $\partial^\alpha \mu \in \mathcal{D}(X)'$ par

$$\partial^\alpha \mu := \partial_1^{\alpha_1} \partial_2^{\alpha_2} \ldots \partial_n^{\alpha_n} \mu \ .$$

On a

$$\langle \varphi | \partial^\alpha \mu \rangle := (-1)^{|\alpha|_1} \langle \partial^\alpha \varphi | \mu \rangle \ .$$

REMARQUE 1 Le calcul du début montre par récurrence que si $f \in \mathcal{C}^{(k)}(X)$, alors pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$ tel que $|\alpha|_1 \leqslant k$, la dérivée ∂^α au sens des distributions de f coïncide avec la dérivée classique $\partial^\alpha f$, i.e.

$$\partial^\alpha (f \cdot \lambda) = \partial^\alpha f \cdot \lambda \ .$$

Ceci justifie l'identification de $f \in \mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(X)$ avec la fonction généralisée $f \cdot \lambda$.

REMARQUE 2 Le lemme montre que $\partial^\alpha : \mathcal{D}(X) \longrightarrow \mathcal{D}(X) : \varphi \longmapsto \partial^\alpha \varphi$ est continue. La définition peut être formulée à l'aide de l'adjonction. On a

$$\partial^{\alpha\dagger} = (-1)^{|\alpha|_1} \cdot \partial^\alpha : \mathcal{D}(X)' \longrightarrow \mathcal{D}(X)' : \mu \longmapsto (-1)^{|\alpha|_1} \cdot \partial^\alpha \mu \ .$$

Si l'on pose $\not{\partial}_j := \frac{1}{2\pi i} \cdot \partial_j$, donc $\not{\partial}^\alpha = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^{|\alpha|_1} \cdot \partial^\alpha$, on a

$$\not{\partial}^{\alpha\dagger} = \not{\partial}^\alpha \ ,$$

en considérant les applications $\not{\partial}^\alpha$ dans les bons espaces. Ceci montre en particulier que ∂^α : $\mathcal{D}(X)' \longrightarrow \mathcal{D}(X)'$ est continue.

On dit que $\not{\partial}^\alpha$ est *formellement auto-adjoint* car $\not{\partial}^{\alpha\dagger}$ est un prolongement de $\not{\partial}^\alpha$:

$$\begin{array}{ccccc} & \mathcal{D}(X) & \hookrightarrow & \mathcal{D}(X)' & \\ \not{\partial}^\alpha = \not{\partial}^{\alpha\dagger} & \downarrow & & \downarrow & \not{\partial}^\alpha = \not{\partial}^{\alpha\dagger} \\ & \mathcal{D}(X) & \hookrightarrow & \mathcal{D}(X)' & \end{array} \ .$$

Nous reviendrons plus tard sur cette notion (cf. définition 7.3).

Un des problèmes de base consiste à étudier les espaces $\not{\partial}^\alpha (\mathbf{L}^2(X))$ et surtout

$$(\not{\partial}^\alpha)^{-1} \left(\mathbf{L}^2(X)\right) \cap \mathbf{L}^2(X) \ .$$

Faisons quelques calcules dans l'espace des distributions sur $\mathbb{R}$.

EXEMPLE 1 Calculons

$$\langle \varphi | \partial |\mathrm{id}| \rangle = -\langle \partial\varphi | |\mathrm{id}| \rangle = -\int \overline{\partial\varphi(x)} \cdot |x| \, dx = \int_{-\infty}^0 \overline{\partial\varphi(x)} \cdot x \, dx - \int_0^\infty \overline{\partial\varphi(x)} \cdot x \, dx =$$

$$= -\int_{-\infty}^0 \overline{\varphi(x)} \, dx + \int_0^\infty \overline{\varphi(x)} \, dx = \int \overline{\varphi(x)} \cdot \mathrm{signum}(x) \, dx = \langle \varphi | \mathrm{signum} \rangle \ .$$

Ceci montre que

$$\partial |\mathrm{id}| = \mathrm{signum} \ .$$

EXEMPLE 2 De même, on a

$$\langle \varphi | \partial \, \mathrm{signum} \rangle = -\langle \partial\varphi | \mathrm{signum} \rangle = \int_{-\infty}^0 \overline{\partial\varphi(x)} \, dx - \int_0^\infty \overline{\partial\varphi(x)} \, dx = \overline{\varphi(0)} + \overline{\varphi(0)} = \langle \varphi | 2\delta \rangle \ ,$$

ce qui montre que

$$\partial \, \mathrm{signum} = 2\delta \ .$$

Avec un calcul analogue on obtient

$$\partial h_t = \delta_t \ .$$

Plus généralement :

EXEMPLE 3 Soit F une fonction absolument continue sur un intervalle ouvert J de $\mathbb{R}$ (cf. cours d'Analyse [17], définition 15.19.3). Rappelons qu'il existe une unique fonction $f \in \mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(J)$ telle que, pour tout $\tau \in J$, on ait

$$F = F(\tau) + \int_\tau^\cdot f \ .$$

Alors la dérivée (au sens des distributions) ∂F de F est f , donc coïncide avec la notion de dérivée d'une fonction absolument continue.

En effet, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(J)$, il existe $a, b \in J$ tels que $\operatorname{supp}\varphi \subset \left]a, b\right[$ et en intégrant par parties (cf. cours d'Analyse [17], théorème 16.4), on obtient

$$\langle \varphi | \, \partial F\rangle = -\int_a^b \overline{\partial\varphi} \cdot F = -\overline{\varphi} \cdot F|_a^b + \int_a^b \overline{\varphi} \cdot f = \langle \varphi | \, f\rangle \ .$$

□

EXEMPLE 4 Soit ρ une fonction croissante sur J . Etant donné $\varphi \in \mathcal{D}(J)$ et (x_j) une subdivision de son support, il existe $y_j \in [x_j, x_{j+1}]$ tel que

$$\partial\varphi(y_j) = \frac{\varphi(x_{j+1}) - \varphi(x_j)}{x_{j+1} - x_j} \ .$$

Par le théorème de Lebesgue, il vient alors

$$\langle \varphi | \, \partial\rho\rangle = -\langle \partial\varphi | \, \rho\rangle = -\int \overline{\partial\varphi} \cdot \rho \, d\lambda = -\int \overline{\partial\varphi(x)} \cdot \rho(x-) \ dx =$$

$$= -\lim \sum \overline{\partial\varphi(y_j)} \cdot \rho(x_j-) \cdot (x_{j+1} - x_j) = -\lim \sum \overline{[\varphi(x_{j+1}) - \varphi(x_j)]} \cdot \rho(x_j-) =$$

$$= -\lim \left[\sum \overline{\varphi(x_j)} \cdot \rho(x_{j-1}-) - \sum \overline{\varphi(x_j)} \cdot \rho(x_j-)\right] = \lim \sum \overline{\varphi(x_j)} \left[\rho(x_j-) - \rho(x_{j-1}-)\right] =$$

$$= \int \overline{\varphi} \, d\rho = \langle \varphi | \, \lambda_\rho\rangle \ ,$$

car $\sum \overline{\partial\varphi(y_j)} \cdot 1_{[x_j, x_{j+1}[}$ converge ponctuellement vers $\overline{\partial\varphi}$ et $\sum \cdot\rho(x_j-) \cdot 1_{[x_j, x_{j+1}[}$ vers $\rho(\diamond-)$. Ainsi

$$\partial\rho = \lambda_\rho \ .$$

REMARQUE 3 Avant la théorie des distributions, les électrotechniciens et les physiciens ont "résolu" le problème du choc d'une boule de billard en introduisant un nouvel objet δ , dite *fonction de Dirac* , ayant les propriétés suivantes :

$$\delta(x) = 0 \quad \text{pour tout } x \neq 0 \quad \text{et} \quad \delta(0) = \infty \ ,$$

mais telle que

$$\int \delta(x) \ dx = 1\,!$$

On en “déduisait” que

$$h(x) = \int_{-\infty}^{t} \delta(x)\, dx \quad \text{, i.e.} \quad \partial h = \delta \ ,$$

puis que

$$\int \varphi(x) \cdot \delta(x)\, dx = \Big[\varphi(x) \cdot h(x)\Big]_{-\infty}^{\infty} - \int \partial\varphi(x) \cdot h(x)\, dx = -\int_{0}^{\infty} \partial\varphi(x)\, dx = \varphi(0) \ .$$

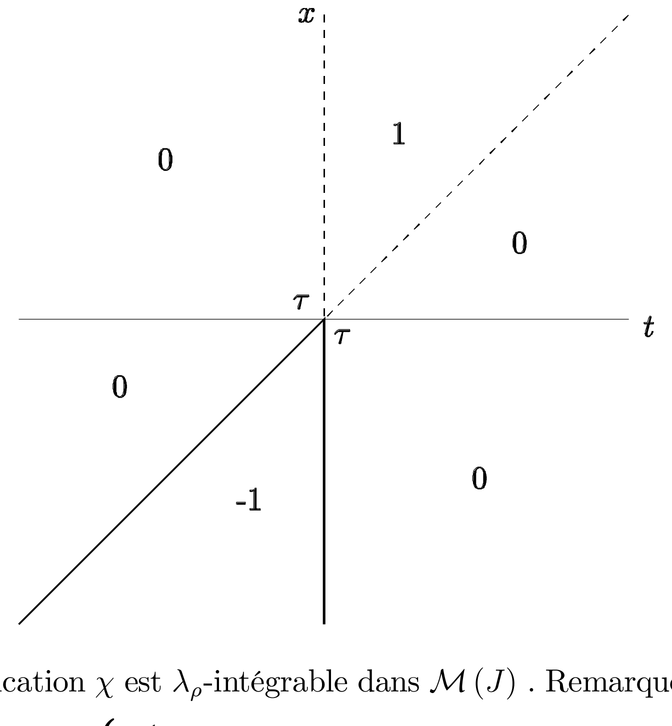
Ces calculs sont analogues à ceux que nous avons faits ci-dessus, à la seule différence que les objets avec lesquels nous travaillons sont maintenant mathématiquement bien définis.

EXEMPLE 5 Soient J un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $\tau \in J$ et $\rho : J \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction croissante (continue à gauche) telle que $\rho(\tau+) = 0$ (cf. exemple 4.2.2). Considérons l'application

$$\chi : J \longrightarrow \mathcal{M}(J) : t \longmapsto \chi(t, \cdot)$$

définie par

$$\chi(t, \cdot) = \begin{cases} 1_{]t,\infty[\cap J} & \text{si} \quad \tau < t \\ -1_{]-\infty,t]\cap J} & \text{si} \quad t \leqslant \tau \end{cases} \qquad \text{pour tout } t \in J \ .$$



Montrons que l'application χ est λ_ρ-intégrable dans $\mathcal{M}(J)$. Remarquons tout d'abord que

$$\chi(\cdot, x) = \begin{cases} 1_{]\tau,x[} & \text{si} \quad \tau < x \\ -1_{[x,\tau]} & \text{si} \quad x \leqslant \tau \end{cases} \qquad \text{pour tout } x \in J \ ,$$

donc pour tout $a, b \in J$ tels que $a \leqslant \tau \leqslant b$ et $x \in [a, b]$, on a

$$|\chi(t, x)| \leqslant 1_{[a,b]}(t) \ .$$

Pour tout $\varphi \in \mathcal{K}(J, [a, b])$, il vient alors

$$|\langle \varphi | \chi(t, \cdot)\rangle| \leqslant \int |\varphi(x)| \cdot |\chi(t, x)|\, dx \leqslant 1_{[a,b]}(t) \cdot (b - a) \cdot \|\varphi\|_{\infty,[a,b]} \leqslant (b - a) \cdot \|\varphi\|_{\infty} \ ,$$

ce qui montre que χ est scalairement λ_ρ-intégrable et (faiblement) bornée dans $\mathcal{M}(J)$. Nous pouvons donc appliquer le théorème 3.12.ii.

Puisque

$$|\varphi(x)| \cdot |\chi(t,x)| \leqslant 1_{[a,b]}(x) \cdot 1_{[a,b]}(t) \cdot \|\varphi\|_\infty \ ,$$

nous pouvons appliquer le théorème de Fubini et nous obtenons finalement

$$\int \langle \varphi | \chi(t,\cdot) \rangle \, d\lambda_\rho(t) = \int \left(\int \overline{\varphi(x)} \cdot \chi(t,x) \, dx \right) d\lambda_\rho(t) =$$

$$= \int \overline{\varphi(x)} \cdot \left(\int \chi(t,x) \, d\lambda_\rho(t) \right) dx = \int \overline{\varphi(x)} \cdot [\rho(x-) - \rho(\tau+)] \, dx =$$

$$= \int \overline{\varphi(x)} \cdot \rho(x) \, dx = \langle \varphi | \rho \rangle \ ,$$

ce qui prouve que

$$\int \chi(t,\cdot) \, d\lambda_\rho(t) = \rho \quad \text{dans } \mathcal{M}(J) \ .$$

L'injection canonique $j : \mathcal{M}(J) \hookrightarrow \mathcal{D}(J)'$ étant continue, les applications $\delta_\diamond = j \circ \varepsilon$ et $\chi := j \circ \chi$ sont aussi λ_ρ-intégrables dans $\mathcal{D}(J)'$ (cf. 3.12, lemme (iii) et exemple 2). Comme $\partial : \mathcal{D}(J)' \longrightarrow \mathcal{D}(J)'$ est continue, on en déduit que

$$\partial\rho = \partial \left(\int \chi(t,\cdot) \, d\lambda_\rho(t) \right) = \int \partial_x \chi(t,\cdot) \, d\lambda_\rho(t) = \int \delta_t \, d\lambda_\rho(t) = \lambda_\rho \ .$$

Nous avons redémontré le résultat de l'exemple 3 ci-dessus.

EXERCICE Soient J un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $\nu \in \mathcal{D}(J)'$. Montrer que l'équation différentielle $\partial\mu = \nu$ possède dans $\mathcal{D}(J)'$ une unique solution à une constante additive près.

Décomposer $\mathcal{D}(J)$ à l'aide de la forme linéaire λ_J , montrer que $\partial : \mathcal{D}(J) \longrightarrow \operatorname{Ker} \lambda_J$ est bijective et calculer $\overset{-1}{\partial}$.

4.5 Multiplication

Soient $g \in \mathcal{C}^{(\infty)}(X)$ et $f \in \mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(X)$. On a $M_g f := g \cdot f \in \mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(X)$ et, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(X)$, on a

$$\langle \varphi | \, g \cdot f \rangle = \int \overline{\varphi} \cdot g \cdot f \, d\lambda = \langle \overline{g} \cdot \varphi | \, f \rangle \ ,$$

puisque $g \cdot \varphi \in \mathcal{D}(X)$.

LEMME *L'application bilinéaire*

$$\mathcal{C}^{(\infty)}(X) \times \mathcal{D}(X) \longrightarrow \mathcal{D}(X) : (g, \varphi) \longmapsto g \cdot \varphi$$

est séparément continue. En particulier, si $\mu \in \mathcal{D}(X)'$ est une distribution, alors la forme semi-linéaire

$$|\mu\rangle \circ M_{\overline{g}} : \varphi \longmapsto \langle \overline{g} \cdot \varphi | \, \mu \rangle$$

est continue.

Etant donné $g \in \mathcal{C}^{(\infty)}(X)$, $K \in \mathfrak{K}(X)$, $k \in \mathbb{N}$ et $\varphi \in \mathcal{D}(X, K)$, on a

$$p_{K,k}(g \cdot \varphi) = \max\nolimits_{|\alpha|_1 \leqslant k} \|\partial^\alpha (g \cdot \varphi)\|_{\infty,K} \leqslant \max\nolimits_{|\alpha|_1 \leqslant k} \sum_{\beta \leqslant \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \cdot \left\|\partial^\beta g \cdot \partial^{\alpha - \beta} \varphi\right\|_{\infty,K} \leqslant$$

$$\leqslant \max\nolimits_{|\alpha|_1 \leqslant k} \sum_{\beta \leqslant \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \cdot \left\|\partial^\beta g\right\|_{\infty,K} \cdot \left\|\partial^{\alpha-\beta} \varphi\right\|_{\infty,K} \leqslant c_k \cdot p_{K,k}(g) \cdot p_{K,k}(\varphi) \ ,$$

ce qui montre d'une part la continuité de

$$M_g : \mathcal{D}(X, K) \longrightarrow \mathcal{D}(X, K) \hookrightarrow \mathcal{D}(X) \ ,$$

d'où la continuité de $M_g : \mathcal{D}(X) \longrightarrow \mathcal{D}(X)$ par la proposition 2.10, et d'autre part celle de

$$\diamond \cdot \varphi : \mathcal{C}^{(\infty)}(X) \longrightarrow \mathcal{D}(X, K) \hookrightarrow \mathcal{D}(X) \ .$$

□

Ceci nous conduit à poser la

DEFINITION Pour tout $g \in \mathcal{C}^{(\infty)}(X)$ et $\mu \in \mathcal{D}(X)'$, on définit une distribution

$$|M_g \mu\rangle := |g \cdot \mu\rangle := |\mu\rangle \circ M_{\overline{g}} \in \mathcal{D}(X)' \ ,$$

ce qui revient à poser

$$\langle \varphi | \, g \cdot \mu \rangle := \langle \overline{g} \cdot \varphi | \, \mu \rangle \quad \text{pour tout } \varphi \in \mathcal{D}(X) \ .$$

On dit que c'est la *distribution produit* de g et μ .

REMARQUE 1 Le calcul du début montre que, pour tout $f \in \mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(X)$, on a

$$g \cdot (f \cdot \lambda) = (g \cdot f) \cdot \lambda \ ,$$

i.e. la multiplication de de f par g au sens des distributions coïncide avec ce produit au sens classique des fonctions.

REMARQUE 2 La définition signifie que
$$M_{\overline{g}}^{\dagger} = M_g : \mathcal{D}(X)' \longrightarrow \mathcal{D}(X)' : \mu \longmapsto g \cdot \mu \ .$$
Ceci montre en particulier que $M_g : \mathcal{D}(X)' \longrightarrow \mathcal{D}(X)'$ est continue.

Remarquons que M_g est formellement auto-adjoint si, et seulement si, g est réelle.

EXEMPLE 1 Pour tout $x \in X$, on a
$$g \cdot \delta_x = g(x) \cdot \delta_x \ .$$
En particulier, $\mathrm{id} \cdot \delta = 0$. Si l'on utilise, comme les physiciens, les fonctions de Dirac de variable t , on a
$$g(t) \cdot \delta(t - x) = g(x) \cdot \delta(t - x) \ .$$

En effet, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(X)$, il vient
$$\langle \varphi | \, g \cdot \delta_x \rangle = \langle \bar{g} \cdot \varphi | \, \delta_x \rangle = g(x) \cdot \overline{\varphi(x)} = g(x) \cdot \langle \varphi | \, \delta_x \rangle = \langle \varphi | \, g(x) \cdot \delta_x \rangle \ .$$
□

EXEMPLE 2 Pour tout $\mu \in \mathcal{M}(X)$, la distribution $g \cdot \mu$ coïncide avec l'intégrale de densité g par rappport à μ .

En effet, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(X)$, on a
$$\langle \varphi | \, g \cdot \mu \rangle = \langle \bar{g} \cdot \varphi | \, \mu \rangle = \int g \cdot \overline{\varphi} \, d\mu = \int \overline{\varphi} \, d(g \cdot \mu) \ .$$
Le résultat en découle, puisque l'intégrale $g \cdot \mu$ est univoquement déterminée par sa restriction à $\mathcal{D}(X)$. □

PROPOSITION *On a*
$$\partial_j (g \cdot \mu) = \partial_j g \cdot \mu + g \cdot \partial_j \mu \ .$$
Plus généralement on a la formule de Leibniz
$$\partial^\alpha (g \cdot \mu) = \sum_{\beta \leqslant \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \cdot \partial^\beta g \cdot \partial^{\alpha - \beta} \mu \ .$$

En effet
$$\langle \varphi | \, \partial_j g \cdot \mu + g \cdot \partial_j \mu \rangle = \left\langle \overline{\partial_j g} \cdot \varphi \middle| \, \mu \right\rangle + \langle \overline{g} \cdot \varphi | \, \partial_j \mu \rangle = \langle \partial_j \overline{g} \cdot \varphi | \, \mu \rangle - \langle \partial_j (\overline{g} \cdot \varphi) | \, \mu \rangle =$$
$$= - \langle \overline{g} \cdot \partial_j \varphi | \, \mu \rangle = - \langle \partial_j \varphi | \, g \cdot \mu \rangle = \langle \varphi | \, \partial_j (g \cdot \mu) \rangle \ .$$
La formule de Leibniz en découle par récurrence. □

EXEMPLE 3 Pour tout $x \in X$, on a
$$g \cdot \partial_j \delta_x = g(x) \cdot \partial_j \delta_x - \partial_j g(x) \cdot \delta_x \ .$$
En particulier $\mathrm{id} \cdot \partial \delta = -\delta$ sur $\mathbb{R}$.

En effet

$$g(x) \cdot \partial_j \delta_x = \partial_j (g(x) \cdot \delta) = \partial_j (g \cdot \delta_x) = \partial_j g \cdot \delta_x + g \cdot \partial_j \delta_x = \partial_j g(x) \cdot \delta(x) + g \cdot \partial_j \delta_x \ ,$$

d'où le résultat. □

Le physicien écrira

$$g(t) \cdot \partial_t \delta(t-x) = g(x) \cdot \partial_t \delta(t-x) - \partial g(x) \cdot \delta(t-x) \ .$$

4.6 Translation

DEFINITION 1 Si f est une fonction sur $\mathbb{R}^n$, pour tout $y \in \mathbb{R}^n$, on définit la *fonction translatée* $T_y f = f_y$ par

$$f_y(x) := f(x-y) \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^n \ .$$

Si $f \in \mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, alors pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, on a

$$\langle \varphi | f_y \rangle = \int \overline{\varphi(x)} \cdot f(x-y)\, dx = \int \overline{\varphi(x+y)} \cdot f(x)\, dx = \left\langle \varphi_{-y} \right| f \rangle \ .$$

LEMME *L'application*

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) : (\varphi, y) \longmapsto \varphi_y$$

est linéaire en la première variable et séparément continue. En particulier, si $\mu \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)'$ *est une distribution sur* $\mathbb{R}^n$ *, alors la forme semi-linéaire*

$$|\mu\rangle \circ T_{-y} : \varphi \longmapsto \left\langle \varphi_{-y} \right| \mu \rangle$$

est continue.

Pour tout $K \in \mathfrak{K}(\mathbb{R}^n)$, $k \in \mathbb{N}$, $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n, K)$ et $y \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\operatorname{supp} \varphi_y = \operatorname{supp} \varphi + y \subset K + y$$

et

$$p_{K+y,k}\left(\varphi_y\right) = \max\nolimits_{|\alpha|_1 \leqslant k} \left\| \partial^\alpha \varphi_y \right\|_{\infty, K+y} = \max\nolimits_{|\alpha|_1 \leqslant k} \left\| \partial^\alpha \varphi \right\|_{\infty, K} = p_{K,k}(\varphi) \ ,$$

ce qui montre la continuité de

$$T_y : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n, K) \longrightarrow \mathcal{D}(\mathbb{R}^n, K+y) \hookrightarrow \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \ ,$$

donc aussi celle de $T_y : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ par la proposition 2.10.

Etant donné $z \in \mathbb{R}^n$, on a

$$T_z \varphi - T_y \varphi = T_{z-y}(T_y \varphi) - T_y \varphi \, ;$$

il suffit donc de prouver la continuité de

$$y \longmapsto \varphi_y : B(0,1) \longrightarrow \mathcal{D}(\mathbb{R}^n, K + B(0,1)) \hookrightarrow \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$$

en 0 . Mais si $y \in B(0,1)$, il vient

$$p_{K+B(0,1),k}\left(\varphi_y - \varphi\right) = \max\nolimits_{|\alpha|_1 \leqslant k} \left\| \partial^\alpha \left(\varphi_y - \varphi\right) \right\|_{\infty, K+B(0,1)} =$$

$$= \max\nolimits_{|\alpha|_1 \leqslant k} \left\| (\partial^\alpha \varphi)_y - \partial^\alpha \varphi \right\|_{\infty, K+B(0,1)} \ .$$

Utilisant la continuité uniforme de chaque fonction $\partial^\alpha \varphi$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $\delta > 0$ tel que l'on ait

$$\left| \left[(\partial^\alpha \varphi)_y - \partial^\alpha \varphi \right](z) \right| = \left| \partial^\alpha \varphi(z-y) - \partial^\alpha \varphi(z) \right| \leqslant \varepsilon \quad \text{si } |y| \leqslant \delta \text{ et } |\alpha|_1 \leqslant k \ .$$

On a alors

$$p_{K+B(0,1),k}\left(\varphi_y - \varphi\right) \leqslant \varepsilon \quad \text{si } |y| \leqslant \delta \ .$$

□

Ceci nous conduit à poser la

DEFINITION 2 Pour tout $y \in \mathbb{R}^n$ et $\mu \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)'$, on définit une distribution

$$|T_y\mu\rangle := \left|\mu_y\right\rangle := |\mu\rangle \circ T_{-y} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)' ,$$

ce qui revient à poser

$$\left\langle \varphi \middle| \mu_y \right\rangle := \left\langle \varphi_{-y} \middle| \mu \right\rangle \ .$$

On dit que c'est la *distribution translatée* de μ par y .

REMARQUE 1 Le calcul ci-dessus montre que

$$(f \cdot \lambda)_y = f_y \cdot \lambda \ .$$

Il est évident que h_t et δ_t sont les translatées de h et δ .

REMARQUE 2 La définition signifie que

$$T_{-y}^{\dagger} = T_y : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)' \longrightarrow \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)' : \mu \longmapsto \mu_y \ .$$

Ceci prouve en particulier que $T_y : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)' \longrightarrow \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)'$ est continue.

REMARQUE 3 L'invariance par translation de l'intégrale de Lebesgue montre que

$$T_y : \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n)$$

est un opérateur unitaire, i.e.

$$T_y^* = T_{-y} = \overset{-1}{T_y} \ .$$

REMARQUE 4 Si $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$, alors $\mu_y \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ et, pour toute fonction f sur $\mathbb{R}^n$, on a $f \in \mathbf{L}^1\left(\mu_y\right)$ si, et seulement si, $f_{-y} \in \mathbf{L}^1(\mu)$. Dans ce cas on a

$$\int f\, d\mu_y = \int f_{-y}\, d\mu \ .$$

On se souvient facilement de cette formule en l'écrivant sous la forme

$$\int f(x)\ d\mu_y(x) = \int f(x)\ d\mu(x-y) = \int f(x+y)\ d\mu(x) = \int f_{-y}(x)\ d\mu(x) \ .$$

Il suffit de constater, de manière analogue à ce que nous venons de faire, que

$$\varphi \longmapsto \varphi_y : \mathcal{K}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$$

est continue, puis de montrer que, pour toute fonction $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$, on a

$$\int^* f\, d\mu_y = \int^* f_{-y}\, d\mu \ .$$

□

PROPOSITION

(i) *Pour tout* $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ *, l'application*

$$y \longmapsto \varphi_y : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$$

est partiellement dérivable en 0 *et, pour tout* $j = 1, \ldots, n$ *, on a*

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \cdot \left[\varphi_{-h\cdot e_j} - \varphi\right] = \partial_j \varphi \quad \textit{dans } \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \ .$$

(ii) *Pour tout* $\mu \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)'$ *, on a*

$$\partial_j \mu = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \cdot \left[\mu_{-h\cdot e_j} - \mu\right] \quad \textit{dans } \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)' \ .$$

Démonstration de (i) En posant $K := \operatorname{supp} \varphi + B_\infty(0,1)$, pour tout $h \in [-1,1]$, on a $\frac{1}{h} \cdot \left[\varphi_{-h\cdot e_j} - \varphi\right] \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n, K)$. En utilisant la seconde inégalité de la moyenne (cf. cours d'Analyse [17], proposition 11.2.ii), pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $h \in [-\delta, \delta]$, on obtient

$$p_{K,k}\left(\frac{1}{h} \cdot \left[\varphi_{-h\cdot e_j} - \varphi\right] - \partial_j \varphi\right) =$$

$$= \max_{|\alpha|_1 \leqslant k} \sup_{x\in K} \left|\frac{1}{h} \cdot \left[\partial^\alpha \varphi_{-h\cdot e_j}(x) - \partial^\alpha \varphi(x)\right] - \partial^\alpha \partial_j \varphi(x)\right| =$$

$$= \max_{|\alpha|_1 \leqslant k} \sup_{x\in K} \left|\frac{1}{h} \cdot \left[\partial^\alpha \varphi(x + h\cdot e_j) - \partial^\alpha \varphi(x)\right] - \partial_j \partial^\alpha \varphi(x)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \max_{|\alpha|_1 \leqslant k} \sup_{x\in K} \sup_{h\in[-\delta,\delta]} \left|\partial^\alpha \varphi(x + h\cdot e_j) - \partial^\alpha \varphi(x)\right|$$

et le membre de droite tend vers 0 par la continuité uniforme des fonctions $\partial^\alpha \varphi$.

Démonstration de (ii) Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, il vient

$$\langle \varphi | \partial_j \mu \rangle = -\langle \partial_j \varphi | \mu \rangle = -\left\langle \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \cdot \left[\varphi_{-h\cdot e_j} - \varphi\right] \middle| \mu \right\rangle = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \cdot \left\langle \left[\varphi_{h\cdot e_j} - \varphi\right] \middle| \mu \right\rangle =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \cdot \left\langle \varphi \middle| \mu_{-h\cdot e_j} - \mu \right\rangle = \lim_{h\to 0} \left\langle \varphi \middle| \frac{1}{h} \cdot \left[\mu_{-h\cdot e_j} - \mu\right] \right\rangle \ .$$

□

4.7 Dilatation

REMARQUE Les systèmes de semi-normes $(p_{K,k})_{k\in\mathbb{N},K\in\mathfrak{K}(X)}$, $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $\left(p_{K,k|\mathcal{D}(X,K)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$, que nous avons introduits dans les exemples 5 et 6 de 2.1, 5 et 6 de 2.3 et 3 de 2.10, ne sont pas très pratiques lorsqu'il est nécessaire d'utiliser la formule de dérivation des fonctions composées. Nous allons construire d'autres systèmes de semi-normes équivalents.

Soient X un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^m$ une fonction k-fois (totalement) dérivable (cf. cours d'Analyse [17], 11.5). On a

$$Df : X \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \quad \text{et} \quad D^2 f : X \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)) \ .$$

Comme en 3.13, on voit facilement que $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m))$ est isomorphe à l'espace vectoriel des applications bilinéaires $\mathcal{L}_2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ définies sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^m$. Pour tout $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$, on a

$$D^2 f(x)(v_1, v_2) = \left[D^2 f(x)\, v_1\right] v_2 = \left(\left(\partial_{l_2}\partial_{l_1} f(x)\right)_{l_1=1,\ldots,n} v_1\right)_{l_2=1,\ldots,n} v_2 =$$

$$= \sum_{l_2=1}^{n} \left(\sum_{l_1=1}^{n} \partial_{l_2}\partial_{l_1} f(x) \cdot v_{1,l_1}\right) \cdot v_{2,l_2} \ .$$

Plus généralement

$$D^k f : X \longrightarrow \mathcal{L}_k\left([\mathbb{R}^n]^k, \mathbb{R}^m\right)$$

est à valeurs dans l'espace vectoriel des applications k-linéaires et on a

$$D^k f(x)(v_1, \ldots, v_k) = \sum_{l_k=1}^{n} \left(\ldots \left(\sum_{l_1=1}^{n} \partial_{l_k} \ldots \partial_{l_1} f(x) \cdot v_{1,l_1}\right) \cdot \ldots\right) \cdot v_{k,l_k} \ .$$

Rappelons que $D^k f(x)$ est une application k-linéaire symétrique (cf. Dieudonné [6], 8.12.14).

En se rappelant le critère de continuité pour une application bilinéaire (cf. proposition 2.4), il est naturel d'introduire la norme d'une application k-linéaire $\mathfrak{s} \in \mathcal{L}_k\left([\mathbb{R}^n]^k, \mathbb{R}^m\right)$ par

$$\|\mathfrak{s}\| := \sup_{v_1,\ldots,v_k\in\mathbb{R}^n, |v_1|,\ldots,|v_k|\leqslant 1} |\mathfrak{s}(v_1, \ldots, v_k)| \ .$$

Pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$, on a alors

$$\partial^\alpha f(x) = \partial_1^{\alpha_1} \ldots \partial_n^{\alpha_n} f(x) = D^{|\alpha|_1} f(x) \left(\underbrace{e_n, \ldots, e_n}_{\alpha_n\text{-fois}}, \ldots, \underbrace{e_1, \ldots, e_1}_{\alpha_1\text{-fois}}\right) \ ,$$

donc

$$|\partial^\alpha f(x)| \leqslant \left\|D^{|\alpha|_1} f(x)\right\| \ .$$

D'autre part

$$\left\|D^k f(x)\right\| \leqslant \sum_{l_k=1}^{n} \left(\ldots \left(\sum_{l_1=1}^{n} |\partial_{l_k} \ldots \partial_{l_1} f(x)|\right) \ldots\right) \leqslant kn \cdot \max_{\alpha\in\mathbb{N}^n, |\alpha|_1=k} |\partial^\alpha f(x)| \ .$$

Ceci nous montre que l'on peut remplacer les semi-normes $p_{K,k}$ et p_k par

$$r_{K,k}(\varphi) := \max_{j=0,\ldots,k} \left\| D^j f \right\|_{\infty,K} \quad \text{pour tout } \varphi \in \mathcal{C}^{(\infty)}(X)$$

et

$$r_k(\varphi) := \max_{j=0,\ldots,k} \left\| \langle \mathrm{id} \rangle^k D^j f \right\|_{\infty} \quad \text{pour tout } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \ .$$

DEFINITION 1 Si f est une fonction sur $\mathbb{R}^n$, pour tout $A \in \mathbb{GL}(\mathbb{R}^n)$, on définit la fonction $D_A f$ par

$$D_A f(x) := |\det A|^{-\frac{1}{2}} \cdot f\left(\overset{-1}{A} x\right) \ .$$

En particulier si $h \in \mathbb{R}^* := \mathbb{R} \smallsetminus \{0\}$, on pose $D_h f := D_{h \cdot \mathrm{Id}} f$ et on dit que c'est la fonction *dilatée* de f par h ; on a

$$D_h f(x) := |h|^{-\frac{n}{2}} \cdot f\left(\frac{x}{h}\right) \ .$$

Si $f \in \mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, alors pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, on a

$$\langle \varphi | D_A f \rangle = \int \overline{\varphi(x)} \cdot |\det A|^{-\frac{1}{2}} \cdot f\left(\overset{-1}{A} x\right) dx =$$

$$= \int \overline{|\det A|^{\frac{1}{2}} \cdot \varphi(Ax)} \cdot f(x)\, dx = \left\langle D_{\overset{-1}{A}} \varphi \middle| f \right\rangle \ .$$

LEMME *L'application*

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \times \mathbb{GL}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) : (\varphi, A) \longmapsto D_A \varphi$$

est linéaire en la première variable et séparément continue. En particulier, si $\mu \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)'$ est une distribution sur $\mathbb{R}^n$, alors la forme semi-linéaire

$$|\mu\rangle \circ D_{\overset{-1}{A}} : \varphi \longmapsto \left\langle D_{\overset{-1}{A}} \varphi \middle| \mu \right\rangle$$

est continue.

Pour tout $K \in \mathfrak{K}(\mathbb{R}^n)$, $k \in \mathbb{N}$, $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n, K)$ et $h \in \mathbb{R}^*$, on a

$$\operatorname{supp} D_A \varphi = A(\operatorname{supp} \varphi) \subset A(K)$$

et

$$r_{A(K),k}(D_A \varphi) = \max_{j=0,\ldots,k} \left\| D^j (D_A \varphi) \right\|_{\infty, A(K)} =$$

$$= |\det A|^{-\frac{1}{2}} \cdot \max_{j=0,\ldots,k} \left\| D^j \left(\varphi \circ \overset{-1}{A} \right) \right\|_{\infty, A(K)} \leqslant$$

$$\leqslant |\det A|^{-\frac{1}{2}} \cdot \max_{j=0,\ldots,k} \left\| \left(D^j \varphi \right) \circ \overset{-1}{A} \right\|_{\infty, A(K)} \cdot \left\| \overset{-1}{A} \right\|^j =$$

$$= |\det A|^{-\frac{1}{2}} \cdot \max_{j=0,\ldots,k} \left(\left\| D^j \varphi \right\|_{\infty, A} \cdot \left\| \overset{-1}{A} \right\|^j \right) \leqslant$$

$$\leqslant |\det A|^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(\max_{j=0,\ldots,k} \left\| \overset{-1}{A} \right\|^j \right) \cdot r_{K,k}(\varphi) \ ,$$

car

$$D^j \left(\varphi \circ \overset{-1}{A} \right) = \left(D^j \varphi \right) \circ \overset{-1}{A} \left(\underbrace{\overset{-1}{A}, \ldots, \overset{-1}{A}}_{j\text{-fois}} \right) : (v_l)_{l=1,\ldots,j} \longmapsto \left(D^j \varphi \right) \circ \overset{-1}{A} \left(\overset{-1}{A} v_1, \ldots, \overset{-1}{A} v_j \right) \ .$$

Ceci montre la continuité de

$$D_A : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n, K) \longrightarrow \mathcal{D}(\mathbb{R}^n, A(K)) \hookrightarrow \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \ ,$$

donc aussi celle de $D_A : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ par la proposition 2.10.

Etant donné $B \in \mathbb{GL}(\mathbb{R}^n)$, on a

$$D_B \varphi - D_A \varphi = D_A \left(D_{\overset{-1}{A} B} \varphi - \varphi \right) \ ;$$

par ce que nous venons de démontrer, il suffit donc de prouver la continuité de

$$A \longmapsto D_A \varphi : B\left(\mathrm{Id}, \frac{1}{2}\right) \longrightarrow \mathcal{D}\left(\mathbb{R}^n, B\left(\mathrm{Id}, \frac{1}{2}\right)(K)\right) \hookrightarrow \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$$

en Id . Mais si $A \in B\left(\mathrm{Id}, \frac{1}{2}\right)$, il vient

$$r_{B\left(\mathrm{Id},\frac{1}{2}\right)(K),k}(D_A\varphi - \varphi) = \max_{j=0,\ldots,k} \left\| D^j (D_A \varphi - \varphi) \right\|_{\infty, B\left(\mathrm{Id},\frac{1}{2}\right)(K)} =$$

$$= \max_{j=0,\ldots,k} \left\| |\det A|^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(D^j \varphi \right) \circ \overset{-1}{A} \left(\underbrace{\overset{-1}{A}, \ldots, \overset{-1}{A}}_{j\text{-fois}} \right) - D^j \varphi \right\|_{\infty, B\left(1,\frac{1}{2}\right)(K)} \ .$$

Utilisant la continuité uniforme de chaque application $D^j \varphi$, puisqu'elles sont continues à support compact, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $\delta > 0$ tel que, si $\|A - \mathrm{Id}\| \leqslant \delta$, on ait

$$\left\| |\det A|^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(D^j \varphi \right) \left(\overset{-1}{A} x \right) \left(\underbrace{\overset{-1}{A}, \ldots, \overset{-1}{A}}_{j\text{-fois}} \right) - D^j \varphi(x) \right\| \leqslant$$

$$\leqslant |\det A|^{-\frac{1}{2}} \cdot \left\| \left[\left(D^j \varphi \right) \left(\overset{-1}{A} x \right) - D^j \varphi(x) \right] \left(\underbrace{\overset{-1}{A}, \ldots, \overset{-1}{A}}_{j\text{-fois}} \right) \right\|$$

$$+ |\det A|^{-\frac{1}{2}} \cdot \left\| \left(D^j \varphi \right)(x) \left(\underbrace{\overset{-1}{A}, \ldots, \overset{-1}{A}}_{j\text{-fois}} \right) - D^j \varphi(x) \right\|$$

$$+ \left(|\det A|^{-\frac{1}{2}} - 1 \right) \cdot \left\| \left(D^j \varphi \right)(x) \right\| \leqslant$$

$$\leqslant |\det A|^{-\frac{1}{2}} \cdot \left\| \overset{-1}{A} \right\|^j \cdot \left\| \left(D^j \varphi \right) \left(\overset{-1}{A} x \right) - D^j \varphi(x) \right\|$$

$$+ |\det A|^{-\frac{1}{2}} \cdot \left\| \overset{-1}{A} - \mathrm{Id} \right\| \cdot \sum_{l=1}^{j} \left\| \overset{-1}{A} \right\|^{j-l} \cdot \left\| \left(D^j \varphi \right)(x) \right\|$$

$$+ \left(|\det A|^{-\frac{1}{2}} - 1 \right) \cdot \left\| \left(D^j \varphi \right)(x) \right\| \leqslant \varepsilon \ ,$$

puisque

$$\left\| \left(D^j \varphi \right)(x) \left(\underbrace{\overset{-1}{A}, \ldots, \overset{-1}{A}}_{j\text{-fois}} \right) - D^j \varphi(x) \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{l=1}^{j} \left\| \left(D^j\varphi\right)(x)\left(\mathrm{Id},\ldots,\mathrm{Id},\underset{\text{position } j}{\overset{-1}{A}-\mathrm{Id}},\overset{-1}{A},\ldots,\overset{-1}{A}\right)\right\| \leqslant$$

$$\leqslant \left\|\overset{-1}{A}-\mathrm{Id}\right\| \cdot \sum_{l=1}^{j} \left\|\overset{-1}{A}\right\|^{j-l} \cdot \left\|\left(D^j\varphi\right)(x)\right\| \ .$$

On a alors

$$r_{B\left(\mathrm{Id},\frac{1}{2}\right)(K),k}\left(D_A\varphi-\varphi\right) \leqslant \varepsilon \quad \text{si } \left\|A-\mathrm{Id}\right\| \leqslant \delta \ .$$

□

Ceci nous conduit à poser la définition

DEFINITION 2 Pour tout $A \in \mathbb{GL}(\mathbb{R}^n)$ et $\mu \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)'$, on définit une distribution

$$|D_A\mu\rangle := |\mu\rangle \circ D_{\overset{-1}{A}} \ ,$$

ce qui revient à poser

$$\langle\varphi|\, D_A\mu\rangle := \langle D_{A^{-1}}\varphi|\, \mu\rangle \quad \text{pour tout } \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \ .$$

On dit que $D_h\mu := D_{h\cdot\mathrm{Id}}\mu$ est la distribution *dilatée* de μ par h .

REMARQUE 1 Le calcul ci-dessus montre que

$$D_A(f\cdot\lambda) = D_Af\cdot\lambda \ .$$

REMARQUE 2 La définition signifie que

$$D^{\dagger}_{\overset{-1}{A}} = D_A : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)' \longrightarrow \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)' : \mu \longmapsto D_A\mu \ .$$

Ceci prouve en particulier que $D_A : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)' \longrightarrow \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)'$ est continue.

La formule de changement de variables montre que

$$D_A : \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n)$$

est un opérateur unitaire, i.e.

$$D_A^* = D_{\overset{-1}{A}} = \overset{-1}{D_A} \ .$$

En effet

$$\|D_Af\|_2^2 = \int |\det A|^{-1}\cdot\left|f\left(\overset{-1}{A}x\right)\right|^2 dx = \int |\det A|^{-1}\cdot|f(y)|^2\cdot|\det A|\; dy = \|f\|_2^2 \ .$$

DEFINITION 3 Le cas particulier $h=-1$ de la symétrie centrale se note souvent

$$\overset{\vee}{f} := D_{-1}f \quad \text{et} \quad \overset{\vee}{\mu} := D_{-1}\mu \ .$$

On dit que $\overset{\vee}{f}$ (et $\overset{\vee}{\mu}$) est la fonction (la distribution) *symétrique* de f (de μ).

REMARQUE 3 Si $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$, alors $D_A\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ et, pour toute fonction f sur $\mathbb{R}^n$, on a $f \in \mathbf{L}^1(D_A\mu)$ si, et seulement si, $D_{\overset{-1}{A}} f \in \mathbf{L}^1(\mu)$. Dans ce cas on a

$$\int f\, dD_A\mu = \int D_{\overset{-1}{A}} f\, d\mu \ .$$

On se souvient facilement de cette formule en l'écrivant sous la forme

$$\int f(x)\ dD_A\mu(x) = \int f(x) \cdot |\det A|^{-\frac{1}{2}}\ d\mu\left(\overset{-1}{A}x\right) = \int |\det A|^{\frac{1}{2}} \cdot f(Ax)\ d\mu(x) =$$

$$= \int D_{\overset{-1}{A}} f(x)\ d\mu(x) \ .$$

EXEMPLE Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a

$$D_A\delta_x = |\det A|^{\frac{1}{2}} \cdot \delta_{Ax} \ .$$

En particulier $(\delta_x)^{\vee} = \delta_{-x}$ et $\overset{\vee}{\delta} = \delta$.

En effet, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, on a

$$\langle \varphi |\, D_A\delta_x\rangle = \left\langle |\det A|^{\frac{1}{2}} \cdot \varphi \circ A \middle|\, \delta_x \right\rangle = |\det A|^{\frac{1}{2}} \cdot \overline{\varphi(Ax)} = |\det A|^{\frac{1}{2}} \cdot \langle \varphi |\, \delta_{Ax}\rangle \ .$$

□

Les physiciens écrivent, à l'aide des fonctions de Dirac de variable t ,

$$\delta\left(\overset{-1}{A}t - x\right) = |\det A| \cdot \delta(t - Ax) \ ,$$

en particulier $\delta(-t) = \delta(t)$ et $\delta(-t - x) = \delta(t + x)$.

En effet

$$\delta\left(\overset{-1}{A}t - x\right) = |\det A|^{\frac{1}{2}} \cdot D_A\delta_x(t) = |\det A| \cdot \delta_{Ax}(t) = |\det A| \cdot \delta(t - Ax) \ .$$

4.8 Opérations et leurs liaisons dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)'$ et $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'$

DEFINITION 1 On désigne par $\mathcal{C}^{(\infty)}_{\text{temp}}(\mathbb{R}^n)$ l'espace vectoriel des fonctions indéfiniment dérivables g sur $\mathbb{R}^n$, dont toutes les dérivées sont à croissance lente, i.e. telles que, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$, on ait

$$\left\|\langle \mathrm{id}\rangle^{-m} \cdot \partial^\alpha g\right\|_\infty < \infty$$

pour un certain $m \in \mathbb{N}$. On dit que ces fonctions sont *tempérées* .

Dans ce paragraphe, on se donne $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $g \in \mathcal{C}^{(\infty)}_{\text{temp}}(\mathbb{R}^n)$, $y \in \mathbb{R}^n$ et $A \in \mathbb{GL}(\mathbb{R}^n)$. On vérifie immédiatement que l'on peut définir les applications linéaires

$$\partial^\alpha \ , \ M_g \ , \ T_y \ , \ D_A : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

de la même manière que dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

THEOREME *Les applications ∂^α , M_g , T_y et $D_A : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ sont continues, $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'$ est laissé invariant par les applications correspondantes dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)'$, leurs restrictions à $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'$ sont continues et on a les mêmes formules dans la semi-dualité $\left\langle \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \middle| \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)' \right\rangle$ que dans $\left\langle \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \middle| \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)' \right\rangle$.*

La continuité de ces application se démontre de la même manière que dans les lemmes 4.4 à 4.7, en remplaçant les semi-normes $p_{K,k}$ par p_k . Le reste de la démonstration est immédiat en considérant les diagrammes commutatifs suivants, Φ désignant l'une des applications $(-1)^\alpha \cdot \partial^\alpha$, $M_{\bar{g}}$, T_{-y} et $D_{\underset{A}{-1}}$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) & \hookrightarrow & \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) & & & \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)' & \hookrightarrow & \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)' & \\
\Phi_{|\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)} & \downarrow & & \downarrow & \Phi \quad \text{et} \quad & \Phi^\dagger & \uparrow & & \uparrow & \Phi^\dagger_{|\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)} \\
 & \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) & \hookrightarrow & \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) & & & \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)' & \hookrightarrow & \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)' &
\end{array}$$

En effet $\Phi^\dagger_{|\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)}$ est l'application correspondant respectivement à ∂^α , M_g , T_y et D_A dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)'$ (cf. les remarques 4.4.2 à 4.7.2). □

EXERCICE 1 Caractériser $\mathcal{C}^{(\infty)}_{\text{temp}}(\mathbb{R}^n)$ comme l'ensemble des multiplicateurs de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ dans $\mathcal{C}^{(\infty)}(\mathbb{R}^n)$, i.e. comme l'ensemble des $g \in \mathcal{C}^{(\infty)}(\mathbb{R}^n)$ telles que, pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, on ait $g \cdot \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ou, plus généralement comme l'ensemble des distributions $\mu \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)'$ telles que, pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, on ait $\varphi \cdot \mu \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)'$.

Remarquer que si $g \in \mathcal{C}^{(\infty)}(\mathbb{R}^n) \smallsetminus \mathcal{C}^{(\infty)}_{\text{temp}}(\mathbb{R}^n)$ on peut construire une suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ telle que, pour un $\alpha \in \mathbb{N}^n$ et tout $k \in \mathbb{N}$, on ait

$$|x_k| + 2 \leqslant |x_{k+1}| \quad \text{et} \quad \langle x_k\rangle^{-1} \cdot |\partial^\alpha g(x_k)| \geqslant 1 \ .$$

Il suffit alors de considérer la fonction

$$\varphi := \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle x_k\rangle^{-1} \cdot \chi(\diamond - x_k) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

pour $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ bien choisi.

REMARQUE 1 La formule de Leibniz 4.5, liant ∂^α et M_g , ainsi que la proposition 4.6, sont aussi valables dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'$.

Les liaisons entre les autres applications sont les suivantes :

PROPOSITION *On a*

(i)

$$\partial^\alpha T_y = T_y \partial^\alpha \quad et \quad \partial^\alpha D_h = \frac{1}{h^{|\alpha|_1}} \cdot D_h \partial^\alpha \ .$$

(ii)

$$M_g T_y = T_y M_{g_{-y}} \quad et \quad M_g D_h = |h|^{\frac{n}{2}} \cdot D_h M_{D_{\frac{1}{h}} g} \ .$$

(iii)

$$T_y D_h = D_h T_{\frac{y}{h}} \ .$$

On démontre ces formules dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, donc aussi dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, puis dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'$ et $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)'$ par adjonction. □

EXEMPLE 1 Utilisant l'exemple 4.7, on obtient immédiatement

$$D_h \partial^\alpha \delta_y = h^{|\alpha|_1} \cdot \partial^\alpha D_h \delta_y = h^{|\alpha|_1} \cdot |h|^{\frac{n}{2}} \cdot (\partial^\alpha \delta)_{hy} \ .$$

En particulier on a $(\partial \delta_y)^\vee = -(\partial \delta)_{-y}$, ce que les physiciens écrivent sous la forme

$$\partial \delta(-t-y) = -\partial \delta(t+y) \ .$$

DEFINITION 2 Soit X un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On dit que F est un *espace de distributions* (sur X) si F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{D}(X)'$ muni d'une topologie localement convexe telle que l'injection canonique $F \hookrightarrow \mathcal{D}(X)'$ soit continue.

Etant donné $m \in \mathbb{N}$ et $c_\alpha \in \mathcal{C}^{(\infty)}(X)$ pour $\alpha \in \mathbb{N}^n$ tel que $|\alpha|_1 \leqslant m$, on dit que

$$L : \mathcal{D}(X)' \longrightarrow \mathcal{D}(X)' : \mu \longmapsto \sum_{|\alpha|_1 \leqslant m} c_\alpha \cdot \partial\!\!\!/^\alpha \mu$$

est un *opérateur différentiel à coefficients indéfiniment dérivables* . Il est dit d'ordre m s'il existe $\alpha \in \mathbb{N}^n$ tel que $|\alpha|_1 = m$ et $c_\alpha \neq 0$.

Plus généralement, si F est un espace de distributions et c_α des fonctions sur X telles que les produits $c_\alpha \cdot \partial\!\!\!/^\alpha \mu$ soient définis si $\alpha \in \mathbb{N}^n$ et $|\alpha|_1 \leqslant m$, on dit que

$$L : F \longrightarrow \mathcal{D}(X)' : \mu \longmapsto \sum_{|\alpha|_1 \leqslant m} c_\alpha \cdot \partial\!\!\!/^\alpha \mu$$

est un *opérateur différentiel* .

COROLLAIRE *Soient F et G des espaces de Fréchet de distributions et L un opérateur différentiel à coefficients indéfiniment dérivables.*

(i) Si $L(F) \subset G$, alors $L : F \longrightarrow G$ est continu.

(ii) Soit $L : F \longrightarrow G$ est une bijection, i.e. si l'équation différentielle $L\mu = \nu$ possède, pour tout $\nu \in G$, une unique solution $\mu \in F$, alors $\overset{-1}{L} : G \longrightarrow F$ est continu, i.e. cette solution dépend continûment du second membre.

Démonstration de (i) En effet $L : \mathcal{D}(X)' \longrightarrow \mathcal{D}(X)'$ est faiblement continu, donc $\operatorname{Gr} L$ est fermé dans $\mathcal{D}(X)' \times \mathcal{D}(X)'$. Mais comme l'injection canonique $F \times G \hookrightarrow \mathcal{D}(X)' \times \mathcal{D}(X)'$ est continue, le graphe de $L : F \longrightarrow G$, qui est égal à $\operatorname{Gr} L \cap F \times G$, est fermé dans $F \times G$, d'où le résultat par le théorème du graphe fermé 3.14 pour les espace de Fréchet.

Démonstration de (ii) C'est immédiat par le théorème d'isomorphie 3.14 pour les espace de Fréchet. □

REMARQUE 2 Le point (i) est évidemment généralisable à un opérateur différentiel quelconque $L : F \longrightarrow \mathcal{D}(X)'$ faiblement continu. Mais remarquons que dans beaucoup de situations la continuité d'un opérateur différentiel L est immédiate à vérifier.

EXEMPLE 2 Soit X une partie ouverte de $\mathbb{R}^n$ et $m \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Nous désignerons par $\mathcal{C}^{(m),b}\left(\overline{X}\right)$ l'espace vectoriel des fonctions m-fois continûment dérivable f sur X telles que, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$ satisfaisant à $|\alpha|_1 \leqslant m$, la dérivée partielle $\partial^\alpha f$ possède un (unique) prologement continu borné sur $\overline{X}$. Muni de la norme

$$\|f\|_\infty^{(m)} := \max_{|\alpha|_1 \leqslant m} \|\partial^\alpha f\|_\infty \ ,$$

c'est évidemment un espace de Banach si $m < \infty$. Muni des semi-normes $\|f\|_\infty^{(k)}$ pour $k \in \mathbb{N}$ si $m = \infty$, c'est un espace de Fréchet.

Si L est un opérateur différentiel à coefficients continus bornés sur X , et s'il existe un sous-espace vectoriel fermé $F \subset \mathcal{C}^{(m),b}\left(\overline{X}\right)$, défini par exemple par des conditions au bord, tel que $L : F \longrightarrow \mathcal{C}^b(X)$ soit une bijection, alors l'unique solution $f \in F$ de $Lf = g$ dépend continûment de $g \in \mathcal{C}^b(X)$.

En effet il est clair que L est continu, puisque

$$\|Lf\|_\infty \leqslant \sum_{|\alpha|_1 \leqslant m} \|c_\alpha\|_\infty \cdot \|\partial^\alpha f\|_\infty \leqslant \sum_{|\alpha|_1 \leqslant m} \|c_\alpha\|_\infty \cdot \|f\|_\infty^{(m)} \ .$$

□

Cet exemple peut être varié à l'infini, le vrai problème étant dans une situation pratique donnée de trouver les bons espaces, les bonnes normes et de prouver la bijectivité !

EXERCICE 2 Montrer que $\ln|\mathrm{id}| \in \mathcal{S}(\mathbb{R})'$ et que, pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, on a

$$\langle \varphi | \, \partial(\ln|\mathrm{id}|) \rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{R} \smallsetminus]-\varepsilon,\varepsilon[} \overline{\varphi(x)} \cdot \frac{1}{x} \, dx \ .$$

Ceci montre que

$$PP\left(\frac{1}{\mathrm{id}}\right) : \varphi \longmapsto \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{R} \smallsetminus]-\varepsilon,\varepsilon[} \overline{\varphi(x)} \cdot \frac{1}{x} \, dx$$

est une distribution tempérée sur $\mathbb{R}$, dite *partie principale de Cauchy* , et que

$$\partial(\ln|\mathrm{id}|) = PP\left(\frac{1}{\mathrm{id}}\right) \ .$$

EXERCICE 3 Soient $\mu \in \mathcal{D}(\mathbb{R})'$ et $c \in \mathbb{C}$. Montrer que μ est solution de l'équation $\mathrm{id} \cdot \mu = c$ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})'$ si, et seulement s'il existe un $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que

$$\mu = \alpha \cdot \delta + c \cdot PP\left(\frac{1}{\mathrm{id}}\right) .$$

(a) Montrer que, pour tout $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ tel que $\psi(0) = 0$, on a $\psi(x) = x \cdot \int_0^1 \psi'(xs)\, ds$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

4.9 Transformation de Fourier dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

DEFINITION 1 Soit $\mu \in \mathcal{M}^b(\mathbb{R}^n)$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^n$, on pose

$$\mathcal{F}\mu(\lambda) := \langle e_\lambda | \mu \rangle = \int e^{-2\pi i \cdot \lambda \bullet x} \, d\mu(x) \ .$$

On dit que $\mathcal{F}\mu$ est la *transformée de Fourier* de μ .

Si $f \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^n)$, alors

$$\mathcal{F}f(\lambda) := \mathcal{F}(f \cdot \lambda_{\mathbb{R}^n})(\lambda) = \int e^{-2\pi i \cdot \lambda \bullet x} \cdot f(x) \, dx \ .$$

Le lecteur est prié de ne pas confondre la variable $\lambda \in \mathbb{R}^n$ et l'intégrale de Lebesgue λ ($= \lambda_{\mathbb{R}^n}$) sur $\mathbb{R}^n$. Bien que la situation soit symétrique, il est préférable dans les applications de faire une distinction entre l'espace $\mathbb{R}^n$ des positions de variable x et l'espace $\mathbb{R}^n$ des valeurs propres (simultanées) de variable λ .

EXEMPLE 1 Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\mathcal{F}\delta_x = e^{-2\pi i \cdot \mathrm{id} \bullet x} \ .$$

En particulier $\mathcal{F}\delta = 1$.

En effet

$$\mathcal{F}\delta_x(\lambda) = \int e^{-2\pi i \cdot \lambda \bullet y} \, d\delta_x(y) = e^{-2\pi i \cdot \mathrm{id} \bullet x} \ .$$

□

REMARQUE 1 Si l'on interprète f (ou μ) comme la description d'un phénomène dépendant de la position x , la fonction

$$x \longmapsto e^{2\pi i \cdot \nu \bullet x} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$$

décrit un phénomène élémentaire (multi)périodique de (multi)fréquence ν (le physicien préfère cette lettre !). Dans la direction e_j il est périodique de *fréquence* ν_j et de *période* $T_j = \frac{1}{\nu_j}$. Dans la direction $\frac{\nu}{|\nu|}$ il est de fréquence $|\nu|$ et de période $\frac{1}{|\nu|}$.

Une onde plane monochromatique progressive se propageant dans $\mathbb{R}^n$ est décrite par la fonction

$$(t, x) \longmapsto e^{i \cdot (k \bullet x - \omega t)} \ ,$$

où k est le *vecteur d'onde* et $\omega \geqslant 0$ la *pulsation* . Cette onde restreinte à tout hyperplan orthogonal à k d'équation $k \bullet x = cst$ est un phénomène périodique de la variable t de fréquence $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$. Désignons par $\sigma = \frac{k}{2\pi}$ le *vecteur nombre d'onde* ; si v désigne la vitesse de déplacement de cette onde (dans l'espace de variable x) dans la direction $\frac{k}{|k|}$, i.e. $k \bullet \left(v \cdot t \cdot \frac{k}{|k|} \right) - \omega t = cst$, on a $v \cdot |k| = \omega$ et par suite $v \cdot |\sigma| = \nu$. Pour chaque temps t fixe, cette onde est dans la direction

$\frac{k}{|k|}$ de fréquence $|\sigma|$ et de *longueur d'onde* $\lambda = \frac{1}{|\sigma|}$. On a alors

$$\lambda = \frac{v}{\nu} \quad \text{et} \quad e^{i\cdot(k\bullet x - \omega t)} = e^{2\pi i\cdot(\sigma\bullet x - \nu t)} = e^{2\pi i|\sigma|\cdot\left(\frac{\sigma}{|\sigma|}\bullet x - vt\right)} \; .$$

Rappelons (cf. exemple 4.2.3) que $\mathbf{L}^1(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{M}^b(\mathbb{R}^n)_\beta$ est une isométrie.

DEFINITION 2 Pour toute fonction f sur $\mathbb{R}^n$, on pose

$$f^* := \overline{\overset{\vee}{f}} = \overset{\vee}{\overline{f}} \; .$$

C'est une involution, i.e. $f^{**} = f$ et $(\alpha \cdot f)^* = \overline{\alpha} \cdot f^*$ pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$.

PROPOSITION *La transformation de Fourier définit une application linéaire*

$$\mathcal{F} : \mathcal{M}^b(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{C}^b(\mathbb{R}^n)$$

continue de norme $\leqslant 1$ *, i.e.*

$$\|\mathcal{F}\mu\|_\infty \leqslant \|\mu\| \quad \textit{pour tout } \mu \in \mathcal{M}^b(\mathbb{R}^n) \; .$$

En outre

$$\mathcal{F}\mu^* = \overline{\mathcal{F}\mu}$$

et, pour tout $y \in \mathbb{R}^n$ *,* $\nu \in \mathbb{R}^n$ *et* $h \in \mathbb{R} \smallsetminus \{0\}$ *, on a*

$$\mathcal{F}T_y = M_{e_{-y}}\mathcal{F} \quad , \quad T_\nu\mathcal{F} = \mathcal{F}M_{e_\nu} \quad \textit{et} \quad \mathcal{F}D_h = D_{\frac{1}{h}}\mathcal{F} \; .$$

En particulier

$$\|\mathcal{F}f\|_\infty \leqslant \|f\|_1 \quad \textit{pour tout } f \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^n) \; .$$

D'après le théorème de continuité d'une intégrale dépendant d'un paramètre (cf. cours d'Analyse [17].15.5), il est clair que $\mathcal{F}\mu$ est une fonction continue et, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^n$, on a

$$|\mathcal{F}\mu(\lambda)| \leqslant \int \left|e^{-2\pi i\cdot\lambda\bullet x}\right| d|\mu|(x) = |\mu|(\mathbb{R}^n) = \|\mu\|$$

et évidemment

$$|\mathcal{F}f(\lambda)| \leqslant \int |f(x)|\; dx = \|f\|_1 \; .$$

D'autre part

$$\mathcal{F}\mu^*(\lambda) = \int e^{-2\pi i\cdot\lambda\bullet x}\, d\overset{\vee}{\overline{\mu}}(x) = \overline{\int e^{-2\pi i\cdot\lambda\bullet x}\, d\mu(x)} = \overline{\mathcal{F}\mu(\lambda)} \; ,$$

$$\mathcal{F}T_y\mu(\lambda) = \int e^{-2\pi i\cdot\lambda\bullet x}\, d\mu(x-y) = \int e^{-2\pi i\cdot\lambda\bullet(x+y)}\, d\mu(x) = e^{-2\pi i\cdot\lambda\bullet y} \cdot \mathcal{F}\mu(\lambda) \; ,$$

$$T_\nu\mathcal{F}\mu(\lambda) = \int e^{-2\pi i\cdot(\lambda-\nu)\bullet x}\, d\mu(x) = \int e^{-2\pi i\cdot\lambda\bullet x}e^{2\pi i\cdot\nu\bullet x}\, d\mu(x) = \mathcal{F}\left(e^{2\pi i\cdot\nu\bullet \mathrm{id}} \cdot \mu\right)(\lambda)$$

et

$$\mathcal{F}D_h\mu(\lambda) = |h|^{-\frac{n}{2}} \cdot \int e^{-2\pi i\cdot\lambda\bullet x}\, d\mu\left(\frac{x}{h}\right) = |h|^{\frac{n}{2}} \cdot \int e^{-2\pi i\cdot h\lambda\bullet x}\, d\mu(x) =$$

$$= |h|^{\frac{n}{2}} \cdot \mathcal{F}\mu(h\lambda) = D_{\frac{1}{h}}\mathcal{F}\mu(\lambda) \; ,$$

ce qui prouve les formules. $\square$

REMARQUE 2 Le *théorème de Bochner* consiste à caractériser l'image $\mathcal{F}\left(\mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^n)\right)$ par la transformation de Fourier des intégrales de Radon positives comme l'ensemble des *fonctions de type positif* , i.e. des fonctions $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ telles que pour toutes suites finies $(x_j)_{j=1,\ldots,m} \subset \mathbb{R}^n$ et $(\alpha_j)_{j=1,\ldots,m} \subset \mathbb{C}$, on ait

$$\sum_{k,l=1}^{m} \overline{\alpha_k} \cdot f(x_k - x_l) \cdot \alpha_l \geqslant 0 \; .$$

EXEMPLE 2 Pour tout $\varepsilon > 0$, la fonction $e^{-2\pi\varepsilon\cdot|\mathrm{id}|_1} \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^n)$ et

$$\mathcal{F}e^{-2\pi\varepsilon\cdot|\mathrm{id}|_1} = \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{\varepsilon\pi} \cdot \left\langle \frac{\mathrm{pr}_j}{\varepsilon} \right\rangle^{-1} \; .$$

En outre $\prod_{j=1}^n \frac{1}{\pi} \cdot \langle \mathrm{pr}_j \rangle^{-1} \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^n)$ et $\int \prod_{j=1}^n \frac{1}{\pi} \cdot \langle \mathrm{pr}_j \rangle^{-1} \, d\lambda = 1$. Elle définit donc une suite de Dirac au sens de l'exercice 4.3.3.

Par le théorème de Fubini, on a

$$\mathcal{F}e^{-2\pi\varepsilon\cdot|\mathrm{id}|_1}(\lambda) = \int e^{-2\pi i\cdot\lambda\bullet x} \cdot e^{-2\pi\varepsilon\cdot|x|_1} \, dx = \prod_{j=1}^{n} \int e^{-2\pi i\cdot\lambda_j x_j} \cdot e^{-2\pi\varepsilon\cdot|x_j|} \, dx_j =$$

$$= \prod_{j=1}^{n} \int e^{-2\pi i\cdot\lambda_j x_j} \cdot e^{-2\pi\varepsilon\cdot|x_j|} \, dx_j = \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{\varepsilon\pi} \cdot \left\langle \frac{\lambda_j}{\varepsilon} \right\rangle^{-1} \; ,$$

car en intégrant deux fois par parties on obtient

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i\cdot\lambda x} \cdot e^{-2\pi\varepsilon\cdot|x|} \, dx = 2 \cdot \int_0^{\infty} \cos(2\pi\cdot\lambda x) \cdot e^{-2\pi\varepsilon\cdot x} \, dx =$$

$$= \frac{1}{\pi\varepsilon} - \frac{2\lambda^2}{\varepsilon^2} \cdot \int_0^{\infty} \cos(2\pi\cdot\lambda x) \cdot e^{-2\pi\varepsilon\cdot x} \, dx \; ,$$

donc

$$\int e^{-2\pi i\cdot\lambda x} \cdot e^{-2\pi\varepsilon\cdot|x|} \, dx = \frac{1}{\varepsilon\pi} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\lambda^2}{\varepsilon^2}} = \frac{1}{\varepsilon\pi} \cdot \left\langle \frac{\lambda}{\varepsilon} \right\rangle^{-1} \; ,$$

d'où le résultat. $\square$

DEFINITION 3 Nous utiliserons l'*opérateur de Laplace modifié* $\not{\Delta}$ défini par

$$\not{\Delta} := \sum_{j=1}^{n} \not{\partial}_j^2 = -\frac{1}{4\pi^2} \cdot \Delta \; .$$

THEOREME *L'application $\mathcal{F}$ est un isomorphisme de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, dont l'application réciproque est donnée par*

$$\overset{-1}{\mathcal{F}}\gamma = \int e^{2\pi i\cdot\lambda\bullet\diamond} \cdot \gamma(\lambda) \, d\lambda$$

et

$$\overset{-1}{\mathcal{F}}\gamma = (\mathcal{F}\gamma)^{\vee} = \mathcal{F}\overset{\vee}{\gamma} = \overline{\mathcal{F}\overline{\gamma}}$$

pour tout $\gamma \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

En outre, pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, *on a les formules*

$$\partial\!\!\!/^{\alpha}\mathcal{F}\varphi = \mathcal{F}\left([-\mathrm{id}]^{\alpha}\cdot\varphi\right) \quad \text{et} \quad \mathcal{F}\left(\partial\!\!\!/^{\alpha}\varphi\right) = \mathrm{id}^{\alpha}\cdot\mathcal{F}\varphi \ .$$

En particulier

$$\mathcal{F}\left([1+\Delta\!\!\!/]^k\varphi\right) = \langle\mathrm{id}\rangle^k\cdot\mathcal{F}\varphi \quad \text{et} \quad [1+\Delta\!\!\!/]^k\mathcal{F}\varphi = \mathcal{F}\left(\langle\mathrm{id}\rangle^k\cdot\varphi\right) \ .$$

L'involution $\varphi \longmapsto \varphi^* : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ *est continue.*

En effet

$$\langle\varphi|\,f^*\rangle = \int \overline{\varphi(y)}\cdot\overline{f(-y)}\,dy = \overline{\int \varphi(-y)\cdot f(y)\,dy} = \overline{\langle\varphi^*|\,f\rangle}\ ,$$

Le théorème de dérivabilité d'une intégrale dépendant d'un paramètre (cf. cours d'Analyse [17] 15.5) montre immédiatement que $\mathcal{F}\varphi$ est indéfiniment dérivable et que l'on peut dériver sous le signe intégral :

$$\partial\!\!\!/^{\alpha}\mathcal{F}\varphi(\lambda) = \int \partial\!\!\!/^{\alpha}_{\lambda}e^{-2\pi i\cdot\lambda\bullet x}\cdot\varphi(x)\,dx = \int [-x]^{\alpha}\cdot e^{-2\pi i\cdot\lambda\bullet x}\cdot\varphi(x)\,dx = \mathcal{F}\left([-\mathrm{id}]^{\alpha}\cdot\varphi\right)(\lambda)\ .$$

D'autre part en utilisant le théorème de Fubini et en intégrant par partie, on obtient

$$\mathcal{F}\left(\partial\!\!\!/^{\alpha}\varphi\right)(\lambda) = \int e^{-2\pi i\cdot\lambda\bullet x}\cdot\partial\!\!\!/^{\alpha}_{x}\varphi(x)\,dx = (-1)^{\alpha}\cdot\int \partial\!\!\!/^{\alpha}_{x}e^{-2\pi i\cdot\lambda\bullet x}\cdot\varphi(x)\,dx = \lambda^{\alpha}\cdot\mathcal{F}\varphi(\lambda)\ .$$

On en déduit successivement les formules

$$\mathcal{F}(\Delta\!\!\!/\varphi) = \sum_{j=1}^{n}\mathcal{F}\left(\partial\!\!\!/_j^2\varphi\right) = \left(\sum_{j=1}^{n}\mathrm{pr}_j^2\right)\cdot\mathcal{F}\varphi = |\mathrm{id}|^2\cdot\mathcal{F}\varphi$$

et

$$\mathcal{F}\left([1+\Delta\!\!\!/]^k\varphi\right) = \mathcal{F}\left(\sum_{l=0}^{k}\tbinom{k}{l}\cdot\Delta\!\!\!/^l\varphi\right) = \sum_{l=0}^{k}\tbinom{k}{l}\cdot|\mathrm{id}|^{2l}\cdot\mathcal{F}\varphi = \langle\mathrm{id}\rangle^k\cdot\mathcal{F}\varphi\ .$$

Il vient alors

$$\langle\mathrm{id}\rangle^k\cdot\partial\!\!\!/^{\alpha}\mathcal{F}\varphi = \langle\mathrm{id}\rangle^k\cdot\mathcal{F}\left([-\mathrm{id}]^{\alpha}\cdot\varphi\right) = \mathcal{F}\left([1+\Delta\!\!\!/]^k\left([-\mathrm{id}]^{\alpha}\cdot\varphi\right)\right)\ .$$

En outre

$$\|\varphi\|_1 \leqslant \left(\int \langle\mathrm{id}\rangle^{-\lfloor\frac{n}{2}\rfloor-1}\,d\lambda\right)\cdot p_{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor+1}(\varphi)\ ,$$

donc

$$p\!\!\!/_k(\mathcal{F}\varphi) = \max_{|\alpha|_1\leqslant k}\left\|\langle\mathrm{id}\rangle^k\cdot\partial\!\!\!/^{\alpha}\mathcal{F}\varphi\right\|_{\infty} = \max_{|\alpha|_1\leqslant k}\left\|\mathcal{F}\left([1+\Delta\!\!\!/]^k\left([-\mathrm{id}]^{\alpha}\cdot\varphi\right)\right)\right\|_{\infty} \leqslant$$

$$\leqslant \max_{|\alpha|_1\leqslant k}\left\|[1+\Delta\!\!\!/]^k\left([-\mathrm{id}]^{\alpha}\cdot\varphi\right)\right\|_1 \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int \langle\mathrm{id}\rangle^{-\left[\frac{n}{2}\right]-1}\,d\lambda\right)\cdot\max_{|\alpha|_1\leqslant k}p_{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor+1}\left([1+\Delta\!\!\!/]^k\left([-\mathrm{id}]^{\alpha}\cdot\varphi\right)\right)\ .$$

Ceci montre que $\mathcal{F}\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et que $\mathcal{F}$ est continue, puisque les dérivations et la multiplication par un polynôme sont continues dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Pour la formule d'inversion, il nous suffit de prouver que, pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et $x \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\int e^{2\pi i\cdot\lambda\bullet x} \cdot \mathcal{F}\varphi(\lambda)\, d\lambda = \int e^{2\pi i\cdot\lambda\bullet x} \cdot \left(\int e^{-2\pi i\cdot\lambda\bullet y} \cdot \varphi(y)\, dy\right) d\lambda = \varphi(x) \ ,$$

car par symétrie on obtient évidemment

$$\int e^{-2\pi i\cdot\lambda\bullet x} \left(\int e^{2\pi i\cdot\nu\bullet x} \cdot \gamma(\nu)\, d\nu\right) dx = \gamma(\lambda) \quad \text{pour tout } \gamma \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \text{ et } \lambda \in \mathbb{R}^n \ .$$

Remarquons que nous avons affaire à une intégration successive, mais que l'on ne peut pas utiliser directement le théorème de Fubini ! Pour pouvoir le faire nous allons introduire un facteur de convergence, en l'occurence la fonction $e^{-2\pi\varepsilon\cdot|\mathrm{id}|_1}$ par rapport à la variable λ qui fait difficulté.

Comme $\mathcal{F}\varphi \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^n)$ et

$$e^{-2\pi\varepsilon\cdot|\mathrm{id}|_1} \leqslant 1 \quad \text{et} \quad \lim_{\varepsilon\to 0} e^{-2\pi\varepsilon\cdot|\mathrm{id}|_1} = 1 \quad \text{ponctuellement,}$$

le théorème de la convergence dominée de Lebesgue, puis le théorème de Fubini et l'exemple 2 ci-dessus montrent que

$$\int e^{2\pi i\cdot\lambda\bullet x} \cdot \left(\int e^{-2\pi i\cdot\lambda\bullet y} \cdot \varphi(y)\, dy\right) d\lambda = \lim_{\varepsilon\to 0} \int e^{-2\pi\varepsilon\cdot|\lambda|_1} \cdot \left(\int e^{2\pi i\cdot\lambda\bullet(x-y)} \cdot \varphi(y)\, dy\right) d\lambda =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \int \left(\int e^{-2\pi i\cdot(y-x)\bullet\lambda} \cdot e^{-2\pi\varepsilon\cdot|\lambda|_1}\, d\lambda\right) \cdot \varphi(y)\, dy =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \int \mathcal{F}e^{-2\pi\varepsilon\cdot|\mathrm{id}|_1}(y-x) \cdot \varphi(y)\, dy = \lim_{\varepsilon\to 0} \int \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{\varepsilon\pi} \cdot \left\langle \frac{y_j - x_j}{\varepsilon} \right\rangle^{-1} \cdot \varphi(y)\, dy =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \int \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{\varepsilon\pi} \cdot \left\langle \frac{y_j}{\varepsilon} \right\rangle^{-1} \cdot \varphi(y+x)\, dy = \varphi(x)$$

en utilisant l'exercice 4.3.3 sur les suites de Dirac.

Les formules liant $\overset{-1}{\mathcal{F}}$ à $\mathcal{F}$ étant évidentes, il est alors clair que $\mathcal{F}$ et $\overset{-1}{\mathcal{F}}$ sont continues, donc que $\mathcal{F}$ est un isomorphisme de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ sur lui-même. Finalement on a $p_k(\varphi^*) = p_k(\varphi)$, ce qui prouve la continuité de $\varphi \longmapsto \varphi^*$. $\square$

EXERCICE 1 Pour tout $a > 0$, on a

$$\mathcal{F}e^{-\pi a\cdot\mathrm{id}^2} = \sqrt{\frac{1}{a}} \cdot e^{-\frac{\pi}{a}\cdot\mathrm{id}^2} \ .$$

La démonstration est laissée en exercice. Le théorème permet d'établir une équation différentielle ordinaire, qui est satisfaite par $\mathcal{F}e^{-\pi a\cdot\mathrm{id}^2}$ et que l'on peut résoudre.

La démonstration du théorème peut aussi se faire en utilisant le facteur de convergence $e^{-\pi\cdot|\mathrm{id}|^2}$, puisque $\mathcal{F}e^{-\pi\cdot|\mathrm{id}|^2} = e^{-\pi\cdot|\mathrm{id}|^2}$ conduit aussi à une suite de Dirac.

COROLLAIRE (Lemme de Riemann-Lebesgue) *On a*

$$\mathcal{F}\left(\mathbf{L}^1(\mathbb{R}^n)\right) \subset \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^n) \ .$$

En effet $\mathcal{F}(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)) = \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^n)$, donc

$$\mathcal{F}\left(\mathbf{L}^1(\mathbb{R}^n)\right) = \mathcal{F}\left(\overline{\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)}^{\mathbf{L}^1}\right) \subset \overline{\mathcal{F}(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n))}^{\mathcal{C}^b} \subset \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^n) \ ,$$

puisque $\mathcal{F} : \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{C}^b(\mathbb{R}^n)$ est continue par la proposition et $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}^n)$ est un sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{C}^b(\mathbb{R}^n)$. $\square$

4.10 Transformation de Fourier dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'$

LEMME *Pour tout* $f \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^n)$ *et* $\mu \in \mathcal{M}^b(\mathbb{R}^n)$ *, on a*

$$\int f(\lambda) \cdot \mathcal{F}\mu(\lambda)\, d\lambda = \int \mathcal{F}f(x)\, d\mu(x) \ .$$

En particulier, on a

$$\langle \gamma | \mathcal{F}\mu \rangle = \left\langle \overset{-1}{\mathcal{F}}\gamma \middle| \mu \right\rangle \quad \textit{pour tout } \gamma \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \ .$$

En outre pour tout $f \in \mathbf{L}^1_{\mathrm{mod}}(\mathbb{R}^n)$ *et* $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ *, on a*

$$\langle \varphi | f^* \rangle = \overline{\langle \varphi^* | f \rangle} \ .$$

Grâce au théorème de Fubini on obtient

$$\int f(\lambda) \cdot \mathcal{F}\mu(\lambda)\, d\lambda = \int f(\lambda) \cdot \left(\int e^{-2\pi i \lambda \cdot x}\, d\mu(x) \right) d\lambda =$$

$$= \int \left(\int e^{-2\pi i \lambda \cdot x} \cdot f(\lambda)\, d\lambda \right) d\mu(x) = \int \mathcal{F}f(x)\, d\mu(x) \ .$$

On a alors

$$\langle \gamma | \mathcal{F}\mu \rangle = \int \overline{\gamma} \cdot \mathcal{F}\mu\, d\lambda = \int \mathcal{F}\overline{\gamma}\, d\mu = \left\langle \overline{\mathcal{F}\overline{\gamma}} \middle| \mu \right\rangle = \left\langle \overset{-1}{\mathcal{F}}\gamma \middle| \mu \right\rangle \ .$$

Finalement

$$\langle \varphi | f^* \rangle = \int \overline{\varphi(y)} \cdot \overline{f(-y)}\, dy = \overline{\int \varphi(-y) \cdot f(y)\, dy} = \overline{\langle \varphi^* | f \rangle} \ .$$

□

Puisque $\mathcal{F}$ et $\diamond^*$ sont des applications continues (théorème 4.9), ce lemme nous conduit à poser la

DEFINITION Si $\mu \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'$ est une distribution tempérée, on définit une distribution tempérée

$$|\mathcal{F}\mu\rangle := |\mu\rangle \circ \overset{-1}{\mathcal{F}} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)' \ ,$$

ce qui revient à poser

$$\langle \gamma | \mathcal{F}\mu \rangle := \left\langle \overset{-1}{\mathcal{F}}\gamma \middle| \mu \right\rangle \quad \text{pour tout } \gamma \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \ .$$

On dit que c'est la *transformée de Fourier* de μ .

De même

$$\langle \varphi | \mu^* \rangle := \overline{\langle \varphi^* | \mu \rangle} \quad \text{pour tout } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

définit une involution $\mu \longmapsto \mu^*$ sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'$.

Grâce à la remarque 3.4.5 et la définition 4.7.3 on a

$$\mu^* = \overline{\overset{\vee}{\mu}} = \overset{\vee}{\overline{\mu}} \ .$$

REMARQUE 1 Le calcul ci-dessus montre que la transformée de Fourier de μ au sens des distributions est la même que celle calculée ponctuellement. En particulier

$$\mathcal{F}(f \cdot \lambda) = \mathcal{F}f \cdot \lambda \ .$$

La définition signifie que

$$\mathcal{F} = \left(\overset{-1}{\mathcal{F}}\right)^\dagger : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)' \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)' \ .$$

Ceci prouve en particulier que $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)' \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'$ est continue.

THEOREME *La transformation de Fourier $\mathcal{F}$ est un isomorphisme de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'$ sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'$, dont l'application réciproque est donnée par*

$$\overset{-1}{\mathcal{F}}\mu = \mathcal{F}^\dagger\mu = \mathcal{F}\overset{\vee}{\mu} = (\mathcal{F}\mu)^\vee \quad \textit{pour tout } \mu \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)' \ .$$

En outre, on a les formules

$$\mathcal{F}\not{\partial}^\alpha = M_{\mathrm{id}^\alpha}\mathcal{F} \quad \textit{et} \quad \not{\partial}^\alpha\mathcal{F} = \mathcal{F}M_{[-\mathrm{id}]^\alpha} \ ,$$

donc aussi

$$\mathcal{F}[1+\not{\Delta}]^k = M_{\langle\mathrm{id}\rangle^k}\mathcal{F} \quad \textit{et} \quad [1+\not{\Delta}]^k\mathcal{F} = \mathcal{F}M_{\langle\mathrm{id}\rangle^k} \ ,$$

ainsi que

$$\mathcal{F}T_y = M_{e_{-y}}\mathcal{F} \quad , \quad T_\lambda\mathcal{F} = \mathcal{F}M_{e_\lambda} \quad \textit{et} \quad \mathcal{F}D_h = D_{\frac{1}{h}}\mathcal{F} \ ,$$

pour tout $y \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}^n$ et $h \in \mathbb{R} \smallsetminus \{0\}$ et

$$\mathcal{F}\mu^* = \overline{\mathcal{F}\mu} \ .$$

En utilisant le théorème 4.9, on a

$$\mathcal{F} \circ \overset{-1}{\mathcal{F}} = \overset{-1}{\mathcal{F}} \circ \mathcal{F} = \mathrm{Id}_{\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)} \ ,$$

donc

$$\left(\overset{-1}{\mathcal{F}}\right)^\dagger \circ \mathcal{F}^\dagger = \mathcal{F}^\dagger \circ \left(\overset{-1}{\mathcal{F}}\right)^\dagger = \mathrm{Id}_{\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'} \ ,$$

ce qui montre bien que $\mathcal{F}^\dagger$ est l'application réciproque de la transformation de Fourier dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'$. En outre, comme $\overset{-1}{\mathcal{F}} = \mathcal{F}D_{-1} = D_{-1}\mathcal{F}$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, donc $\mathcal{F} = \overset{-1}{\mathcal{F}}D_{-1} = D_{-1}\mathcal{F}$, par adjonction on obtient les premières formules. Il en est de même des suivantes, puisque les mêmes formules sont valables dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ (proposition 4.9). Quant à la dernière, on a

$$\langle\gamma|\,\mathcal{F}\mu^*\rangle = \left\langle \overset{-1}{\mathcal{F}}\gamma \middle| \mu^* \right\rangle = \overline{\left\langle \overline{\left(\overset{-1}{\mathcal{F}}\gamma\right)}^\vee \middle| \mu \right\rangle} =$$

$$= \overline{\left\langle \overset{-1}{\mathcal{F}}\overline{\gamma} \middle| \mu \right\rangle} = \overline{\langle\overline{\gamma}|\,\mathcal{F}\mu\rangle} = \langle\gamma|\,\overline{\mathcal{F}\mu}\rangle$$

pour tout $\gamma \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. □

EXEMPLE 1 Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}^n$ et $\alpha \in \mathbb{N}^n$, on a

$$\mathcal{F}(\not{\partial}^\alpha \delta_x) = \mathrm{id}^\alpha \cdot e^{-2\pi i \cdot \mathrm{id} \bullet x} \quad \text{et} \quad \mathcal{F}\left(\mathrm{id}^\alpha \cdot e^{2\pi i \cdot \lambda \bullet \mathrm{id}}\right) = (-1)^{|\alpha|_1} \cdot \not{\partial}^\alpha \delta_\lambda \ .$$

En particulier sur $\mathbb{R}$ on a

$$\mathcal{F}\delta_x = e^{-2\pi i \cdot \mathrm{id} \cdot x} \quad \text{et} \quad \mathcal{F}\left(e^{2\pi i \cdot \lambda \cdot \mathrm{id}}\right) = \delta_\lambda$$

et encore plus particulièrement

$$\mathcal{F}\delta = 1 \quad \text{et} \quad \mathcal{F}1 = \delta \ .$$

Utilisant l'exemple 4.9.1, on a

$$\mathcal{F}(\not{\partial}^\alpha \delta_x) = \mathrm{id}^\alpha \cdot \mathcal{F}\delta_x = \mathrm{id}^\alpha \cdot e^{-2\pi i \cdot \mathrm{id} \bullet x} \ ,$$

puis

$$\mathcal{F}\left(\mathrm{id}^\alpha \cdot e^{2\pi i \cdot \lambda \bullet \mathrm{id}}\right) = \mathcal{F}\mathcal{F}(\not{\partial}^\alpha \delta_{-\lambda}) = \mathcal{F}\overset{-1}{\mathcal{F}} D_{-1}(\not{\partial}^\alpha \delta_{-\lambda}) = (-1)^{|\alpha|_1} \cdot \not{\partial}^\alpha D_{-1}\delta_{-\lambda} = (-1)^{|\alpha|_1} \cdot \not{\partial}^\alpha \delta_\lambda$$

en ayant utilisé la proposition 4.8.i. □

PROPOSITION *Pour tout $\nu \in \mathcal{M}^{\mathrm{mod}}(\mathbb{R}^n)$, l'application*

$$e_\diamond : \lambda \longmapsto e_\lambda : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'$$

est continue, ν-intégrable dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'$ et

$$\int e_\lambda \, d\nu(\lambda) = \overset{-1}{\mathcal{F}}\nu \quad \textit{dans } \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)' \ .$$

Si $\nu \in \mathcal{M}^b(\mathbb{R}^n)$, alors $\int e_\lambda \, d\nu(\lambda) \in \mathcal{C}^b(\mathbb{R}^n)$ et on peut calculer ponctuellement et on retrouve la définition classique :

$$\left(\int e_\lambda \, d\nu(\lambda)\right)(x) = \int e_\lambda(x) \ d\nu(\lambda) = \mathcal{F}\nu(-x) \ .$$

En effet, pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, la fonction $\langle \varphi | e_\diamond \rangle = \overline{\mathcal{F}\varphi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est continue et ν-intégrable. En outre

$$\int \langle \varphi | e_\lambda \rangle \ d\nu(\lambda) = \int \overline{\mathcal{F}\varphi(\lambda)} \, d\nu(\lambda) = \langle \mathcal{F}\varphi | \nu \rangle = \left\langle \varphi \middle| \overset{-1}{\mathcal{F}}\nu \right\rangle \ ,$$

d'où la formule. Pour tout $g \in \mathbf{L}^\infty(\nu)$, on a $g \cdot \nu \in \mathcal{M}^{\mathrm{mod}}(\mathbb{R}^n)$, donc $e_\diamond$ est ν-intégrable dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'$.

La seconde partie est immédiate par le théorème de Fubini. On a

$$\left\langle \varphi \middle| \int e_\lambda \, d\nu(\lambda) \right\rangle = \int \left(\int \overline{\varphi(x)} \cdot e^{2\pi i \cdot \lambda \bullet x} \, dx\right) d\nu(\lambda) =$$

$$= \int \overline{\varphi(x)} \cdot \left(\int e^{2\pi i \cdot \lambda \bullet x} \, d\nu(\lambda)\right) dx = \left\langle \varphi \middle| (\mathcal{F}\nu)^\vee \right\rangle \ .$$

□

REMARQUE 2 Le calcul dans le cas général $\nu \in \mathcal{M}^{\mathrm{mod}}(\mathbb{R}^n)$ peut souvent être effectué en utilisant une suite $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de fonctions sur $\mathbb{R}^n$ telle que $f_k \cdot \nu \in \mathcal{M}^b(\mathbb{R}^n)$ et $\nu = \lim_k f_k \cdot \nu$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'$. On a alors

$$\int e_\lambda \, d\nu(\lambda) = \overset{-1}{\mathcal{F}}(\lim_k f_k \cdot \nu) = \lim_k [\mathcal{F}(f_k \cdot \nu)]^\vee \quad \text{dans } \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)' \ .$$

EXEMPLE 2 En particulier

$$\delta = \overset{-1}{\mathcal{F}}1 = \overset{-1}{\mathcal{F}}\lambda_{\mathbb{R}^n} = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i\cdot\lambda\bullet\diamond}\, d\lambda \quad \text{dans } \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)' \ .$$

Attention, cette formule semble avoir un sens dans $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$, mais l'application $e_\diamond$ n'est pas scalairement λ-intégrable dans la semi-dualité $\langle \mathcal{K}(\mathbb{R}^n) | \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)\rangle$, car il existe des fonctions $\varphi \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ telles que $\mathcal{F}\varphi$ ne soit pas λ-intégrable.

EXERCICE 1 Montrer que les applications

$$\lambda \longmapsto (e_\lambda)_y \quad \text{et} \quad \lambda \longmapsto \sin(2\pi\cdot\lambda\bullet y)\cdot e_\lambda : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'$$

sont $\lambda_{\mathbb{R}^n}$-intégrables dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'$ et que

$$\overset{-1}{\mathcal{F}} e^{-2\pi\cdot\mathrm{id}\bullet y} = \int_{\mathbb{R}^n} (e_\lambda)_y\, d\lambda = \delta_y \ ,$$

$$\overset{-1}{\mathcal{F}} \sin(2\pi\cdot\mathrm{id}\bullet y) = \int_{\mathbb{R}^n} \sin(2\pi\cdot\lambda\bullet y)\cdot e_\lambda\, d\lambda = \frac{1}{2i}\left(\delta_{-y} - \delta_y\right) \ .$$

EXERCICE 2 Montrer que l'application

$$\lambda \longmapsto \lambda^\alpha \cdot e_\lambda : \mathbb{R}^n \longmapsto \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'$$

est $\lambda_{\mathbb{R}^n}$-intégrable dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'$ et que

$$\overset{-1}{\mathcal{F}}\, \mathrm{id}^\alpha = \int_{\mathbb{R}^n} \lambda^\alpha \cdot e_\lambda\, d\lambda = \partial\!\!\!/^\alpha \delta \ .$$

EXERCICE 3 Montrer que

$$\overset{-1}{\mathcal{F}} 1_{\mathbb{R}_+} = \int_{\mathbb{R}_+} e_\lambda\, d\lambda = \frac{1}{2}\cdot\delta - \frac{1}{2\pi i}\cdot PP\left(\frac{1}{\mathrm{id}}\right)$$

et

$$\overset{-1}{\mathcal{F}} 1_{\mathbb{R}_-} = \int_{\mathbb{R}_-} e_\lambda\, d\lambda = \frac{1}{2}\cdot\delta + \frac{1}{2\pi i}\cdot PP\left(\frac{1}{\mathrm{id}}\right)$$

dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})'$ (cf. 4.8, exercices 2 et 3).

En particulier

$$\overset{-1}{\mathcal{F}}\, \mathrm{signum} = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{signum}(\lambda)\cdot e_\lambda\, d\lambda = -\frac{1}{\pi i}\cdot PP\left(\frac{1}{\mathrm{id}}\right) \ ,$$

ainsi que

$$\int_{\mathbb{R}} \cos(2\pi\cdot\lambda\cdot\mathrm{id})\, d\lambda = \frac{1}{2}\cdot\delta \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}} \sin(2\pi\cdot\lambda\cdot\mathrm{id})\, d\lambda = \frac{1}{2\pi}\cdot PP\left(\frac{1}{\mathrm{id}}\right)$$

dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})'$.

EXERCICE 4 Montrer que la condition $\nu \in \mathcal{M}^{\mathrm{mod}}(\mathbb{R}^n)$ est nécessaire pour que l'application $e_\diamond$ soit ν-intégrable dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'$.

4.11 Espaces de Sobolev

THEOREME (de Plancherel) *La transformation de Fourier $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)' \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'$ induit une application unitaire*

$$\mathcal{F} : \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n) \ .$$

Pour tout $\gamma \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, le théorème 4.9 et le lemme 4.10 montrent que

$$\left\| \overset{-1}{\mathcal{F}}\gamma \right\|_2^2 = \int \overline{\overset{-1}{\mathcal{F}}\gamma} \cdot \overset{-1}{\mathcal{F}}\gamma \, d\lambda = \int \mathcal{F}\bar{\gamma} \cdot \overset{-1}{\mathcal{F}}\gamma \, d\lambda = \int \bar{\gamma} \cdot \gamma \, d\lambda = \|\gamma\|_2^2 \ ,$$

donc que $\overset{-1}{\mathcal{F}} : (\mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_2) \longrightarrow (\mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_2)$ est une isométrie surjective. Mais en identifiant $(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_2)^\dagger_\beta = \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n)^\dagger_\beta$ avec $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n)$, l'adjointe $\left(\overset{-1}{\mathcal{F}}\right)^* : \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n)$ (cf. 3.17) est aussi une isométrie surjective, donc une application unitaire. Il suffit alors de considérer les diagrammes commutatifs suivants

$$\begin{array}{ccccc} & \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) & \hookrightarrow & (\mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_2) & \\ \overset{-1}{\mathcal{F}} & \uparrow & & \uparrow & \overset{-1}{\mathcal{F}} \\ & \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) & \hookrightarrow & (\mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_2) & \end{array}$$

et

$$\begin{array}{ccccc} & \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n) & \hookrightarrow & \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)' & \\ \left(\overset{-1}{\mathcal{F}}\right)^* & \downarrow & & \downarrow & \left(\overset{-1}{\mathcal{F}}\right)^\dagger = \mathcal{F} \\ & \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n) & \hookrightarrow & \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)' & \end{array}$$

pour pouvoir conclure : on a

$$\left(\overset{-1}{\mathcal{F}}\right)^* = \left(\overset{-1}{\mathcal{F}}\right)^\dagger_{|\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n)} = \mathcal{F}_{|\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n)} \ .$$

□

REMARQUE La première partie de la démonstration montre que

$$\mathcal{F} : (\mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_2) \longrightarrow (\mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_2)$$

est une isométrie surjective, donc qu'elle se prolonge de manière unique en une application unitaire dans $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n)$. La seconde partie de la démonstration est nécessaire pour prouver que ce prolongement est induit par la transformation de Fourier dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'$.

DEFINITION 1 Nous désignerons par $\mathbf{L}^2_{\mathrm{mod}}(\mathbb{R}^n)$ l'ensemble des fonctions $f \in \mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ telles que

$$\int \frac{|f|^2}{\langle \mathrm{id} \rangle^k} \, d\lambda < \infty$$

pour un certain $k \in \mathbb{N}$. On dit qu'elles sont à *croissance quadratique modérée* .

Rappelons que les fonctions à croissance modérées ont été définies dans l'exemple 4.3.3.

LEMME *On a*

$$\mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \mathbf{L}^2_{\mathrm{mod}}(\mathbb{R}^n) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathbf{L}^2\left(\mathbb{R}^n, \langle \mathrm{id} \rangle^{-k}\right)$$

et

$$f \cdot g \in \mathbf{L}^1_{\mathrm{mod}}(\mathbb{R}^n) \quad \textit{pour tout } f, g \in \mathbf{L}^2_{\mathrm{mod}}(\mathbb{R}^n) \ .$$

En particulier

$$\mathbf{L}^2_{\mathrm{mod}}(\mathbb{R}^n) \subset \mathbf{L}^1_{\mathrm{mod}}(\mathbb{R}^n) \ .$$

La première partie est évidente. Quant à la dernière assertion, on a

$$\int \frac{|f \cdot g|}{\langle \mathrm{id} \rangle^k} \, d\lambda \leqslant \left(\int \frac{|f|^2}{\langle \mathrm{id} \rangle^k} \, d\lambda \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int \frac{|g|^2}{\langle \mathrm{id} \rangle^k} \, d\lambda \right)^{\frac{1}{2}} < \infty$$

si k est assez grand. □

DEFINITION 2 Pour tout $s \in \mathbb{R}$, on dit que l'espace de Hilbert

$$\mathcal{H}^{(s)}(\mathbb{R}^n) := \overset{-1}{\mathcal{F}}\left(\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n, \langle \mathrm{id} \rangle^s)\right) \ ,$$

muni du produit scalaire transporté, est l'*espace de Sobolev d'ordre* s sur $\mathbb{R}^n$. La norme associée est donc

$$\|\xi\|_{2,(s)} := \|\mathcal{F}\xi\|_{s,\langle \mathrm{id} \rangle^s} \ .$$

On pose

$$\mathcal{H}^{(\infty)}(\mathbb{R}^n) := \bigcap_{s \in \mathbb{R}} \mathcal{H}^{(s)}(\mathbb{R}^n) \quad \text{et} \quad \mathcal{H}^{(-\infty)}(\mathbb{R}^n) := \bigcup_{s \in \mathbb{R}} \mathcal{H}^{(s)}(\mathbb{R}^n) \ .$$

La suite $\left(\mathcal{H}^{(s)}(\mathbb{R}^n)\right)_{s \in \mathbb{R}}$ de sous-espaces vectoriels de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'$ est évidemment croissante, on a

$$\mathcal{H}^{(0)}(\mathbb{R}^n) = \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n)$$

par le théorème de Plancherel, et

$$\mathcal{H}^{(\infty)}(\mathbb{R}^n) = \overset{-1}{\mathcal{F}}\left(\bigcap_{s \in \mathbb{R}} \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n, \langle \mathrm{id} \rangle^s) \right) \ ,$$

ainsi que

$$\mathcal{H}^{(-\infty)}(\mathbb{R}^n) = \overset{-1}{\mathcal{F}}\left(\mathbf{L}^2_{\mathrm{mod}}(\mathbb{R}^n)\right)$$

par le lemme. L'exemple 3.8.2 montre que $\mathbf{L}^2\left(\mathbb{R}^n, \langle\mathrm{id}\rangle^{-s}\right)$ est le semi-dual fort de $\mathbf{L}^2\left(\mathbb{R}^n, \langle\mathrm{id}\rangle^{s}\right)$, donc que

$$\mathcal{H}^{(s)}\left(\mathbb{R}^n\right)_\beta^\dagger = \mathcal{H}^{(-s)}\left(\mathbb{R}^n\right) \ .$$

PROPOSITION

(i) $\mathcal{D}\left(\mathbb{R}^n\right)$ *est dense dans* $\mathcal{H}^{(s)}\left(\mathbb{R}^n\right)$ *pour tout* $s \in \mathbb{R}$ *.*

(ii) Si $m \in \mathbb{N}$ *, alors* $\mathcal{H}^{(m)}\left(\mathbb{R}^n\right)$ *est l'ensemble des* $\xi \in \mathbf{L}^2\left(\mathbb{R}^n\right)$ *tels que, pour tout* $\alpha \in \mathbb{N}^n$ *satisfaisant à* $|\alpha|_1 \leqslant m$ *, la dérivée* $\partial^\alpha \xi$ *au sens des distributions appartienne à* $\mathbf{L}^2\left(\mathbb{R}^n\right)$ *, i.e.*

$$\mathcal{H}^{(m)}\left(\mathbb{R}^n\right) = \left\{\xi \in \mathbf{L}^2\left(\mathbb{R}^n\right) \,\middle|\, \partial^\alpha \xi \in \mathbf{L}^2\left(\mathbb{R}^n\right) \ \text{si} \ |\alpha|_1 \leqslant m\right\} \ .$$

En outre

$$\|\xi\|_{2,(m)}^2 = \sum_{|\alpha|_1 \leqslant m} c_\alpha \cdot \|\not\partial^\alpha\|_2^2$$

pour certaines constantes $c_\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ *.*

Démonstration de (i) Comme $\langle\mathrm{id}\rangle^s \in \mathbf{L}_{\mathrm{loc}}^1\left(\mathbb{R}^n\right)$, on a $\mathbf{L}^2\left(\mathbb{R}^n, \langle\mathrm{id}\rangle^s\right) = \mathbf{L}^2\left(\langle\mathrm{id}\rangle^s \cdot \lambda\right)$. On en déduit que $\mathcal{K}\left(\mathbb{R}^n\right)$ est dense dans $\mathbf{L}^2\left(\mathbb{R}^n, \langle\mathrm{id}\rangle^s\right)$ par le lemme 4.2, donc aussi $\mathcal{D}\left(\mathbb{R}^n\right)$ par le théorème 4.3.i, et par suite $\mathcal{S}\left(\mathbb{R}^n\right)$. Ceci montre que $\mathcal{S}\left(\mathbb{R}^n\right)$ est dense dans $\mathcal{H}^{(s)}\left(\mathbb{R}^n\right)$, donc aussi $\mathcal{D}\left(\mathbb{R}^n\right)$ par le théorème 4.3.ii.

Démonstration de (ii) Remarquons tout d'abord que pour tout $\beta \in \mathbb{N}^n$ tel que $|\beta|_1 \leqslant m$, on a $\left|\mathrm{id}^\beta\right|^2 \leqslant |\mathrm{id}|^{2|\beta|_1} \leqslant \langle\mathrm{id}\rangle^m$ et que

$$\langle\mathrm{id}\rangle^m = \sum_{l=0}^m \binom{m}{l} \cdot \left(\sum_{j=1}^n \mathrm{pr}_j^2\right)^l = \sum_{|\alpha|_1 \leqslant m} c_\alpha \cdot \mathrm{id}^{2\alpha}$$

pour certaines constantes $c_\alpha \in \mathbb{R}_+^*$; ainsi

$$\int^* \left|\mathrm{id}^\beta \cdot \mathcal{F}\xi\right|^2 \, d\lambda \leqslant \int^* |\mathcal{F}\xi|^2 \cdot \langle\mathrm{id}\rangle^m \, d\lambda = \sum_{|\alpha|_1 \leqslant m} c_\alpha \cdot \int^* \left|\mathrm{id}^\alpha \cdot \mathcal{F}\xi\right|^2 \, d\lambda \ .$$

Ceci montre que $\xi \in \mathcal{H}^{(m)}\left(\mathbb{R}^n\right)$, i.e. $\mathcal{F}\xi \in \mathbf{L}^2\left(\mathbb{R}^n, \langle\mathrm{id}\rangle^m\right)$, est équivalent à

$$\not\partial^\beta \xi = \overset{-1}{\mathcal{F}}\left(\mathrm{id}^\beta \cdot \mathcal{F}\xi\right) \in \overset{-1}{\mathcal{F}}\left(\mathbf{L}^2\left(\mathbb{R}^n\right)\right) = \mathbf{L}^2\left(\mathbb{R}^n\right)$$

pour tous ces β . Dans ce cas on obtient

$$\|\xi\|_{2,(m)}^2 = \int |\mathcal{F}\xi|^2 \cdot \langle\mathrm{id}\rangle^m \, d\lambda = \sum_{|\alpha|_1 \leqslant m} c_\alpha \cdot \int \left|\mathrm{id}^\alpha \cdot \mathcal{F}\xi\right|^2 \, d\lambda = \sum_{|\alpha|_1 \leqslant m} c_\alpha \cdot \|\not\partial^\alpha \xi\|_2^2 \ .$$

□

Cette proposition nous permet de poser la

DEFINITION 3 Soient X un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $m \in \mathbb{N}$. On dit que

$$\mathcal{H}^{(m)}(X) = \left\{\xi \in \mathbf{L}^2(X) \,\middle|\, \partial^\alpha \xi \in \mathbf{L}^2(X) \ \text{si} \ |\alpha|_1 \leqslant m\right\}$$

est l'*espace de Sobolev d'ordre* m sur X . Pour simplifier, on munit cet espace de la norme, et du produit scalaire correspondant, défini par

$$\|\xi\|_{2,(m)}^2 := \sum_{|\alpha|_1 \leqslant m} \|\partial^\alpha \xi\|_2^2 \ .$$

On vérifie facilement que c'est un espace de Hilbert et que, dans le cas $X = \mathbb{R}^n$, cette nouvelle norme est équivalente à l'ancienne.

DEFINITION 4 On désigne par $\mathcal{H}^{(m),0}(X)$ l'adhérence de $\mathcal{D}(X)$ dans $\mathcal{H}^{(m)}(X)$.

4.12 Convolution des fonctions et des distributions

THEOREME (de Young) *Soient $p, q \in [1, \infty]$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \geqslant 1$. Pour tout $f \in \mathbf{L}^p(\mathbb{R}^n)$ et $g \in \mathbf{L}^q(\mathbb{R}^n)$, la fonction $f(x - \diamond) \cdot g$ est intégrable pour presque tous les $x \in \mathbb{R}^n$,*

$$f * g := \int f(\diamond - y) \cdot g(y)\ dy \in \mathbf{L}^r(\mathbb{R}^n)$$

s'appelle le produit de convolution de f et g et, en posant $\frac{1}{r} := 1 - \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$, on a

$$\mathbf{L}^p(\mathbb{R}^n) * \mathbf{L}^q(\mathbb{R}^n) \subset \mathbf{L}^r(\mathbb{R}^n) \quad \text{et} \quad \|f * g\|_r \leqslant \|f\|_p \cdot \|g\|_q \ .$$

On a

$$f * g = g * f \ .$$

Certains cas particuliers sont importants

(i) Si $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, i.e. $r = \infty$, la fonction $f(x - \cdot) \cdot g$ est intégrable pour tous les $x \in \mathbb{R}^n$, donc $f * g$ est partout définie et

$$\mathbf{L}^p(\mathbb{R}^n) * \mathbf{L}^q(\mathbb{R}^n) \subset \mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}^n) \quad \text{et} \quad \|f * g\|_\infty \leqslant \|f\|_p \cdot \|g\|_q \ .$$

Si en plus $p, q \in \left]1, \infty\right[$, alors

$$\mathbf{L}^p(\mathbb{R}^n) * \mathbf{L}^q(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^n) \ .$$

En outre

$$\mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}^n) * \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^n) \subset \mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}^n) \quad , \quad \|f * g\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty \cdot \|g\|_1 \ ,$$

$$\mathcal{C}^{(k),b}(\mathbb{R}^n) * \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{C}^{(k),b}(\mathbb{R}^n)$$

et

$$\partial^\alpha (f * g) = (\partial^\alpha f) * g \quad \text{pour tout } f \in \mathcal{C}^{(k),b}(\mathbb{R}^n) \text{ et } g \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^n) \ .$$

(ii) Si $p = q = 1$, i.e $r = 1$, la fonction $f(x - \diamond) \cdot g$ est intégrable pour presque tous les $x \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\mathbf{L}^1(\mathbb{R}^n) * \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^n) \subset \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^n) \quad \text{et} \quad \|f * g\|_1 \leqslant \|f\|_1 \cdot \|g\|_1 \ .$$

Muni du produit de convolution $\mathbf{L}^1(\mathbb{R}^n)$ est une algèbre commutative et, pour tout $f, g \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^n)$, on a

$$\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}f \cdot \mathcal{F}g \ .$$

La démonstration se fait en plusieurs étapes. On démontre tout d'abord (i), qui correspond au cas $r = \infty$, puis (ii). Ces démonstrations sont laissées en exercice. Pour (ii) utiliser la formule du changement de variables et les théorèmes de Tonelli et Fubini. Par exemple on a

$$\mathcal{F}(f * g)(\lambda) = \int e^{-2\pi i \cdot \lambda \bullet x} \left(\int f(x - y)\, g(y)\ dy \right) dx =$$

$$= \iint e^{-2\pi i \cdot \lambda \bullet (z + y)} \cdot f(z) \cdot g(y)\ dz\, dy = \mathcal{F}f(\lambda) \cdot \mathcal{F}g(\lambda) \ .$$

Si $p = \infty$ ou $q = \infty$, on a nécessairement $r = \infty$. Nous pouvons donc supposer que $p, q, r \in [1, \infty[$. Grâce à l'inégalité de Hölder généralisée (exercice 1 ci-dessous) et (ii), pour presque tous les $x \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\left\| |f| (x - \diamond) \cdot |g| \right\|_1 = \left\| \Big(|f|^p (x - \diamond) \cdot |g|^q \Big)^{\frac{1}{r}} \cdot \Big(|f|^p (x - \diamond) \Big)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{r}} \cdot \Big(|g|^q \Big)^{\frac{1}{q} - \frac{1}{r}} \right\|_1 \leqslant$$

$$\leqslant \left\| \, |f|^p (x - \diamond) \cdot |g|^q \right\|_1^{\frac{1}{r}} \cdot \left\| \, |f|^p (x - \diamond) \right\|_1^{\frac{1}{p} - \frac{1}{r}} \cdot \left\| \, |g|^q \right\|_1^{\frac{1}{q} - \frac{1}{r}} =$$

$$= \|f\|_p^{1 - \frac{p}{r}} \cdot \|g\|_q^{1 - \frac{q}{r}} \cdot \Big(|f|^p * |g|^q (x) \Big)^{\frac{1}{r}} < \infty \ ,$$

i.e.

$$|(f * g)(x)| \leqslant \Big(|f| * |g| \Big)(x) \leqslant \|f\|_p^{1 - \frac{p}{r}} \cdot \|g\|_q^{1 - \frac{q}{r}} \cdot \Big(|f|^p * |g|^q (x) \Big)^{\frac{1}{r}} \ ,$$

puis

$$\|f * g\|_r^r = \left\| (|f| * |g|)^r \right\|_1 \leqslant \|f\|_p^{r-p} \cdot \|g\|_q^{r-q} \cdot \left\| \, |f|^p * |g|^q \right\|_1 \leqslant$$

$$\leqslant \|f\|_p^{r-p} \cdot \|g\|_q^{r-q} \cdot \left\| |f|^p \right\|_1 \cdot \left\| |g|^q \right\|_1 = \|f\|_p^r \cdot \|g\|_q^r \ .$$

□

EXERCICE 1 (Inégalité de Hölder généralisée) Soient μ une intégrale de Radon sur X et $(\alpha_j)_{j=1,\ldots,n} \subset \mathbb{R}_+$ tel que $\sum_{j=1}^n \alpha_j = 1$. Pour toute suite $(f_j)_{j=1,\ldots,n}$ de fonctions $\geqslant 0$, on a

$$\left\| \prod_{j=1}^n f_j^{\alpha_j} \right\|_1 \leqslant \prod_{j=1}^n \|f_j\|_1^{\alpha_j} \ ,$$

en ayant posé $\infty^0 = 1$.

EXERCICE 2

(a) Montrer que pour toute intégrale de Radon μ et tout $p \in [1, \infty]$, on a

$$\mathbf{L}^p(\mu) \subset \mathbf{L}^1(\mu) + \mathbf{L}^\infty(\mu) \ .$$

(b) Soient $p, q \in [1, \infty]$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \geqslant 1$ et $\frac{1}{r} := 1 - \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$. Par bilinéarité on définit des applications évidemment bilinéaires globalement continues

$$(f, g) \longmapsto f * g$$

entre les espaces suivants :

$$\left[\mathbf{L}^1(\mathbb{R}^n) + \mathbf{L}^p(\mathbb{R}^n) \right] \times \left[\mathbf{L}^1(\mathbb{R}^n) + \mathbf{L}^q(\mathbb{R}^n) \right] \longrightarrow \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^n) + \mathbf{L}^q(\mathbb{R}^n) + \mathbf{L}^p(\mathbb{R}^n) + \mathbf{L}^r(\mathbb{R}^n) \ ,$$

$$\mathbf{L}^1(\mathbb{R}^n) \times \left[\mathbf{L}^1(\mathbb{R}^n) + \mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}^n) \right] \longrightarrow \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^n) + \mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}^n) \ ,$$

$$\left[\mathbf{L}^1(\mathbb{R}^n) + \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n) \right] \times \left[\mathbf{L}^1(\mathbb{R}^n) + \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n) \right] \longrightarrow \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^n) + \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n) + \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^n)$$

et

$$\left[\mathbf{L}^1(\mathbb{R}^n) \cap \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n) \right] \times \left[\mathbf{L}^1(\mathbb{R}^n) \cap \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n) \right] \longrightarrow \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^n) \cap \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n) \ .$$

La norme des espaces en question est définie dans les exemples 2.1.7 et 2.10.6 pour la somme et la définition 2.4.2 pour l'intersection.

REMARQUE 1 Si f, g satisfont aux hypothèses du théorème de Young, la fonction

$$\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathcal{M}(\mathbb{R}^n) : y \longmapsto f(y) \cdot g_y \cdot \lambda_{\mathbb{R}^n}$$

est $\lambda_{\mathbb{R}^n}$-intégrable dans $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ et

$$\int f(y) \cdot g_y \cdot \lambda_{\mathbb{R}^n} \, dy = (f * g) \cdot \lambda_{\mathbb{R}^n} \ .$$

C'est immédiat par définition (cf. définition 3.12.3 et proposition 3.12) car si $s \in [1, \infty[$ est tel que $\frac{1}{s} + \frac{1}{r} = 1$, on a

$$\int |f(y) \cdot \langle \varphi | g_y \rangle| \, dy \leqslant \int^* |\varphi|(x) \cdot \left(\int^* |f|(y) \cdot |g|(x-y) \, dy \right) dx \leqslant \|\varphi\|_s \cdot \|f * g\|_r \ ,$$

$\varphi \longmapsto \|\varphi\|_s$ est une semi-norme continue sur $\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ et

$$\int f(y) \cdot \langle \varphi | g_y \rangle \, dy = \int \varphi(x) \cdot \left(\int f(y) \cdot g(x-y) \, dy \right) dx = \langle \varphi | f * g \cdot \lambda_{\mathbb{R}^n} \rangle \ .$$

□

REMARQUE 2 Si $f \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^n) + \mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}^n)$, alors pour tout $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, on a

$$\langle \varphi | \psi * f \rangle = \langle \psi^* * \varphi | f \rangle \ .$$

En effet les théorèmes de Tonelli et Fubini montrent que

$$\langle \varphi | \psi * f \rangle = \int \overline{\varphi(x)} \left(\int \psi(x-y) f(y) \, dy \right) dx = \int \left(\int \overline{\varphi(x)} \psi(x-y) \, dx \right) \cdot f(y) \, dy =$$

$$= \int \overline{\left(\int \overline{\psi(x-y)} \cdot \varphi(x) \, dx \right)} \cdot f(y) \, dy = \langle \psi^* * \varphi | f \rangle \ .$$

□

REMARQUE 3 Pour tout $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, on a $(\varphi * \psi)^* = \varphi^* * \psi^*$.

En effet pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a

$$(\varphi * \psi)^*(x) = \overline{\int \varphi(-x-y) \cdot \psi(y) \, dy} = \int \overline{\varphi(-x+y)} \cdot \overline{\psi(-y)} \, dy = \varphi^* * \psi^*(x) \ .$$

□

DEFINITION 1 On désigne par $\mathcal{M}^{\mathrm{rap}}(\mathbb{R}^n)$ le sous-espace vectoriel des intégrales de Radon μ sur $\mathbb{R}^n$, dites *à décroissance rapide* , telles que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la fonction $\langle \mathrm{id} \rangle^k$ soit μ-intégrable. De même soit $\mathbf{L}^1_{\mathrm{rap}}(\mathbb{R}^n)$ le sous-espace vectoriel de $\mathbf{L}^1(\mathbb{R}^n)$ formé des fonctions f telles que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on ait $\langle \mathrm{id} \rangle^k \cdot f \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^n)$ et

$$\mathcal{C}^{(k),\mathrm{decl}}(\mathbb{R}^n) := \left\{ f \in \mathcal{C}^{(k)}(\mathbb{R}^n) \mid \partial^\alpha f \in \mathbf{L}^1_{\mathrm{rap}}(\mathbb{R}^n) \text{ pour tout } \alpha \in \mathbb{N}^n \text{ tel que } |\alpha|_1 \leqslant k \right\} \ .$$

Ces remarques vont nous permettre de donner une première généralisation de la convolution en tenant compte du lemme 3.12.iii. Mais tout d'abord encore un peu de technique.

LEMME

(i) *Pour tout* $y \in \mathbb{R}^n$ *et* $k \in \mathbb{N}$ *, on a*

$$p_k\left(\psi_y\right) \leqslant 2^k \cdot \langle y\rangle^k \cdot p_k\left(\psi\right) \ .$$

(ii) *Si* $\mu \in \mathcal{M}^{\mathrm{rap}}\left(\mathbb{R}^n\right)$ *, il existe une fonction s.c.i.* $\rho \geqslant 1$ *telle que*

$$\left\|\frac{\langle\mathrm{id}\rangle^k}{\rho}\right\|_\infty < \infty \quad et \quad \int^* \rho\, d\left|\mu\right| < \infty \ .$$

(iii) *Les applications bilinéaires*

$$\mathcal{C}^{(\infty),b}\left(\mathbb{R}^n\right) \times \mathcal{S}\left(\mathbb{R}^n\right) \longrightarrow \mathcal{S}\left(\mathbb{R}^n\right) : (g,\varphi) \longmapsto g\cdot\varphi$$

et

$$\mathcal{C}^{(\infty),b}\left(\mathbb{R}^n\right) \times \mathcal{S}\left(\mathbb{R}^n\right)' \longrightarrow \mathcal{S}\left(\mathbb{R}^n\right)' : (g,\nu) \longmapsto g\cdot\nu$$

sont séparément continues.

Démonstration de (i) En effet grâce au lemme 2.1 il vient

$$p_k\left(\psi_y\right) = \max_{|\alpha|_1\leqslant k}\left\|\langle\mathrm{id}\rangle^k\cdot\partial^\alpha\psi_y\right\|_\infty = \max_{|\alpha|_1\leqslant k}\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\left|\langle x\rangle^k\cdot\partial^\alpha\psi\left(x-y\right)\right| =$$

$$= \max_{|\alpha|_1\leqslant k}\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\left|\langle x+y\rangle^k\cdot\partial^\alpha\psi\left(x\right)\right| \leqslant$$

$$\leqslant 2^k\cdot\langle y\rangle^k\cdot\max_{|\alpha|_1\leqslant k}\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\left|\langle x\rangle^k\cdot\partial^\alpha\psi\left(x\right)\right| = 2^k\cdot\langle y\rangle^k\cdot p_k\left(\psi\right) \ .$$

Démonstration de (ii) Nous pouvons supposer que μ est positive et il suffit de définir

$$\rho := \sup_k \frac{\|\mu\|\cdot\langle\mathrm{id}\rangle^k}{2^k\cdot\int\langle\mathrm{id}\rangle^k\, d\mu} \ .$$

On a évidemment $\rho \geqslant 1$ (prendre $k=0$) et

$$\left\|\frac{\langle\mathrm{id}\rangle^k}{\rho}\right\|_\infty \leqslant \frac{2^k\cdot\int\langle\mathrm{id}\rangle^k\, d\mu}{\|\mu\|} < \infty \ .$$

D'autre part

$$\int^*\rho\, d\mu = \sup_k\int\left(\max_{l=0,\ldots,k-1}\frac{\|\mu\|\cdot\langle\mathrm{id}\rangle^l}{2^l\cdot\int\langle\mathrm{id}\rangle^l\, d\mu}\right)d\mu \leqslant \sup_k\int\left(\sum_{l=0}^{k-1}\frac{\|\mu\|\cdot\langle\mathrm{id}\rangle^l}{2^l\cdot\int\langle\mathrm{id}\rangle^l\, d\mu}\right)d\mu \leqslant$$

$$\leqslant \sup_k\sum_{l=0}^{k-1}\frac{\|\mu\|}{2^l} = 2\cdot\|\mu\| < \infty \ .$$

Ceci montre en particulier que ρ est presque partout finie. Est-ce que ρ est croissante ?

Démonstration de (iii) Remarquons que $\mathcal{C}^{(\infty),b}\left(\mathbb{R}^n\right) \subset \mathcal{C}^{(\infty)}_{\mathrm{temp}}\left(\mathbb{R}^n\right)$. La démonstration est identique à celle du lemme 4.5. □

COROLLAIRE *Soient* $\mu \in \mathcal{M}^{\mathrm{rap}}\left(\mathbb{R}^n\right)$ *,* $\nu \in \mathcal{S}\left(\mathbb{R}^n\right)'$ *et* $\psi \in \mathcal{S}\left(\mathbb{R}^n\right)$ *.*

(i) *La fonction*

$$\nu_\diamond : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathcal{S}\left(\mathbb{R}^n\right)' : y \longmapsto \nu_y$$

est ν-intégrable dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'$; on dit que

$$\mu * \nu := \int \nu_y \, d\mu(y)$$

est la convolution *de μ par ν .*

(ii) La fonction

$$\psi_\diamond : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) : y \longmapsto \psi_y$$

est μ-intégrable dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et on a

$$\left(\int \psi_y \, d\mu(y)\right) \cdot \lambda_{\mathbb{R}^n} = \mu * (\psi \cdot \lambda_{\mathbb{R}^n}) \ .$$

On écrit

$$\mu * \psi := \int \psi_y \, d\mu(y)$$

et, si $f \in \mathbf{L}^1_{\mathrm{rap}}(\mu)$,

$$(f \cdot \lambda_{\mathbb{R}^n}) * \psi = f * \psi \ .$$

(iii) On a

$$\langle \varphi | \, \mu * \nu \rangle = \langle \mu^* * \varphi | \, \nu \rangle \ ,$$

$$\partial^\alpha (\mu * \nu) = \mu * \partial^\alpha \nu \quad \textit{pour tout } \alpha \in \mathbb{N}^n \ ,$$

et, si $f \in \mathcal{C}^{(k),\mathrm{decl}}(\mathbb{R}^n)$,

$$\partial^\alpha \Big((f \cdot \lambda_{\mathbb{R}^n}) * \nu \Big) = (\partial^\alpha f \cdot \lambda_{\mathbb{R}^n}) * \nu \quad \textit{pour tout } \alpha \in \mathbb{N}^n \textit{ tel que } |\alpha|_1 \leqslant k \ .$$

(iv) La fonction

$$e_{-\diamond} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathcal{C}^{(\infty),b}(\mathbb{R}^n) : y \longmapsto e_{-y}$$

est μ-intégrable dans $\mathcal{C}^{(\infty),b}(\mathbb{R}^n)$ et on a

$$\mathcal{F}\mu = \int e_{-y} \, d\mu(y) \ ,$$

ainsi que

$$\mathcal{F}(\mu * \nu) = \mathcal{F}\mu \cdot \mathcal{F}\nu \ .$$

(v) La fonction

$$\langle (\psi^*)_\diamond | \, \nu \rangle : x \longmapsto \langle (\psi^*)_x | \, \nu \rangle = \left\langle \overline{\psi}(x - \diamond) \middle| \, \nu \right\rangle$$

est tempérée, elle est égale à la distribution $\psi * \nu$ et on a

$$\partial^\alpha (\psi * \nu) = \partial^\alpha \psi * \nu = \psi * (\partial^\alpha \nu) \quad \textit{pour tout } \alpha \in \mathbb{N}^n \ .$$

En particulier si $\nu \in \mathcal{M}^{\mathrm{mod}}(\mathbb{R}^n)$, alors

$$\psi * \nu(x) = \int \psi(x - y) \, d\nu(y) \ .$$

Démonstration de (i) En effet il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $|\langle \varphi | \, \mu \rangle| \leqslant c \cdot p_k(\varphi)$ pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$; grâce au lemme (i) il vient alors

$$\int |\langle \varphi \, | \nu_y \rangle| \, d\mu(y) = \int \left| \left\langle \varphi_{-y} \right| \nu \right\rangle \right| \, d\mu(y) \leqslant c \cdot \int p_k(\varphi_{-y}) \, d\mu(y) \leqslant$$

$$\leqslant 2^k \cdot c \cdot \left(\int \langle \mathrm{id} \rangle^k \, d\mu \right) \cdot p_k(\varphi) \ ,$$

ce qui prouve l'intégrabilté (cf. définition 3.12.3 et proposition 3.12).

Démonstration de (ii) Avec les notation du lemme (ii), l'inégalité

$$p_k\left(\frac{\psi_y}{\rho(y)}\right) \leqslant 2^k \cdot p_k(\psi) \cdot \frac{\langle y \rangle^k}{\rho(y)} \leqslant 2^k \cdot p_k(\psi) \cdot \left\| \frac{\langle \mathrm{id} \rangle^{k+1}}{\rho} \right\|_\infty \cdot \langle y \rangle^{-1}$$

montre que $\frac{\psi_\diamond}{\rho}$ tend vers 0 à l'infini.

Pour tout $K \in \mathfrak{K}(\mathbb{R}^n)$, l'image $\psi_\diamond(K) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est une partie compacte de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, puisque $\psi_\diamond$ est continue (lemme 4.6 étendu à $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$), donc $\overline{\mathrm{cs}}(\psi_\diamond(K))$ est compacte par l'exercice 3.9.2.b et elle contient $\frac{\psi_\diamond}{\rho}(K)$ puisque $\rho \geqslant 1$. L'exercice 3.9.3 montre alors que $\frac{\psi_\diamond}{\rho}$ est contenue dans une partie convexe compacte de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Mais comme ρ est μ-intégrable et

$$\psi_\diamond = \rho \cdot \frac{\psi_\diamond}{\rho} \ ,$$

la remarque 3.12.5 fait à propos du théorème 3.12.i finit de prouver que $\psi_\diamond$ est μ-intégrable dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Puisque l'injection canonique $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'$ est continue, le lemme 3.12.iii montre alors que

$$\left(\int \psi_y \, d\mu(y) \right) \cdot \lambda_{\mathbb{R}^n} = \int \psi_y \cdot \lambda_{\mathbb{R}^n} \, d\mu(y) = \int (\psi \cdot \lambda_{\mathbb{R}^n})_y \, d\mu(y) = \mu * (\psi \cdot \lambda_{\mathbb{R}^n}) \ .$$

Etant donné $f \in \mathbf{L}^1_{\mathrm{rap}}(\mathbb{R}^n)$, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\Big((f \cdot \lambda_{\mathbb{R}^n}) * \psi \Big)(x) = \left\langle \delta_x \left| \int \psi_y \, d(f \cdot \lambda_{\mathbb{R}^n})(y) \right. \right\rangle =$$

$$= \int f(y) \cdot \psi(x-y) \, dy = f * \psi(x) \ ,$$

donc $(f \cdot \lambda_{\mathbb{R}^n}) * \psi = f * \psi$.

Démonstration de (iii) Pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, on a

$$\langle \varphi | \, \mu * \nu \rangle = \int \langle \varphi \, | \nu_y \rangle \, d\mu(y) = \int \left\langle \varphi_{-y} \right| \nu \rangle \, d\mu(y) = \int \left\langle \varphi_y \right| \nu \rangle \, d\overset{\vee}{\mu}(y) =$$

$$= \overline{\int \left\langle \nu \, | \varphi_y \right\rangle \, d\overline{\overset{\vee}{\mu}}(y)} = \overline{\left\langle \nu \left| \int \varphi_y \, d\mu^*(y) \right. \right\rangle} = \left\langle \int \varphi_y \, d\mu^*(y) \right| \nu \right\rangle = \langle \mu^* * \varphi | \, \nu \rangle \ .$$

et (lemme 3.12.iii)

$$\partial^\alpha (\mu * \nu) = \partial^\alpha \left(\int \nu_y \, d\mu(y) \right) = \int \partial^\alpha (\nu_y) \, d\mu(y) =$$

$$= \int (\partial^\alpha \nu)_y \, d\mu(y) = \mu * \partial^\alpha \nu \ .$$

Si $f \in \mathcal{C}^{(k),\mathrm{decl}}(\mathbb{R}^n)$ et $\alpha \in \mathbb{N}^n$ est tel que $|\alpha|_1 \leqslant k$, alors

$$\left\langle \varphi | \, \partial^\alpha \Big((f \cdot \lambda_{\mathbb{R}^n}) * \nu \Big) \right\rangle = (-1)^{|\alpha|_1} \cdot \langle (f \cdot \lambda_{\mathbb{R}^n})^* * (\partial^\alpha \varphi) | \, \nu \rangle = (-1)^{|\alpha|_1} \cdot \langle \partial^\alpha (f^*) * \varphi | \, \mu \rangle =$$

$$= \langle (\partial^\alpha f)^* * \varphi | \mu \rangle = \langle \varphi | (\partial^\alpha f) * \mu \rangle \ .$$

Démonstration de (iv) Pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$, on a $\not\partial^\alpha e_{-y} = (-1)^{|\alpha|_1} \cdot y^\alpha \cdot e_{-y}$ et un raisonnement comme dans (ii) montre que $e_{-\diamond}$ est μ-intégrable dans $\mathcal{C}^{(\infty),b}(\mathbb{R}^n)$. Comme l'injection canonique $\mathcal{C}^{(\infty),b}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'$ est continue,

$$\int e_{-y} \, d\mu(y) = \mathcal{F}\mu$$

par la proposition 4.10. Utilisant le lemme 3.12.iii et le lemme (iii) ci-dessus, on en déduit que

$$\mathcal{F}(\mu * \nu) = \mathcal{F}\left(\int \nu_y \, d\mu(y)\right) = \int \mathcal{F}\nu_y \, d\mu(y) = \int e_{-y} \cdot \mathcal{F}\nu \, d\mu(y) =$$

$$= \left(\int e_{-y} \, d\mu(y)\right) \cdot \mathcal{F}\nu = \mathcal{F}\mu \cdot \mathcal{F}\nu \ .$$

Démonstration de (v) Puisque $\psi^* * \varphi = \varphi * \psi^* = \int \varphi(y) \cdot (\psi^*)_y \, dy$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ par (ii), on obtient

$$\langle \varphi | \psi * \nu \rangle = \langle \psi^* * \varphi | \nu \rangle = \int \overline{\varphi(y)} \cdot \left\langle (\psi^*)_y \middle| \nu \right\rangle dy = \left\langle \varphi(\diamond) \middle| \langle (\psi^*)_\diamond | \nu \rangle \right\rangle \ ,$$

ce qui montre que $\psi * \nu = \langle (\psi^*)_\diamond | \nu \rangle$. Il nous reste à prouver que $\langle (\psi^*)_\diamond | \nu \rangle \in \mathcal{C}^{(\infty)}_{\text{temp}}(\mathbb{R}^n)$. Mais la remarque 4.8.1 nous permet, pour tout $y \in \mathbb{R}^n$ et $j = 1, \ldots, n$, de calculer

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \cdot \left[\left\langle (\psi^*)_{y + h \cdot e_j} \middle| \nu \right\rangle - \left\langle (\psi^*)_y \middle| \nu \right\rangle \right] = \left\langle \partial_j (\psi^*)_y \middle| \nu \right\rangle = -\left\langle (\psi^*)_y \middle| \partial_j \nu \right\rangle \ .$$

On a donc $\langle (\psi^*)_\diamond | \nu \rangle \in \mathcal{C}^{(\infty)}(\mathbb{R}^n)$ par récurrence et

$$\partial^\alpha \langle (\psi^*)_\diamond | \nu \rangle = (-1)^{|\alpha|_1} \cdot \langle (\psi^*)_\diamond | \partial^\alpha \nu \rangle \ .$$

D'autre part, il existe par la continuité de $\partial^\alpha \nu$ sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ un $m \in \mathbb{N}$ tel que, en utilisant le lemme (i), on ait

$$\left| \left\langle (\psi^*)_y \middle| \partial^\alpha \nu \right\rangle \right| \leqslant p_m\left((\psi^*)_y\right) \leqslant 2^m \cdot \langle y \rangle^m \cdot p_m(\psi^*)$$

et par suite

$$\left\| \langle \diamond \rangle^{-m} \cdot \partial^\alpha \langle (\psi^*)_\diamond | \nu \rangle \right\|_\infty \leqslant 2^m \cdot p_m(\psi^*) < \infty \ .$$

La dernière formule est évidente, puisque

$$\psi * \nu(x) = \langle (\psi^*)_x | \nu \rangle = \int \overline{(\psi^*)_x(y)} \, d\nu(y) = \int \psi(x - y) \, d\nu(y) \ .$$

□

REMARQUE 4 Dans la démonstration ci-dessus (ii) nous avons utilisé la commutativité de la convolution dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ pour montrer que $\psi^* * \varphi = \int (\psi^*)_y \cdot \varphi(y) \, dy$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Ce résultat se généralise au cas d'un groupe localement compact non-commutatif non-nécessairement unimodulaire en introduisant l'intégrale de Haar à droite ! Il serait également nécessaire de définir $\nu * \mu$.

REMARQUE 5 Nous aurions pu définir $\mu * \nu$ par la première formule de (iii) en remarquant que l'on peut définir directement $\mu * \varphi$ par

$$\mu * \varphi(x) = \int \varphi(x - y)\ d\mu(y) \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^n ,$$

en vérifiant que $\mu * \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, puis en montrant que

$$\mu * \diamond : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) : \varphi \longmapsto \mu * \varphi$$

est continue.

En effet pour tout $k \in \mathbb{N}$, grâce au lemme 2.1 il vient

$$p_k(\mu * \varphi) = \max_{|\alpha|_1 \leqslant k} \left\| \langle \mathrm{id} \rangle^k \cdot \partial^\alpha(\mu * \varphi) \right\|_\infty = \max_{|\alpha|_1 \leqslant k} \left\| \langle \mathrm{id} \rangle^k \cdot \int \partial^\alpha \varphi(\mathrm{id} - y)\ d\mu(y) \right\|_\infty \leqslant$$

$$\leqslant 2^k \cdot \max_{|\alpha|_1 \leqslant k} \left\| \int \langle \mathrm{id} - y \rangle^k \cdot \partial^\alpha \varphi(\mathrm{id} - y) \cdot \langle y \rangle^k\ d\mu(y) \right\|_\infty \leqslant$$

$$\leqslant 2^k \cdot \max_{|\alpha|_1 \leqslant k} \left\| \langle \mathrm{id} \rangle^k \cdot f \right\|_\infty \cdot \left\| \langle \mathrm{id} \rangle^{k + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1} \cdot \partial^\alpha \varphi \right\|_\infty \cdot \left(\int \langle y \rangle^{-\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}\ dy \right) \leqslant$$

$$\leqslant 2^k \cdot \left\| \langle \mathrm{id} \rangle^k \cdot f \right\|_\infty \cdot \left(\int \langle y \rangle^{-\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}\ dy \right) \cdot p_{k + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1}(\varphi) .$$

□

Ces inégalités montrent également que le produit de convolution

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) : (\varphi, \psi) \longmapsto \varphi * \psi$$

est une application bilinéaire (globalement) continue.

REMARQUE 6 La démonstration de (iv) peut aussi se faire sans utiliser (ii), mais en exprimant le produit de convolution $\psi^* * \varphi$ comme une limite de sommes de Riemann dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Il me semble toutefois plus naturel d'introduire l'intégration vectorielle.

Nous pouvons maintenant donner une seconde généralisation de la convolution :

DEFINITION 2 On dit qu'une distribution $\rho \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'$ est à *décroissance rapide* si, pour tout $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, on a $\psi * \rho \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. On désigne par $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'_{\mathrm{rap}}$ l'ensemble de ces distributions. Pour tout $\nu \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'$, on définit alors le produit de *convolution* de μ et ν par

$$\langle \psi | \rho * \nu \rangle := \langle (\psi^* * \rho)^* | \nu \rangle .$$

COROLLAIRE *Soient $\rho \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'_{\mathrm{rap}}$ et $\nu \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'$.*

(i) On a $\rho^* \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'_{\mathrm{rap}}$, $\rho * \nu \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'$ et

$$\operatorname{supp} \rho * \nu \subset \overline{\operatorname{supp} \rho + \operatorname{supp} \nu} .$$

(ii) On a $\mathcal{M}^{\mathrm{rap}}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'_{\mathrm{rap}}$.

(iii) La transformation de Fourier $\mathcal{F}$ est une bijection de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'_{\mathrm{rap}}$ sur $\mathcal{C}^{(\infty)}_{\mathrm{temp}}(\mathbb{R}^n)$ telle que

$$\mathcal{F}(\rho * \nu) = \mathcal{F}\rho \cdot \mathcal{F}\nu .$$

Démonstration de (i) Pour tout $\gamma \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, on a

$$\langle \gamma | \psi * \rho^* \rangle = \overline{\langle (\psi^* * \gamma)^* | \rho \rangle} = \overline{\langle \gamma^* * \psi | \rho \rangle} = \overline{\langle \psi * \gamma^* | \rho \rangle} = \langle \gamma | (\psi^* * \rho)^* \rangle \ ,$$

donc $\psi * \rho^* = (\psi^* * \rho)^* \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, ce qui montre que $\rho^* \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'_{\mathrm{rap}}$.

L'application $\psi \longmapsto \psi * \rho : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est continue par le théorème du graphe fermé 3.14, car si $(\psi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(\psi_k * \rho)_{k\in\mathbb{N}}$ tendent respectivement vers ψ et $\widetilde{\psi}$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, pour tout $y \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\widetilde{\psi}(y) = \lim_k \psi_k * \rho(y) = \lim_k \left\langle (\psi_k^*)_y \middle| \rho \right\rangle = \left\langle (\psi^*)_y \middle| \rho \right\rangle = \psi * \rho(y) \ ,$$

donc $\widetilde{\psi} = \psi * \rho$. On en déduit évidemment que $\rho * \nu \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'$. La formule sur les supports est laissée en exercice.

Démonstration de (ii) Cette assertion est aussi laissée en exercice.

Démonstration de (iii) Comme $\mathcal{F}$ est une bijection de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et que, pour tout $\gamma \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, on a $\gamma \cdot \mathcal{F}\rho = \mathcal{F}\left(\overset{-1}{\mathcal{F}}\gamma * \rho\right) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ grâce au corollaire (iv), l'exercice 4.8.1 montre que $\mathcal{F}\rho \in \mathcal{C}^{(\infty)}_{\mathrm{temp}}(\mathbb{R}^n)$. Réciproquement, si $g \in \mathcal{C}^{(\infty)}_{\mathrm{temp}}(\mathbb{R}^n)$, pour tout $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, on a $\psi * \overset{-1}{\mathcal{F}} g = \overset{-1}{\mathcal{F}}(\mathcal{F}\psi \cdot g) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, donc $\overset{-1}{\mathcal{F}} g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'_{\mathrm{rap}}$. On a alors

$$\langle \gamma | \mathcal{F}(\mu * \nu) \rangle = \left\langle \overset{-1}{\mathcal{F}}\gamma \middle| \mu * \nu \right\rangle = \left\langle \overset{-1}{\mathcal{F}}\gamma * \mu^* \middle| \nu \right\rangle = \left\langle \overset{-1}{\mathcal{F}}(\gamma \cdot \mathcal{F}\mu^*) \middle| \nu \right\rangle =$$

$$= \langle \gamma \cdot \mathcal{F}\mu^* | \mathcal{F}\nu \rangle = \left\langle \gamma \middle| \overline{\mathcal{F}\mu^*} \cdot \mathcal{F}\nu \right\rangle = \langle \gamma | \mathcal{F}\mu \cdot \mathcal{F}\nu \rangle \ .$$

□

EXEMPLE On peut montrer que toute *distribution* μ *à support compact* , i.e. $\mu \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)'$, est à décroissance rapide. On a donc

$$\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)' \hookrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'_{\mathrm{rap}} \ ,$$

et la fonction tempérée $\mathcal{F}\mu$ est donnée par

$$\mathcal{F}\mu(\diamond) = \left\langle \chi \cdot e^{2\pi i \cdot \mathrm{id} \bullet \diamond} \middle| \mu \right\rangle$$

pour tout $\chi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ telle que $\chi \cdot \mu = \mu$.

En particulier, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\delta_x * \nu = \nu_x \ .$$

EXERCICE 3 On dit que

$$H : \mathbf{L}^2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbf{L}^2(\mathbb{R}) : \xi \longmapsto -\pi i \cdot \overset{-1}{\mathcal{F}}(\mathrm{signum} \cdot \mathcal{F}\xi)$$

est la *transformation de Hilbert* .

(a) Montrer que, pour tout $\xi \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R})$, l'application $y \longmapsto \xi(y) \cdot PP\left(\frac{1}{\mathrm{id}}\right)_y$ est $\lambda_{\mathbb{R}}$-intégrable dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})'$ et que

$$H\xi = \int \xi(y) \cdot PP\left(\frac{1}{\mathrm{id}}\right)_y dy =: \xi * PP\left(\frac{1}{\mathrm{id}}\right) \ .$$

Calculer $H\varphi$ ponctuellement pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, puis $\left(H_{|\mathcal{S}(\mathbb{R})}\right)^{\dagger} : \mathbf{L}^2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R})'$ de deux manières différentes.

(b) Montrer que, pour tout $\xi \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R})$, on a

$$H\xi = \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{\{|\mathrm{id}-y| \geqslant \varepsilon\}} \frac{\xi(y)}{\mathrm{id}-y}\, dy = \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{\{|y| \geqslant \varepsilon\}} \frac{\xi(\mathrm{id}-y)}{y}\, dy \quad \text{dans } \mathbf{L}^2(\mathbb{R}) \ .$$

(c) Montrer que, pour tout $f \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R})$ tel que $\mathcal{F}f \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R})$, on a

$$Hf = \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{\{|\mathrm{id}-y| \geqslant \varepsilon\}} \frac{\xi(y)}{\mathrm{id}-y}\, dy = \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{\{|y| \geqslant \varepsilon\}} \frac{\xi(\mathrm{id}-y)}{y}\, dy \quad \text{ponctuellement} \ .$$

(d) Montrer que pour tout $\varphi, \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on a

$$\langle \varphi | H\psi \rangle = \lim_{\varepsilon \to 0+} \iint_{|x-y| \geqslant \varepsilon} \frac{\overline{\varphi(x)} \cdot \psi(y)}{x-y}\, dxdy \ .$$

REMARQUE 7 La transformation de Hilbert est donc définie par le noyau

$$\varkappa \in \mathcal{D}(\mathbb{R} \times \mathbb{R})' \smallsetminus \mathcal{M}(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$$

tel que

$$H : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \hookrightarrow \mathcal{K}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}(\mathbb{R}) \hookrightarrow \mathcal{D}(\mathbb{R})' : \psi \longmapsto H\psi$$

soit donné par

$$\langle \varphi | H\psi \rangle = \langle \varphi \otimes \psi | \varkappa \rangle = \lim_{\varepsilon \to 0+} \iint_{|x-y| \geqslant \varepsilon} \frac{\overline{\varphi(x)} \cdot \psi(y)}{x-y}\, dxdy \ .$$