

Fachbereich Mathematik und Informatik
Philipps-Universität Marburg



ANALYSE FONCTIONNELLE

Claude Portenier

Semestre d'hiver 2003/2004
et
semestre d'été 2004

TABLE DES MATIÈRES

TABLE DES MATIÈRES	iii
INDEX	xi
BIBLIOGRAPHIE	xiii
1 ESPACES DE HILBERT	1
1.1 Formes sesquilinéaires et produits scalaires	2
1.2 Espaces préhilbertiens et espaces de Hilbert	7
1.3 Formules de polarisation	10
1.4 Théorème de la projection	12
1.5 Théorème de représentation de Riesz	17
1.6 Les théorèmes de Stampacchia et Lax-Milgram	20
1.7 Les espaces de Sobolev sur un intervalle	23
1.8 Problèmes aux limites sur un intervalle	31
1.9 Sommes hilbertiennes	35
1.10 Bases hilbertiennes	38
1.11 Le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt	41

TABLE DES MATIÈRES

1.12	Polynômes orthogonaux	43
1.13	Caractérisation des polynômes classiques orthogonaux	47
	Polynômes de Jacobi	54
	Polynômes de Laguerre	56
	Polynômes d’Hermite	58
	Polynômes de Jacobi spéciaux	59
1.14	Les équations différentielles associées aux polynômes classiques	63
	L’équation différentielle de Jacobi	65
	L’équation différentielle de Laguerre	66
	L’équation différentielle d’Hermite	69
	Les polynômes classiques exceptionnels	70
1.15	Les bases hilbertiennes de polynômes classiques	76
	Les fonctions génératrices	77
1.16	La notion d’espace-test	80
2	ESPACES LOCALEMENT CONVEXES	85
2.1	Semi-normes	86
2.2	Espaces polynormés	91
2.3	Espaces localement convexes	96
2.4	Produit de deux espaces localement convexes	100
2.5	Convergence	103
2.6	Sommabilité	106
2.7	Espaces de dimension finie	109
2.8	Espaces quotients et sous-espaces	111
2.9	Théorème de Riesz	113
2.10	Espaces localement convexes finals	114
2.11	Espaces de Fréchet	119
2.12	Le théorème de Baire	123

2.13	Espaces tonnelés	125
2.14	Produit tensoriel topologique inductif	126
2.15	Produit tensoriel d'espaces de Hilbert	132
3	SEMI-DUALITÉ	135
3.1	Espaces d'applications linéaires	136
3.2	Espaces normés d'applications linéaires	140
3.3	Opérateurs à noyaux dans \mathcal{C}^b	142
3.4	Dualité et semi-dualité	145
3.5	Applications linéaires de rang fini	156
3.6	Théorème de Hahn-Banach	160
3.7	Continuité faible et adjonction	165
3.8	Dualité dans les espaces normés	169
3.9	Dualité de Fenchel	173
3.10	Polarité et orthogonalité	180
3.11	La topologie de Mackey	186
3.12	Intégration vectorielle faible	189
3.13	Formes sesquilinéaires, applications linéaires et produits tensoriels	197
3.14	Les théorèmes du graphe fermé et d'isomorphie	202
3.15	Quelques applications du théorème du graphe fermé	207
3.16	La topologie forte	210
	Les topologies de la convergence uniforme	212
3.17	Les opérateurs dans un espace de Hilbert	213
3.18	Les opérateurs intégraux de Hilbert-Schmidt	217
3.19	Les opérateurs intégraux faiblement singuliers	220
3.20	Les opérateurs intégraux généraux	223
3.21	La matrice d'un opérateur	225
3.22	Le formalisme de Dirac	228

4	ESPACES DE DISTRIBUTIONS	231
4.1	Une manière d'interpréter la notion de dualité	232
	Exemple physique	232
	Exemple économique	233
4.2	Les intégrales de Radon comme fonctions généralisées	235
4.3	Les distributions	239
4.4	Dérivation	246
4.5	Multiplication	251
4.6	Translation	254
4.7	Dilatation	257
4.8	Opérations et leurs liaisons dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)'$ et $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'$	262
4.9	Transformation de Fourier dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$	266
4.10	Transformation de Fourier dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'$	272
4.11	Espaces de Sobolev	276
4.12	Convolution des fonctions et des distributions	280
5	SOUS-ESPACES HILBERTIENS	291
5.1	Le noyau d'un sous-espace-hilbertien	292
5.2	Exemples élémentaires de sous-espaces hilbertiens	295
5.3	Caractérisation d'un sous-espace hilbertien	297
5.4	Image d'un sous-espace hilbertien	299
5.5	Transitivité	304
5.6	Dilatation d'un sous-espace hilbertien	305
5.7	Somme de deux sous-espaces hilbertiens	306
5.8	Structure d'ordre sur les sous-espaces hilbertiens	308
5.9	Intersection de deux sous-espaces hilbertiens	309
5.10	Somme directe de deux sous-espaces hilbertiens	310
5.11	Théorème de Schwartz	311

5.12	Champs de carré intégrable	314
5.13	Intégration d'une famille de sous-espaces hilbertiens	321
5.14	Décomposition d'un sous-espace hilbertien	324
5.15	Espaces de Hilbert à noyaux reproduisants	329
5.16	Sous-espaces fermés de $\mathbf{L}^2(\sigma)$ à noyaux reproduisants	333
5.17	Les semi-dualités bien plongées	337
	La semi-dualité $\langle \mathcal{H}_+ \mathcal{H}_- \rangle$	341
	La semi-dualité $\langle \mathcal{H} \cap G_+ \mathcal{H} + G_- \rangle$	342
5.18	Les semi-dualités plongées	345
6	ALGÈBRES DE BANACH ET SPECTRES	347
6.1	Algèbres normées	348
6.2	Inversibilité dans une algèbre de Banach	350
6.3	Le spectre dans une algèbre de Banach unifère	353
6.4	Transformation de Gelfand	356
6.5	Théorème de Gelfand-Neumark	360
6.6	Le spectre dans une sous-algèbre stellaire	362
6.7	Calcul fonctionnel continu	364
6.8	Éléments positifs dans une algèbre stellaire	369
6.9	Cas d'un élément normal non-borné	371
7	OPÉRATEURS NON-BORNÉS	375
7.1	Opérateurs fermés	376
7.2	Opérateurs fermables	378
7.3	Opérateurs et sous-espaces hilbertiens	380
7.4	L'adjoint d'un opérateur	385
	La semi-dualité $\langle \mathcal{D}(G) \mathcal{H} + \mathcal{G} \rangle$	390
7.5	Opérations sur les opérateurs non-bornés	392
7.6	Opérateurs formellement normaux	396

TABLE DES MATIÈRES

7.7	Opérateurs normaux	398
7.8	L'algèbre stellaire associée à un opérateur fermé	401
7.9	Opérateurs différentiels	404
7.10	Le spectre d'un opérateur (non-nécessairement borné) dans un espace de Banach	412
7.11	Liaison entre les spectres d'un opérateur et de son adjoint	415
8	DÉCOMPOSITIONS SPECTRALES	417
8.1	Les opérateurs de multiplications	418
8.2	Les opérateurs de Toeplitz associés à une décomposition	422
8.3	Les décompositions non-dégénérées et directes	426
8.4	Décompositions unidimensionnelles	429
8.5	Calcul fonctionnel mesurable	434
8.6	Le théorème spectral	438
8.7	Equations d'évolution	441
8.8	La décomposition de Fourier	445
8.9	Equation de Schrödinger	453
APPENDICE 1	TOPOLOGIE	459
1.1	Ensembles ouverts et fermés	460
1.2	Continuité	462
1.3	Convergence	463
1.4	Espaces topologiques séparés	465
1.5	Parties et espaces compacts	466
APPENDICE 2	LES POLYNOMES ORTHOGONAUX CLASSIQUES	469
2.1	Relations de récurrence	470
2.2	Polynômes orthogonaux classiques	471
2.3	Polynômes de Jacobi spéciaux	473
2.4	Fonctions génératrices	475

TABLE DES MATIÈRES

2.5	Polynômes de Jacobi	476
2.6	Polynômes de Laguerre	477
2.7	Polynômes de Hermite	478
2.8	Polynômes de Legendre	481
2.9	Polynômes de Tchebycheff	484
2.10	Polynômes de Gegenbauer ou ultrasphériques	487

INDEX

Version du 30 octobre 2004

- $1_{a,b}$: fonction caractéristique signée, 23
- A^\perp : ensemble orthogonal, 180
- A° : ensemble polaire, 180
- A^\perp : ensemble orthogonal, 12
- A^a : ensemble polaire absolu, 180
- $\mathcal{AC}(J)$: fonctions absolument continues, 24
- $\mathcal{AC}^{(m)}(J)$: fonctions absolument continues d'ordre m , 26
- $B_P(\varphi, r_P)$: boule fermée, 91
- $\binom{z}{k}$: coefficient binomial, 48
- $\langle \cdot | \cdot \rangle$: vecteur bra, forme linéaire, 145
- $\langle \cdot | \cdot \rangle$: "bracket" de semi-dualité, 17
- $\text{co}(A)$: enveloppe convexe de A , 177
- $\text{cs}(A)$: enveloppe convexe absolument symétrique de A , 177
- co_f : ensemble dual de f , 176
- $\mathcal{C}(X)$: espace des fonctions continues, 97
- $\mathcal{C}^{(\infty)}(X)$: espace des fonctions indéfiniment dérivables, 97
- $\mathcal{C}^{(m),b}(\overline{X})$: espace des fonctions k -fois dérivables dont toutes les dérivées sont continues bornées sur \overline{X} , 264
- $\mathcal{C}^b(X)$, $\mathcal{C}^0(X)$: espace des fonctions continues bornées, resp. tendant vers 0 à l'infini, 93
- $\mathcal{C}_{\text{temp}}^{(\infty)}(\mathbb{R}^n)$: espace des fonctions indéfiniment dérivables tempérées, 262
- \vee : symétrie centrale, 260
- D_A : transformation d'une distribution par $A \in \text{GL}(\mathbb{R}^n)$, 258
- $D_P(\varphi, r_P)$: boule ouverte, 91
- D_h : dilatation d'une distribution, 260
- Δ : opérateur de Laplace modifié, 268
- $\langle F, G \rangle$: dualité, 145
- $\langle F | F' \rangle$: semi-dualité associée à une involution, 147
- $\langle F | G \rangle$: semi-dualité, 145
- $\langle \cdot, \cdot \rangle_F$: forme bilinéaire de dualité, 145
- $\langle \cdot | \cdot \rangle_{F^\dagger}$: forme sesquilinéaire de semi-dualité, 145
- $\langle \cdot | \cdot \rangle_F$: forme sesquilinéaire de semi-dualité, 145
- $\mathcal{D}(X)$: espace des fonctions indéfiniment dérivables à support compact, 116
- $\mathcal{D}(X)'$: espace des distributions, 239
- $\mathcal{H} = \int \widehat{\mathcal{H}} d\sigma$: décomposition d'un sous-espace hilbertien, 324
- $\mathcal{H} = \int^\oplus \widehat{\mathcal{H}} d\sigma$: décomposition directe d'un sous-espace hilbertien, 427
- $\mathcal{E}(X) := \mathcal{C}^{(\infty)}(X)$, 97
- F/H : espace vectoriel quotient, 111
- F^* , F' , F^\otimes , F^\dagger , 138
- F_β^\dagger : semi-dual fort, 169
- F_β^\dagger : semi-dual fort d'un espace normé, 140
- F_σ : espace localement convexe muni de la topologie faible, 146
- $(F_\beta^\dagger)^\dagger$: bidual d'un espace normé, 169
- \mathcal{F} : transformation de Fourier, 266, 272
- ${}_1F_1(a; b; z)$: fonction hypergéométrique confluyente de Kummer, 66
- f° : conjuguée ou transformée de Legendre-Fenchel de f , 174
- f^∞ : fonction prolongée par ∞ hors du domaine de définition de f , 89
- f_h : fonctionnelle positivement homogène associée à f , 173
- $F(a, b; c; z)$, ${}_2F_1(a, b, c; z)$: fonction hypergéométrique ou de Gauß, 65
- $G_k^{(\gamma)}$: polynômes de Gegenbauer, 61
- $G_k^{(p,q)}$: polynômes hypergéométriques, 66
- H_k : polynômes d'Hermite, 47
- $\text{Hilb}(F^\dagger)$: conoïde des sous-espaces hilbertiens de F^\dagger , 292
- $\mathcal{H}^{(m)}(J)$: espace de Sobolev d'ordre m , 26
- $\mathcal{H}^{(m)}(X)$: espace de Sobolev d'ordre $m \in \mathbb{N}$ sur un ouvert de \mathbb{R}^n , 279
- $\mathcal{H}^{(s)}(X)$: espace de Sobolev d'ordre $s \in \mathbb{R}$ sur \mathbb{R}^n , 277
- $\mathcal{H}_0^{(1)}(J)$: espace de Sobolev, 30

- h_k : fonctions d’Hermite, 70
- $\bigwedge_{j \in J} q_j$: infimum sous-linéaire, 89
- $\langle \text{id} \rangle := 1 + |\text{id}|^2$, 87
- \diamond : involution, 147
- \square : sous-espace vectoriel fermé, 9
- $J_\nu(s)$: fonctions de Bessel ou cylindriques, 69
- $J_k^{(\alpha, \beta)}$: polynômes de Jacobi, 47
- j_A : jauge de Minkowsky de A , 180
- $\mathbb{K}^{(X)}$: espace des fonctions à support fini, 116
- $\mathcal{K}(X)$: espace des fonctions continues à support compact, 115
- $\mathcal{K}^{(1)}(J)$: espace des fonctions continûment dérivables à support compact, 31
- $|\cdot\rangle$: vecteur ket, forme semi-linéaire sur un espace préhilbertien, 17
- $|\cdot\rangle$: vecteur ket, forme semi-linéaire, 17, 145
- $L(F, G)$, $\mathcal{L}(F, G)$: espaces d’applications linéaires, 12, 136
- $L_k^{(\alpha)}$: polynômes de Laguerre, 47
- $\ell^p(X) := \mathbf{L}^p(\#)$, 92
- $\lim_{\mathfrak{K}(J) \ni K \rightarrow \infty}$, \lim_K , 106
- $\mathbf{L}^2(\mu, \rho)$: espace des fonctions de carré intégrable par rapport à la densité ρ , 8
- $\mathbf{L}^2(\sigma, \widehat{\mathcal{H}})$: espace de Hilbert des champs de carré intégrable, 317
- $\mathbf{L}^p(\mu)$: espace des fonctions de puissance p -ième intégrable, 93
- $\mathbf{L}_{\text{mod}}^1(\mathbb{R}^n)$: espaces des fonctions à croissance modérée, 243
- $\mathbf{L}_{\text{mod}}^2(\mathbb{R}^n)$: espace des fonctions à croissance quadratique modérée, 277
- $\mathbf{L}_{\text{rap}}^1(\mathbb{R}^n)$: espace des fonctions à décroissance rapide, 282
- $\mathbf{L}_{\text{len}}^1(\mathbb{R}^n)$: espace des fonctions à croissance lente, 243
- $\Lambda^2(\sigma, \widehat{\mathcal{H}})$: espace de Banach des champs de carré intégrable, 314
- $\mathcal{C}^{(k), \text{decl}}(\mathbb{R}^n)$: espace des fonctions k -fois continûment dérivables déclinantes, 282
- $\mathcal{L}_b(F, G)$: espace des opérateurs bornés, 140
- $\lim(F_j, T_j)$: espace localement convexe $\xrightarrow{\quad}$ final, 114
- $M(a, b; z)$: fonction hypergéométrique confluyente de Kummer, 66
- M_α : opérateur de multiplication, 419
- $M_{\kappa, \mu}$: fonction de Whittaker, 67
- M_g : multiplication d’une distribution par une fonction indéfiniment dérivable, 251
- $\mathcal{M}(X)$: espace des intégrales de Radon, 152
- $\mathcal{M}^{\text{mod}}(\mathbb{R}^n)$: espace des intégrales de Radon à croissance modérée, 243
- $\mathcal{M}^{\text{rap}}(\mathbb{R}^n)$: espace des intégrales de Radon à décroissance rapide, 282
- $\mathcal{M}_+^p(X)$: ensemble des intégrales de Radon dont tous les moments sont finis, 43
- $\|\cdot\|$: norme d’un opérateur, 12, 140
- $\|\cdot\|$: norme d’une forme (semi-) linéaire, 17, 140
- $\|\cdot\|$: norme d’une forme sesquilinéaire, 17
- $\|\cdot\|_{2, \mu, \rho}$: norme de $\mathbf{L}^2(\mu, \rho)$, 8
- $\|\cdot\|_{2, \mu}$: norme de $\mathbf{L}^2(\mu)$, 5
- $\|\cdot\|_{p, q}$: norme d’une application linéaire, 136
- $\|\cdot\|_p$: norme d’une forme (semi-) linéaire, 146
- \perp : relation d’orthogonalité, 12
- $(\cdot|\cdot)_\mu$: produit scalaire de $\mathbf{L}^2(\mu)$, 5
- $P_{\mathcal{G}}\xi$: projection de ξ sur \mathcal{G} , 13
- P_k : polynômes de Legendre , 59
- $(z)_k$: symbole de Pochhammer, 48
- $[p]$: semi-norme quotient, 111
- \mathcal{P} : espace des polynômes, 43
- $\max P$, $\sup P$: semi-normes, 87
- $p \times_s q$: semi-norme produit, 87
- $p_{K, k}$, $q_{K, \alpha}$: semi-normes sur $\mathcal{C}^{(\infty)}(X)$, 87, 97
- p_k , q_k : semi-normes sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, 87, 97
- \boxplus : somme directe orthogonale ou hilbertienne, 15, 37
- $\text{supp } \mu$: support d’une intégrale, 8
- sl_A , sn_A : fonctionnelles duale de A , 176
- $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$: espace de Schwartz, 88, 97
- $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'$: espace des distributions tempérées, 242

INDEX

- $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)'_{\text{rap}}$: espace des distributions à décroissance rapide, 287
 $\sigma(F, G)$: topologie faible associée à $\langle F|G \rangle$, 146
 $\bigoplus_{j \in J}^{top}$: somme directe topologique, 117
 T^* : adjoint d'un opérateur dans un espace de Hilbert, 213
 T^\dagger : application adjointe, 165
 T_k, U_k : polynômes de Tchebycheff, 59
 T_y : translation d'une distribution, 254
 $\bowtie, \triangleleft, \otimes$: applications tensorielles canoniques, 127
 $\langle F|\cdot|_i G \rangle$: produit tensoriel topologique inductif semi-linéaire à gauche, 127
 $\langle \varphi|\cdot|\gamma \rangle$: tenseur élémentaire semi-linéaire à gauche, 127
 $\mathfrak{T}_F, \mathfrak{T}_P$: topologie d'un espace localement convexe, 96
 $\tau(F, G)$: topologie de Mackey, 186
 $\varphi \otimes \gamma$: tenseur élémentaire, 127
 $|F\rangle_\pi \langle G|$: produit tensoriel topologique inductif semi-linéaire à droite, 131
 $|F\rangle_i \langle G|$: produit tensoriel topologique inductif semi-linéaire à droite, 127
 $|\gamma\rangle \langle \mu|$: application linéaire de rang 1, 157
 $|\varphi\rangle \langle \gamma|$: tenseur élémentaire semi-linéaire à droite, 127
 $W_{\kappa, \mu}$: fonction de Whittaker, 67
 Z_α : opérateur de Toeplitz dans une décomposition, 422
 Z_α : opérateur de multiplication dans une décomposition directe, 434
- absolu
 ensemble polaire —, 180
 fonction localement —ment continue, 24
 fonctionnelle —ment homogène, 3, 86
 partie —ment symétrique, 177
 série —ment convergente, 104
 valeur —e d'une intégrale de Radon, 152
- adjoignable
 opérateur —, 396
- adjoint
 admettre une —e, 165
 application —e, 165
 formel, opérateur —, 385
- algèbre
 involutive, 360
 normée, de Banach, unifère, 348
 stellaire, 360
 stellaire d'un opérateur, 402
- algébrique
 application adjointe —, 165
 dual, semi-dual —, 138
- analytique
 fonction —, 353
- annihilation
 opérateur d'—, 70
- application
 adjointe (algébrique, formelle), 165
 canonique
 d'un espace quotient, 111
 du produit tensoriel, 127
 de Parseval, 299
 linéaire adjoignable, 396
 linéaire bornée, 12
 linéaire, bilinéaire, sesquilinéaire, 2
 sesquilinéaire bornée, 17
- auto-adjoint
 application linéaire, opérateur essentiellement —, 398
 application linéaire, opérateur formellement —, 396
 élément — d'une algèbre involutive, 360
 formellement —, 247
- Baire
 théorème de —, 123
- Banach
 algèbre de —, 348
 théorème de —-Steinhaus, 138, 141
 théorème de Hahn- —, 163
- base
 canonique de $\mathbb{K}^{(X)}$, 116
 hilbertienne, 38
- Bergman
 noyau de —, 335
- Bernstein
 polynômes de —, 45
- Bessel
 équation différentielle de —, 69
 inégalité de —, 35, 38
- bidual, 169

- bilinéaire, 2
- binomial
 - coefficient — généralisé, 48
- biorthogonal, 148
- Bochner
 - théorème de —, 268
- borné
 - application linéaire —e, 12
 - application sesquilinéaire —e, 17
 - intégrale de Radon —e, 238
 - opérateur —, 140, 377
 - partie —e, 137
 - topologie de la convergence —e, 140
- boule
 - fermée, ouverte, 91
- bra
 - vecteur —, 126, 146
- calcul
 - fonctionnel continu, 364, 365
 - fonctionnel mesurable, 439
 - fonctionnel mesurable borné, 428
- canonique
 - application —
 - d'un espace quotient, 111
 - du produit tensoriel, 127
 - base — de $\mathbb{K}^{(X)}$, 116
- Cantor
 - ensemble de —, 237
- caractère, 356
 - hermitien, 361
- caractéristique
 - fonction — signée, 23
- Cauchy
 - critère de —, 104, 107
 - suite de —, 104
- chaleur
 - équation de la —, 442
- champ, 314
- classique
 - solution —, 31
 - solution semi- —, 31
- coefficient
 - binomial généralisé, 48
- coercitif
 - forme sesquilinéaire —ve, 20
- commençante
 - section —, 5
- compact
 - distribution à support —, 288
 - topologie de la convergence —e (de toutes les dérivées), 97
- compatible
 - avec une semi-dualité, 151
- complet
 - séquentiellement, semi- —, 104
- complété, 169
- complexe
 - intégrale de Radon —, 152
- confluente
 - équation différentielle, série hypergéométrique —, 66
- conjugué
 - fonction —e, 175
 - intégrale de Radon —e, 153
- continu
 - fonction localement absolument —e, 24
 - spectre —, 412
- convergence
 - topologie de la — compacte de toutes les dérivées, 97
 - topologie de la — bornée, 140
 - topologie de la — simple, compacte, 97
- convergent
 - série (absolument, normalement) —e, 104
- convexe, 173
 - espace localement —, 96
 - uniformément —, 15
- convolution
 - d'une intégrale de Radon à décroissance rapide et d'une distribution tempérée, 284
 - de deux fonctions, 280
- création
 - opérateur de —, 70
- critère
 - de Cauchy, de Weierstraß, 104, 107
- croissance
 - fonction à — lente, 243
 - fonction à — quadratique modérée, 277
 - intégrale, fonction à — modérée, 243
- cylindrique
 - fonction —, 69

INDEX

- déclinante
 - fonction —, 88
- décomposition
 - d'un sous-espace-hilbertien, 324
 - d'un vecteur, 325
 - directe, 427
 - hilbertienne, 36
 - non-dégénérée, 426
- décroissance
 - distribution à — rapide, 287
 - fonction à — rapide, 88
 - intégrale de Radon à — rapide, 282
- dénombrable
 - espace localement convexe de type —, 41
- dense
 - séquentiellement —, 104
- dérivée
 - d'une distribution, 246
- diagonalisable
 - opérateur —, 438
- diagonalisation
 - d'un opérateur, 438
- différentiel
 - opérateur —, 404
- dilaté
 - fonction —e, 258
 - fonction, distribution —e, 260
- Dirac
 - distribution de —, 242
 - fonction de —, 248
 - formalisme de —, 126
 - suite de —, 245
- direct
 - produit —, 100
 - somme —e (externe), 116
- directe
 - décomposition —, 427
- Dirichlet
 - opérateur de —, 408
- distribution, 239
 - à décroissance rapide, 287
 - à support compact, 288
 - de Dirac, 242
 - dérivée partielle d'une —, 246
 - dilatée, 260
 - espace de —s, 263
 - produit d'une fonction et d'une distribution, 251
 - symétrique, 260
 - tempérée, 242
 - translatée, 255
- domaine
 - d'un opérateur, 376
 - essentiel d'un opérateur, 378
- dual
 - algébrique, topologique, faible, 138
 - bi—, 169
 - ensemble —, 176
 - fonctionnelle —e, 176
 - fort, 17, 140
- dualité, 145
 - formules de —, 339
- Dunford
 - théorème de Gelfand- —, 194
- égalité
 - de Parseval, 35, 38
 - du parallélogramme, 10
- élémentaire
 - solution —, 411
 - tenseur —, 127
- ensemble
 - dual, 176
 - orthogonal, 12
 - polaire, polaire absolu, orthogonal, 180
- entière
 - série —, 353
- énumération
 - d'un ensemble, 5
- équation
 - d'évolution, 441
 - de la chaleur, 442
 - de Schrödinger, 454
 - intégrale de Volterra, 352
- équation différentielle
 - d'Hermite, 69
 - de Bessel, 69
 - de Jacobi, 65
 - de Laguerre, 66
 - de type hypergéométrique, 49
 - de Whittaker, 67
 - hypergéométrique confluyente, 66
- équicontinu
 - partie —e, 212
- équivalent
 - espaces polynormés —s, 96

- espace
 - s polynormés équivalents, 96
 - de distributions, 263
 - de Fréchet, 119
 - de Schwartz, 88, 97
 - localement convexe, 96
 - final, 114
 - intersection, 102
 - quotient, 111
 - tonnelé, 125
 - polynormé, 91
 - préhilbertien, de Hilbert, 7
 - semi-normé, normé, 86
- essentiel
 - application linéaire, opérateur —
 - lement auto-adjoint, normal, 398
 - domaine — d'un opérateur, 378
- évaluation
 - forme linéaire d'—, 86
- évolution
 - équation d'—, 441
- faible
 - intégrale —, 189
 - solution —, 31
 - topologie —, 146
 - topologie, dual, semi-dual —, 138
- Fenchel
 - théorème de —, 234
 - transformation de Legendre- —, 175
- fermable
 - application linéaire —, 381
 - opérateur —, 378
- fermé
 - boule —e, 91
 - opérateur —, 376
- fermeture
 - d'un opérateur, 378
 - d'une application linéaire, 381
- final
 - espace localement convexe —, 114
- fini
 - application linéaire de rang —, 156
- fonction
 - -noyau, 329
 - s d'Hermite, 70
 - s de Whittaker, 67
 - à croissance modérée, lente, 243
 - à décroissance rapide, déclinante, 88
 - analytique, 353
 - caractéristique signée, 23
 - conjuguée, 175
 - de Bessel, 69
 - de Dirac, 248
 - de Heaviside, 238
 - de type positif, 268, 330
 - dilatée, 258
 - généralisée, 236, 239
 - localement absolument continue, 24
 - symétrique, 260
 - translatée, 254
- fonctionnel
 - calcul — continu, 364, 365
 - calcul — mesurable, 439
 - calcul — mesurable borné, 428
- fonctionnelle
 - duale, 176
 - sous-linéaire, positivement homogène, sous-additive, absolument homogène, séparante, 86
- formalisme
 - de Dirac, 126
- forme
 - bilinéaire, sesquilinéaire, 2
 - sous-linéaire, 86
- formel
 - application adjointe —le, 165
 - application linéaire, opérateur —
 - lement auto-adjoint, normal, 396
- formule
 - s de dualité, 339
 - s de polarisation, 10
 - de Leibniz, 252
 - de Rodrigues, 48
- fort
 - dual —, 140
 - semi-dual —, 17
 - topologie —e, 210
- Fourier
 - transformée de — d'une distribution tempérée, 272
 - transformée de — d'une mesure bornée, 266
- Fréchet
 - espace de —, 119
- Fredholm
 - opérateur de —, 142

INDEX

- Gauß
 - série (hypergéométrique) de —, 65
- Gegenbauer
 - polynômes de —, 61
- Gelfand
 - théorème de —, 356
 - théorème de — -Dunford, 194
 - théorème de — -Mazur, 355
 - transformée de —, 358
 - triple de —, 380
- Gram-Schmidt
 - procédé d'orthogonalisation de —, 41
- graphe
 - norme en —, 376
 - sur—, 173
 - théorème du — fermé, 202
- Green
 - noyau de —, 410
 - opérateur de —, 408
- Hahn
 - théorème de — -Banach, 163
- harmonique
 - oscillateur —, 70
- Hausdorff
 - intégrale de —, 237
- Heaviside
 - fonction de —, 238
- Hermite
 - équation différentielle, fonctions d^n —, 69
 - polynômes de —, 47, 58
- hermitien
 - caractère —, 361
 - forme sesquilinéaire —ne, 2
 - noyau —, 293
- Hilbert
 - espace de —, 7
 - transformation de —, 288
- hilbertien
 - base —ne, 38
 - décomposition, somme —ne, 36
 - sous-espace —, 292
 - décomposition d'un —, 324
 - sous-espace — pivot, 340
- Hölder
 - inégalité de — abstraite, 17, 146
 - inégalité de — généralisée, 281
- homogène
 - fonctionnelle positivement, absolument —, 3, 86
 - problème aux limites —s, 31
- hypergéométrique
 - équation différentielle de type —, 49
 - série —, 65
 - équation différentielle, série — confluyente, 66
 - polynômes —s, 66
- idéal
 - maximal, 356
- imaginaire
 - partie — d'une intégrale de Radon, 153
- impulsion
 - opérateur d^n —, 405
- inductif
 - produit tensoriel topologique —, 127
- inégalité
 - de Bessel, 35, 38
 - de Hölder abstraite, 17, 146
 - de Hölder généralisée, 281
 - de Poincaré, 30
 - de Sobolev, 27
- inhomogène
 - problème aux limites —s, 33
- intégréable
 - (au sens de Pettis), 191
 - scalairement —, 189
- intégral
 - opérateur —, 142
- intégrale
 - de Radon à croissance modérée, 242
 - de Radon bornée, 238
 - de Radon pivot, 236
 - de Radon positive, réelle, complexe, conjuguée, 152
 - faible, 189
 - spectrale, 364, 365
- intégration
 - par parties, 25, 27
- intersection
 - de deux espaces localement convexes, 102
- inverse
 - d'un opérateur, 392
- inversible
 - opérateur —, 392, 412

- involutif
 - algèbre —ve, 360
- involution, 147, 360
- isométrie, 109
- isomorphe, 109
- isomorphie
 - théorème d'—, 202
- Jacobi
 - équation différentielle de —, 65
 - polynômes de —, 47, 54
- jauge
 - de Minkowsky, 180
- ket
 - vecteur —, 17, 126, 146
- Krein
 - théorème de —, 193
- Kummer
 - série (hypergéométrique confluente) de —, 66
- Laguerre
 - équation différentielle de —, 66
 - polynômes de —, 47, 56
- Laplace
 - opérateur de — modifié, 268
- Lax-Milgram
 - théorème de —, 21
- Lebesgue
 - lemme de Riemann- —, 270
- Legendre
 - polynômes de —, 59
 - transformation de — -Fenchel, 175
- Leibniz
 - formule de —, 252
- lent
 - fonction à croissance —e, 243
- linéaire
 - application (semi-)—, 2
 - rétraction, 154
- local
 - fonction —ment absolument continue, 24
- localement
 - espace — convexe, 96
- Mackey
 - topologie, semi-norme de —, 186
- majoration
 - théorème de la — uniforme, 137, 140
- maximal
 - idéal —, 356
- Mazur
 - théorème de Gelfand- —, 355
- mesurable
 - scalairement —, 189
- Minkowsky
 - jauge de —, 180
- modéré
 - fonction à croissance quadratique —e, 277
 - intégrale de Radon, fonction à croissance —e, 243
- moment, 43
- moyenne
 - propriété de —, 333
- négligeable
 - scalairement —, 189
- Neumann
 - opérateur de —, 408
 - série de —, 350
- nilpotent, 350
 - quasi- —, 351
- non-borné
 - opérateur, 377
- non-dégénéré
 - décomposition —e, 426
 - forme sesquilinéaire —e, 2
- normable, 97
- normal
 - application linéaire, opérateur essentiellement —, 398
 - application linéaire, opérateur formellement —, 397
 - élément — d'une algèbre involutive, 360
 - série —ement convergente, 104
- norme, 3, 86
 - en graphe, 376
 - semi- —, 3
 - semi- — de Mackey, 186
- normé
 - algèbre —e, 348
- noyau, 142, 158, 293
 - d'un sous-espace hilbertien, 292
 - de Bergman, 335
 - de Green, 410

- fonction- —, 329
- hermitien, hermitien positif, 293
- opérateur à —, 142
- reproduisant, 329, 330
- opérateur
 - adjoint (formel), 385
 - borné, 140
 - borné, non-borné, 377
 - de création et d'annihilation, 70
 - de Dirichlet, de Green, de Neumann, 408
 - de Laplace modifié, 268
 - de position, d'impulsion, 405
 - de Schrödinger, 405
 - de Toeplitz, 422
 - diagonalisable, 438
 - différentiel, 263, 404
 - fermable, 378
 - fermé, 376
 - formellement auto-adjoint, symétrique, 397
 - intégral de Volterra, 351
 - intégral, à noyau, de Fredholm, 142
 - invertible, 392, 412
 - somme, produit, inverse, 392
- Orlicz
 - principe d'—, 161
- orthogonal
 - éléments —aux, 12
 - ensemble —, 12, 180
 - procédé d'—isation de Gram-Schmidt, 41
 - projection —e, 15
 - système de polynômes —aux, 44
- orthonormé
 - système —, 38
 - système de polynômes —s, 44
- orthoprojecteur, 15
- oscillateur
 - harmonique, 70
- ouvert
 - boule, partie —e, 91
- parallélogramme
 - égalité, 10
- Parseval
 - décomposition de —, 325
 - égalité de —, 35, 38
 - représentant, application de —, 299
- partie
 - réelle, imaginaire d'une intégrale de Radon, 153
- Pettis
 - intégrable au sens de —, 191
- pivot
 - intégral de Radon —, 236
 - intégrale —, 81
 - sous-espace hilbertien —, 340
- Plancherel
 - théorème de —, 276
- plongé, plongeable
 - semi-dualité bien —e, —, 339
- Pochhammer
 - symbole de —, 48
- poids
 - sous-multiplicatif, 88
- Poincaré
 - inégalité de —, 30
- polaire
 - ensemble — (absolu), 180
- polarisation
 - formules de —, 10
- polynômes
 - d'Hermite, 58
 - de Bernstein, 45
 - de Gegenbauer, 61
 - de Jacobi, 54
 - de Jacobi, Laguerre, Hermite, 47
 - de Laguerre, 56
 - de Legendre, 59
 - de Tchebycheff, 59
 - hypergéométriques, 66
 - système de —, 44
- polynormé
 - espace —, 91
- pontuel
 - spectre —, 412
- positif
 - élément — d'une algèbre stellaire, 364
 - fonction de type —, 268, 330
 - forme sesquilinéaire —ve, 2
 - forme sesquilinéaire strictement —ve, 20
 - intégrale de Radon —ve, 152
 - matrice —ve, 5
 - noyau hermitien —, 293
 - opérateur —, 398
- position

- opérateur de —, 405
- positivement
 - fonctionnelle — homogène, 3, 86
- préhilbertien
 - espace —, 7
- principe
 - d'Orlicz, 161
- problème
 - aux limites homogènes, 31
 - aux limites inhomogènes, 33
 - de régularité, 242
 - des moments, 43
- produit
 - (direct), 100
 - d'une fonction et d'une distribution, 251
 - de convolution de deux fonctions, 280
 - de deux opérateurs, 392
 - scalaire, 2
 - tensoriel (topologique inductif), 127
 - tensoriel (topologique projectif), 131
- projectif
 - produit tensoriel topologique —, 131
- projection
 - orthogonale, 15
 - théorème de la —, 13
- prolongement
 - d'un opérateur, 378
- propre
 - valeur, vecteur —, 412
- propriété
 - (*GDF*), 194
 - de moyenne, 333
 - de reproduction, 330
- Pythagore
 - théorème de —, 12
- quasi-nilpotent, 351
- quotient
 - espace localement convexe —, 111
- rang
 - application linéaire de — fini, 156
- rapide
 - distribution à décroissance —, 287
 - fonction à décroissance —, 88
 - intégrale de Radon à décroissance —, 282
- rayon
 - spectral, 351
- réel
 - intégrale de Radon —le, 152
 - partie —le d'une intégrale de Radon, 153
- réflexif, 169
- règle
 - de substitution, 25
- régularité
 - problème de —, 242
- représentant
 - de Parseval, 299
- reproduction
 - propriété de —, 330
- reproduisant
 - noyau —, 329, 330
- résiduel, 412
- résolvante, 354
- rétraction
 - linéaire, 154
- Riemann
 - lemme de — -Lebesgue, 270
- Riesz
 - théorème de —, 113
 - théorème de représentation de —, 18
- Rodrigues
 - formule de —, 48
- saturé, 95
- scalairement
 - intégrable, négligeable, mesurable, 189
- Schrödinger
 - équation de —, 454
 - opérateur de —, 405
- Schwartz
 - espace de —, 88, 97
 - théorème de —, 311
- section
 - commençante, 5
- semi
 - norme, 3
 - solution — -classique, 31
- semi-
 - complet, 104
 - dual
 - algébrique, topologique, faible, 138
 - fort, 17
 - dualité, 145
 - linéaire, 2

INDEX

- normable, 97
- norme, 86
 - de Mackey, 186
- séparable
 - espace localement convexe —, 41
- séparant
 - (semi-)dualité —e, 146
 - fonctionnelle —e, 3, 86
- séparé
 - fonctions à variables —es, 130
 - noyau à variables —es, 158
- séquentiellement
 - complet, 104
 - dense, 104
- série
 - de Neumann, 350
 - entière, 353
 - hypergéométrique confluyente ou de Kummer, 66
 - hypergéométrique ou de Gauß, 65
- sesquilinéaire
 - application — à gauche, à droite, 2
 - forme — strictement positive, coercitive, 20
- signé
 - fonction caractéristique —, 23
- simple
 - partie —ment bornée, 137
 - topologie de la convergence —, 97
- Sobolev
 - espace de —, 26
 - espace de — d'ordre entier, 279
 - espace de — d'ordre quelconque, 277
 - inégalité de —, 27
- solution
 - classique, faible, 31
 - élémentaire, 411
- somme
 - d'une série, 104
 - de deux opérateurs, 392
 - de deux sous-espaces hilbertiens, 306
 - directe (externe), 116
 - hilbertienne, 36
- sous-additive
 - fonctionnelle —, 3, 86
- sous-algèbre
 - stellaire, 362
- sous-espace
 - hilbertien, 292
 - décomposition d'un —, 324
- sous-linéaire
 - fonctionnelle —, 86
- sous-multiplicatif
 - poids —, 88
- spectral
 - intégrale —, 364, 365
 - rayon —, 351
 - valeur —e, 354, 412
- spectre
 - d'un élément, 354
 - d'un opérateur, 412
 - d'une algèbre, 356
 - ponctuel, continu, résiduel, 412
- Stampacchia
 - théorème de —, 20
- Steinhaus
 - théorème de Banach- —, 138, 141
- stellaire
 - algèbre —, 360
 - algèbre — d'un opérateur, 402
 - sous-algèbre —, 362
- Stone
 - théorème de —, 456
 - théorème de — -Weierstraß, 40
- strict
 - forme sesquilinéaire —ement positive, 20
 - matrice —ement positive, 5
- substitution
 - règle de —, 25
- suite
 - de Cauchy, 104
 - de Dirac, 245
- support
 - d'une intégrale de Radon, 8
- surgraphe, 173
- symbole
 - de Pochhammer, 48
- symétrique
 - fonction, distribution, 260
 - opérateur —, 397
 - partie absolument —, 177
- système
 - de polynômes, 44
 - orthonormé, 38
- Tchebycheff
 - polynômes de —, 59

- tempéré
 - distribution —e, 242
 - fonction —e, 262
- tenseur, 127
- tensoriel
 - produit — (topologique inductif), 127
 - produit — (topologique projectif), 131
- test
 - espace —, 81
- théorème
 - de Baire, 123
 - de Banach-Steinhaus, 138, 141
 - de Bochner, 268
 - de Fenchel, 234
 - de Gelfand, 356
 - de Gelfand-Dunford, 194
 - de Gelfand-Mazur, 355
 - de Hahn-Banach, 163
 - de Krein, 193
 - de la majoration uniforme, 137, 140
 - de la projection, 13
 - de Lax-Milgram, 21
 - de Plancherel, 276
 - de Pythagore, 12
 - de représentation de Riesz, 18
 - de Riesz, 113
 - de Schwartz, 311
 - de Stampacchia, 20
 - de Stone, 456
 - de Stone-Weierstraß, 40
 - de Weierstraß, 46
 - de Wiener, 357
 - de Young, 280
 - du graphe fermé, d'isomorphie, 202
 - formule de Leibniz, 252
 - intégration par parties, 25, 27
 - lemme de Riemann-Lebesgue, 270
 - règle de substitution, 25
- Toeplitz
 - opérateur de —, 422
- tonnelé
 - espace localement convexe —, 125
- topologie
 - associée, définie par \mathcal{P} , 91
 - compatible avec une semi-dualité, 151
 - de la convergence bornée, 140
 - de la convergence compacte de toutes les dérivées, 97
 - de la convergence simple, compacte, 97
 - de Mackey, 186
 - faible, 138, 146
 - forte, 210
 - topologique
 - dual, semi-dual —, 138
 - total, 184
 - transformation
 - de Hilbert, 288
 - de Legendre-Fenchel, 175
 - translaté
 - distribution —e, 255
 - fonction —e, 254
 - triple
 - de Gelfand, 380
 - type
 - espace localement convexe de — dénombrable, 41
 - ultrasphérique
 - polynômes —s, 61
 - unifère
 - algèbre —, 348
 - uniforme
 - ément convexe, 15
 - théorème de la majoration —, 137, 140
 - universel
 - problème —
 - pour les applications bilinéaires, 126
 - propriété —le
 - pour la topologie localement convexe finale, 114
 - valeur
 - absolue d'une intégrale de Radon, 152
 - propre, 412
 - spectrale, 354, 412
 - variable
 - fonctions à —s séparées, 130
 - noyau à —s séparées, 158
 - vecteur
 - bra, ket, 126, 146
 - ket, 17
 - propre, 412
 - Volterra
 - équation intégrale de —, 352
 - opérateur intégral de —, 351
 - Weierstraß
 - critère de —, 104, 107

INDEX

- théorème de —, 46
- théorème de Stone- —, 40
- Whittaker
 - équation différentielle, fonctions de —, 67
- Wiener
 - théorème de —, 357
- Young
 - théorème de —, 280

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Hans Wilhelm Alt, *Lineare Funktionalanalysis*, Springer, 1992.
- [2] Jean Pierre Aubin, *Analyse fonctionnelle appliquée*, Tomes 1 et 2, Presses Universitaires de France, 1987
- [3] Nicolas Bourbaki, *Espaces vectoriels topologiques*, Chap. 1 à 5, Masson, 1981.
- [4] Haïm Brezis, *Analyse fonctionnelle, théorie et applications*, Masson, Paris, 1983.
- [5] Claude Cohen-Tannoudji, Bernard Diu, Franck Laloë, *Mécanique quantique I*, Hermann, Paris, 1973.
- [6] Jean Dieudonné, *Eléments d'Analyse, vol. 1*, Gauthier-Villars, Paris, 1969.
- [7] Jean Dieudonné, *Eléments d'Analyse, vol. 2*, Gauthier-Villars, Paris, 1968.
- [8] A. Dvoretzky and C.A. Rogers, *Absolute and unconditional convergence in normed linear spaces*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 36 (1950), p. 192-197.
- [9] P.A. Fillmore and J.P. Williams, *On operator ranges*, Advances in Math. 7 (1971), p. 254-281.
- [10] Jürgen Heine, *Topologie und Funktionalanalysis*, Oldenbourg, 2002.
- [11] Harro Heuser, *Funktionalanalysis*, Teubner, Stuttgart, 1986.
- [12] Friedrich Hirzebruch und Winfried Scharlau, *Einführung in die Funktionalanalysis*, BI-Hochschultaschenbücher, Band 296, Mannheim, 1971.
- [13] O. Lehto, *Some remarks on the kernel functions in Hilbert space*, Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser. A 1 (1950), p. 144.
- [14] Herbert Meschkowski, *Hilbertsche Räume mit Kernfunktion*, Springer, Berlin, 1962.
- [15] Xavier Mary, Denis De Brucq, Stephane Canu, *Sous-dualités et noyaux (reproduisants) associés*, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I, 336 (2003), p. 949-954
- [16] Yves Meyer, *Ondelettes et opérateurs II : Opérateurs de Calderón-Zygmund*, Hermann, 1990.
- [17] Claude Portenier, *Cours d'Analyse*, Marburg, 2004.
- [18] Walter Rudin, *Functional Analysis*, Mc Graw Hill, 1973.
- [19] Michael Reed and Barry Simon, *Methods of modern mathematical physics, I : Functional analysis, II : Fourier analysis, self-adjointness*, Academic Press, New-York, 1972/1975.

- [20] Helmut Schaefer, *Topological vector spaces*, MacMillan, New York, 1966.