Appendice 1

TOPOLOGIE

Nous avons rassemblé dans ce chapitre les notions topologiques, dont nous avons besoin dans ce cours. Certaines des démonstrations sont mots à mots les mêmes que celles faites dans le cadre des espaces métriques (cf. cours d'Analyse [17], chapitre 10).

Version du 2 février 2004

1.1 Ensembles ouverts et fermés

DEFINITION 1 Soit X un ensemble. On dit qu'une partie $\mathfrak{T}$ de $\mathfrak{P}(X)$ est une *topologie* si l'on a

(a) Si $\mathfrak{G} \subset \mathfrak{T}$, alors $\bigcup_{O\in\mathfrak{G}} O \in \mathfrak{T}$.

(b) Si $\mathfrak{F}$ est une partie finie de $\mathfrak{T}$, alors $\bigcap_{O\in\mathfrak{F}} O \in \mathfrak{T}$.

On dit que $(X, \mathfrak{T})$ est un espace topologique.Une partie $O \subset X$ est dite *ouverte* si $O \in \mathfrak{T}$. Une partie $F \subset X$ est dite *fermée* si $\complement A := X \smallsetminus A$ est ouverte. A la place de $(X, \mathfrak{T})$ on écrit souvent simplement X .

PROPOSITION *Soient X un espace métrique, d sa métrique, $x \in X$, $\varepsilon > 0$,*

$$B_\varepsilon(x) := \{y \in X \mid d(x,y) \leqslant \varepsilon\} \quad \text{et} \quad D_\varepsilon(x) := \{y \in X \mid d(x,y) < \varepsilon\} \ .$$

En posant

$$\mathfrak{T}_{(X,d)} := \{O \subset X \mid \forall x \in O \ \exists \varepsilon > 0 \text{ tel que } B_\varepsilon(x) \subset O\}$$

on définit une topologie sur X .

Cela a été démontré dans la proposition 10.12, cours d'Analyse [17]. Ainsi à tout espace métrique est associé un espace topologique.

DEFINITION 2 On dit qu'un espace topologique est *métrisable* si sa topologie peut être définie par une métrique.

EXEMPLE 1 Soit X un espace topologique, $\mathfrak{T}$ sa topologie et Y une partie de X . En posant

$$\mathfrak{T}_Y := \{O \cap Y \mid O \in \mathfrak{T}\}$$

on définit une topologie sur Y , dite la *topologie induite* .

Si X est un espace métrique et $\mathfrak{T}$ sa topologie, alors $\mathfrak{T}_Y$ est le topologie qui provient de la métrique induite par X sur Y (cf. cours d'Analyse [17], exercice 10.12).

DEFINITION 3 Pour tout $A \subset X$, on définit l'intérieur A° de A par

$$A^\circ := \bigcup_{O \text{ ouvert}, \subset A} O \ .$$

On dit que $x \in A$ est un *point intérieur* de A s'il existe une partie ouverte O telle que $x \in O \subset A$. Si x est un point intérieur de A , on dit que A est un *voisinage* de x . En posant

$$\overline{A} := \bigcap_{F \text{ fermé}, \supset A} F$$

on définit la *fermeture* de A .

Une partie A est dite *dense* si $\overline{A} = X$.

L'ensemble A° est la plus grande partie ouverte contenue dans A . L'ensemble des points intérieurs de A est égal à A° . L'ensemble $\overline{A}$ est la plus petite partie fermée contenant A .

EXEMPLE 2 Soient X un espace métrique, $x \in X$ et $\varepsilon > 0$. L'ensemble $B_\varepsilon(x)$, respectivement $D_\varepsilon(x)$, est un voisinage fermé respectivement ouvert de x . On dit que la boule fermée, respectivement ouverte, de *centre* x et *rayon* ε . On a

$$\overline{D_\varepsilon(x)} \subset B_\varepsilon(x) \quad \text{et} \quad D_\varepsilon(x) \subset B_\varepsilon(x)^\circ \ .$$

Ces inclusions sont en général stricte.

PROPOSITION *Soient A, B des parties d'un espace topologique X . Alors*

(i) A *ouverte* $\iff$ $A^\circ = A$.

(ii) A *fermée* $\iff$ $\overline{A} = A$.

(iii) $A^\circ \cap B^\circ = (A \cap B)^\circ$.

(iv) $\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cup B}$.

(v) $A^\circ \cup B^\circ \subset (A \cup B)^\circ$.

(vi) $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.

(vii) $X \smallsetminus A^\circ = \overline{X \smallsetminus A}$.

(viii) $X \smallsetminus \overline{A} = (X \smallsetminus A)^\circ$.

Cf. cours d'Analyse [17], exercice 10.16.

1.2 Continuité

DEFINITION Soient X, Y des espaces topologiques. Une application $f : X \longrightarrow Y$ est dite *continue* en $x \in X$ si, pour toute partie ouverte O de Y telle que $f(x) \in O$, il existe une partie ouverte U de X telle que $x \in U$ et $f(U) \subset O$.

L'application f est dite *continue* si elle est continue en tout point de X.

THEOREME *Soient X, Y des espaces topologiques et $f : X \longrightarrow Y$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) f *est continue.*

(ii) $\overset{-1}{f}(O)$ *est ouverte pour toute partie ouverte* O *de* Y.

(iii) $\overset{-1}{f}(F)$ *est fermée pour toute partie fermée* F *de* Y.

(iv) $f\left(\overline{A}\right) \subset \overline{f(A)}$ *pour toute partie* $A \subset X$.

Cf. cours d'Analyse [17], proposition 10.16. Seule l'équivalence avec (iv) n'a pas été démontrée.

(iii) ⇒ (iv) Pour toute partie $A \subset X$, la partie $\overset{-1}{f}\left(\overline{f(A)}\right)$ est fermée et $\overset{-1}{f}\left(\overline{f(A)}\right) \supset \overset{-1}{f}(f(A)) \supset A$. On en déduit que $\overset{-1}{f}\left(\overline{f(A)}\right) \supset \overline{A}$ et par suite que $f\left(\overline{A}\right) \subset f\left(\overset{-1}{f}\left(\overline{f(A)}\right)\right) \subset \overline{f(A)}$.

(iv) ⇒ (iii) Soit F une partie fermée de Y. En posant $A := \overset{-1}{f}(F)$, on a $f\left(\overline{A}\right) \subset \overline{f(A)} \subset \overline{F} = F$, donc $\overline{A} \subset \overset{-1}{f}(F) = A \subset \overline{A}$, ce qui montre que $A = \overset{-1}{f}(F)$ est fermée. ———— □

EXEMPLE Soient X un espace topologique et Y une partie de X munie de la topologie induite. L'injection canonique $Y \hookrightarrow X$ est alors continue.

COROLLAIRE *Si les applications $f : X \longrightarrow Y$ et $g : Y \longrightarrow Z$ sont continues, alors l'application*

$$h = g \circ f : X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$$

l'est aussi.

Cette assertion n'a pas été démontrée topologiquement (cf. cours d'Analyse [17], théorème 7.3). La démonstration est immédiate en utilisant (ii).

1.3 Convergence

DEFINITION 1 Une suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de X est dite *convergente* si, pour toute partie ouverte U telle que $x \in U$, il existe un $N \in \mathbb{N}$ tel que l'on ait

$$x_k \in U \quad \text{pour tout } k \geqslant N \ .$$

EXEMPLE 1 Soit (X, d) un espace métrique. Une suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de X est alors convergente vers x pour $\mathfrak{T}_{(X,d)}$ si, et seulement si, elle converge vers x par rapport à la métrique d .

PROPOSITION *Soient X, Y des espaces topolgiques. Alors*

(i) Si une fonction $f : X \longrightarrow Y$ est continue en $x \in X$ et si une suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers x , alors la suite $(f(x_k))_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$.

(ii) Soient $A \subset X$ et $x \in X$. S'il existe une suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset A$, qui converge vers x , alors $x \in \overline{A}$.

Rappelons que la réciproque de ces assertions est valable dans le cas suivant :

THEOREME *Soient X, Y des espaces topologiques et supposons que X est métrisable.*

(i) Soit $x \in X$. Une application $f : X \longrightarrow Y$ est continue en x si, et seulement si, pour toute suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ convergente vers x , la suite $(f(x_k))_{k\in\mathbb{N}}$ est convergente vers $f(x)$.

(ii) Etant donné $A \subset X$ et $x \in X$, on a $x \in \overline{A}$ si, et seulement si, il existe une suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset A$ convergente vers x .

REMARQUE 1 En toute généralité on ne peut pas caractériser la continuité et la fermeture à l'aide des suites. Il faut introduire une généralisation de la notion de suite : les filtres.

DEFINITION 2 Soit X un ensemble. On dit qu'une famille non-vide $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{P}(X)$ est une *base de filtre* si

(a) $\emptyset \notin \mathfrak{B}$.

(b) Pour tout $A, B \in \mathfrak{B}$, il existe $C \in \mathfrak{B}$ tel que $C \subset A \cap B$.
On dit que $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{P}(X)$ est un *filtre* si c'est une base de filtre et si en plus

(c) Pour tout $A \in \mathfrak{F}$ et $A \subset B \subset X$, on a $B \in \mathfrak{F}$.

Soient $\mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ des bases de filtre. On dit que $\mathfrak{B}$ est *plus fine* que $\mathfrak{C}$ si, pour tout $C \in \mathfrak{C}$, il existe $B \in \mathfrak{B}$ telle que $B \subset C$.

Si $\mathfrak{F}$ est un filtre alors, pour tout $A, B \in \mathfrak{F}$, on a $A \cap B \in \mathfrak{F}$. Une base de filtre $\mathfrak{B}$ engendre un filtre

$$\widetilde{\mathfrak{B}} := \{A \subset X \mid \text{il existe } B \in \mathfrak{B} \text{ tel que } B \subset A\} \ .$$

Si $\mathfrak{C}$ est une autre base de filtre, alors $\mathfrak{B}$ est plus fine que $\mathfrak{C}$ si, et seulement si, $\widetilde{\mathfrak{B}} \supset \widetilde{\mathfrak{C}}$.

EXEMPLE 2 Si $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de X , alors l'ensemble des parties de la forme $\{x_l \mid l \geqslant k\}$ est une base de filtre sur X .

EXEMPLE 3 Si $f : X \longrightarrow Y$ est une application et $\mathfrak{B}$ une base de filtre sur X , alors $f(\mathfrak{B}) := \{f(A) \mid A \in \mathfrak{B}\}$ est une base de filtre sur Y .

En particulier si X est une partie de Y et en considérant l'injection canonique, on voit que toute base de filtre sur X est une base de filtre sur Y .

EXEMPLE 4 Si X est un espace topologique et $x \in X$, alors l'ensemble $\mathfrak{V}(x)$ des voisinages de x est un filtre.

DEFINITION 3 Soit X un espace topologique. On dit qu'une base de filtre $\mathfrak{B}$ *converge* vers $x \in X$, si pour tout voisinage V de X , il existe $A \in \mathfrak{B}$ tel que $A \subset V$, i.e. si $\mathfrak{B}$ est plus fine que $\mathfrak{V}(x)$. On écrit alors

$$x = \lim \mathfrak{B} = \lim\nolimits_{y\in\mathfrak{B}} y \ .$$

Si Y est un autre espace topologique et $f : X \longrightarrow Y$ une application, on dit que $y \in Y$ est une *valeur limite* de f suivant $\mathfrak{B}$ si $f(\mathfrak{B})$ converge vers y et on écrit

$$y = \lim f(\mathfrak{B}) = \lim\nolimits_{x\in\mathfrak{B}} f(x) = \lim\nolimits_{\mathfrak{B}} f \ .$$

REMARQUE 2 Pour qu'une base de filtre converge, il faut et il suffit que le filtre engendré converge.

Le théorème ci-dessus est alors valable en toute généralité.

THEOREME *Soient X, Y des espaces topologiques.*

(i) Soit $x \in X$. Une application $f : X \longrightarrow Y$ est continue en x si, et seulement si, pour tout filtre $\mathfrak{F}$ qui converge vers x , la base de filtre $f(\mathfrak{F})$ converge vers $f(x)$.

(ii) Etant donné $A \subset X$ et $x \in X$, on a $x \in \overline{A}$ si, et seulement si, il existe un filtre sur A qui converge vers x dans X .

1.4 Espaces topologiques séparés

DEFINITION Un espace topologique X est dit *séparé* si, pour tout $x, y \in X$ tels que $x \neq y$, il existe des partie ouverte O, U telles que $x \in O$, $y \in U$ et $O \cap U = \emptyset$.

En particulier, dans un espace séparé toute partie ne contenant qu'un point est fermée.

EXEMPLE Tout espace métrique est séparé.

THEOREME *Soient X, Y des espaces topologiques séparés et A une partie dense de X .*

(i) Si $f, g : X \longrightarrow Y$ sont des applications continues telles que $f_{|A} = g_{|A}$, alors $f = g$.

(ii) Si $f : X \longrightarrow Y$ est une application continue d'image dense, alors $f(A)$ est dense dans Y .

Démonstration de (i) Il suffit de montrer que $\{f = g\}$ est fermée et contient A .

Démonstration de (ii) Utilisant le théorème 10.2, on a

$$\overline{f(A)} \supset f\left(\overline{A}\right) = f(X) \ ,$$

donc

$$\overline{f(A)} \supset \overline{f(X)} = Y \ .$$

□

1.5 Parties et espaces compacts

DEFINITION 1 Soit X un espace topologique séparé. Une partie $K \subset X$ est dite *compacte* si, pour tout recouvrement ouvert de K possède un sous-recouvrement fini. Si X est compact, on dit que X est un *espace compact* .

On désigne par $\mathfrak{K}(X)$ l'ensemble des parties compactes de X .

EXEMPLE 1 Si X est un espace métrique, alors $K \subset X$ est compact si, et seulement si, toute suite de K contient une sous-suite convergente.

Cf. cours d'Analyse [17], théorème 10.17.

THEOREME *Soient X, Y des espaces topologiques séparés.*

(i) Si $f : X \longrightarrow Y$ est une application continue et $K \subset X$ est compacte, alors $f(K)$ est compact.

(ii) Une partie compacte est fermée.

(iii) Une partie fermée contenue dans une partie compacte est compacte.

Démonstration de (i) Cf. cours d'Analyse [17], théorème 10.19.

Démonstration de (ii) La démonstration du cours d'Analyse [17], Corollaire 10.17 utilise les suites. Voici une démonstration topologique. Soit $x \in X \smallsetminus K$. Puisque X est séparé, pour tout $y \in K$, il existe des voisinages ouverts U_y de y et V_y de x tels que $U_y \cap V_y = \emptyset$. La famille $(U_y)_{y \in K}$ est évidemment un recouvrement ouvert de K ; il existe donc une partie finie $F \subset K$ telle que $(U_y)_{y \in F}$ soit encore un recouvrement de K . On en déduit que $V := \bigcap_{y \in F} V_y$ est un voisinage de x qui ne coupe pas $\bigcup_{y \in E} U_y$, donc aussi K . Ceci montre que $X \smallsetminus K$ offen ist.

Démonstration de (iii) Soient A une partie fermée de X et K une partie compacte la contenant. Comme $X \smallsetminus A$ est ouvert, il suffit de constater qu'une famille $\mathcal{R}$ est un recouvrement ouvert de A si, et seulement si, $\mathcal{U} \cup \{X \smallsetminus A\}$ est un recouvrement ouvert de K . ——— $\square$

COROLLAIRE *Pour qu'une partie $K \subset X$ soit compacte, il faut et il suffit que que K muni de la topologie induite soit un espace compact.*

Cf. cours d'Analyse [17], exercice 10.17.4.

EXEMPLE 2 Soit X un espace topologique séparé. L'ensemble $\complement(\mathfrak{K}(X))$ des parties de la forme $X \smallsetminus K$, où $K \in \mathfrak{K}(X)$ est une base de filtre sur X .

Utilisant la notion de filtre on peut donner une caractérisation utile des espaces compacts. Mais tout d'abord

DEFINITION 2 On dit qu'un filtre $\mathfrak{U}$ est un *ultrafiltre* s'il est maximal, i.e. si tout filtre $\mathfrak{F}$ plus fin que $\mathfrak{U}$, i.e. $\mathfrak{F} \supset \mathfrak{U}$, est égal à $\mathfrak{F}$.

REMARQUE Par le principe de maximalité de Hausdorff, tout filtre est contenu dans un ultrafiltre.

THEOREME

(i) *Soit X un espace topologique séparé. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(a) *X soit compact.*

(b) *Pour toute famille $\mathfrak{B}$ d'ensembles fermés telle que $\bigcap_{B \in \mathfrak{B}} B = \emptyset$, il existe une sous-famille finie de $\mathfrak{B}$ dont l'intersection est vide.*

(c) *Pour toute base de filtre $\mathfrak{B}$ formées d'ensembles fermés, on a $\bigcap_{B \in \mathfrak{B}} B \neq \emptyset$.*

(d) *Tout ultrafiltre sur X est convergent.*

(ii) ***Tychonoff*** *Si $(X_j)_{j \in J}$ est une famille d'espaces compacts, alors $\prod_{j \in J} X_j$ est compact.*

Démonstration de (i)

(a) $\Longleftrightarrow$ (b) Il suffit de passer aux complémentaires.

(b) $\Longleftrightarrow$ (c) C'est la contraposition.

(c) $\Rightarrow$ (d) Soit $\mathfrak{U}$ un ultrafiltre. La famille des adhérences $\overline{A}$ pour $A \in \mathfrak{U}$ est une base de filtre satisfaisant à (c). Soit donc $x \in \bigcap_{A \in \mathfrak{U}} \overline{A}$. Pour tout voisinage V de x , on a $V \cap A \neq \emptyset$ pour tout $A \in \mathfrak{U}$, donc $V \in \mathfrak{U}$ par la maximalité de $\mathfrak{U}$. Ceci montre que $\mathfrak{U}$ converge vers x .

(d) $\Rightarrow$ (c) Par la remarque, il existe un ultrafiltre $\mathfrak{U}$ plus fin que $\mathfrak{B}$. Cet ultrafiltre converge donc vers un $x \in X$. Soit $B \in \mathfrak{B}$. On a $B \in \mathfrak{U}$ et, pour tout voisinage V de x , on a aussi $V \in \mathfrak{U}$, donc $B \cap V \in \mathfrak{U}$, ce qui montre que $B \cap V \neq \emptyset$. On en déduit que $x \in \overline{B} = B$, ce qui montre que $\bigcap_{B \in \mathfrak{B}} B \neq \emptyset$.

Démonstration de (ii) Si $\mathfrak{U}$ est un ultrafiltre sur $\prod_{j \in J} X_j$, alors $\mathrm{pr}_j(\mathfrak{U})$ est une base de filtre et elle engendre un ultrafiltre sur X_j . Par hypothèse chaque $\mathrm{pr}_j(\mathfrak{U})$ converge, donc aussi $\mathfrak{U}$. $\square$