Chapitre 8

DÉRIVABILITÉ

Dans tout ce paragraphe on désigne par J un intervalle de $\mathbb{R}$.

Version du 16 novembre 2005

8.1 La notion de dérivée

On se propose de définir ce qu'est la notion de vitesse instantanée ou celle de taux de croissance : c'est la limite, lorsqu'elle existe, de vitesses moyennes respectivement d'augmentations moyennnes.

DEFINITION Soient $f : J \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction et $x \in J$. On dit que f est *dérivabe* en x si

$$\lim_{x \neq y \to x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

existe dans $\mathbb{C}$. Dans ce cas on dit que ce nombre est la *dérivée* de f en x et on le désigne par $f'(x)$.

On dit que la fonction f est *dérivable* (dans J) si f est dérivable en tout point $x \in J$. La fonction

$$f' : J \longrightarrow \mathbb{C} : x \longmapsto f'(x)$$

s'appelle la *(fonction) dérivée* de f .

On dit que f est *continûment dérivable* si f est dérivable et si f' est continue. On désigne par $\mathcal{C}^{(1)}(J)$ l'ensemble de ces fonctions et on pose

$$\partial : \mathcal{C}^{(1)}(J) \longrightarrow \mathcal{C}(J) : f \longmapsto f' \ .$$

REMARQUE 1 On désigne encore (trop souvent) $f'(x)$ par $\frac{d}{dx}f(x)$ ou $(f(x))'$. La première notation est trop compliquée ; la seconde peut prêter à confusion si dans l'expression de f apparaissent des paramètres et que l'on n'a pas précisé la fonction que l'on considère : par exemple $(a^s)'$. Pour indiquer la variable par rapport à laquelle on dérive, on peut écrire

$$\partial_a (a^s) \ .$$

Nour reviendrons sur cette notation lorsque nous considérerons explicitement des fonctions de plusieurs variables.

REMARQUE 2 La dérivabilité de f en x signifie que la fonction

$$y \longmapsto \frac{f(y) - f(x)}{y - x} : J \smallsetminus \{x\} \longrightarrow \mathbb{C}$$

des quotients différentiels en x possède une valeur limite, i.e. se prolonge par continuité, en x .

THEOREME *Pour qu'une fonction $f : J \longrightarrow \mathbb{C}$ soit dérivable en $x \in J$, il faut et il suffit qu'il existe $a \in \mathbb{C}$ tel que la fonction $\varphi : J \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par*

$$f(y) = f(x) + a \cdot (y - x) + \varphi(y) \quad \textit{pour tout } y \in J$$

satisfasse à

$$\lim_{x \neq y \to x} \frac{\varphi(y)}{y - x} = 0 \ .$$

Dans ce cas a est la dérivée de f en x .

Il suffit de constater que

$$\frac{\varphi(y)}{y - x} = \frac{f(y) - f(x)}{y - x} - a \ .$$

□

COROLLAIRE *Si f est dérivable en x , alors f est continue en x . En particulier, on a*

$$\mathcal{C}^{(1)}(J) \subset \mathcal{C}(J) \ .$$

En effet, on a

$$\lim_{x \neq y \to x} \varphi(y) = \lim_{x \neq y \to x} (y - x) \cdot \frac{\varphi(y)}{y - x} = 0 \ ,$$

donc

$$\lim_{x \neq y \to x} f(y) = f(x) \ ,$$

et par suite

$$\lim_{y \to x} f(y) = f(x) \ .$$

□

REMARQUE 3 Si f est dérivable en x , le graphe de la fonction affine

$$y \longmapsto f(x) + f'(x) \cdot (y - x)$$

est la tangente au graphe de f en $(x, f(x))$. En effet, elle fournit la meilleure approximation affine de f au voisinage de x , puisque l'erreur φ est "plus petite" que toute erreur affine donnée, si l'on est assez proche de x :

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$|\varphi(y)| \leqslant \varepsilon \cdot |y - x| \quad \text{pour tout } y \in J \text{ tel que } |y - x| \leqslant \delta \ .$$

D'autre part si l'on remplace $f'(x)$ par $a \neq f'(x)$ et si $\delta_0 > 0$ est tel que

$$|\varphi(y)| \leqslant \frac{|f'(x) - a|}{2} \cdot |y - x| \quad \text{pour tout } y \in J \text{ tel que } |y - x| \leqslant \delta_0 \ ,$$

alors l'erreur faite pour ces y est plus grande qu'une erreur affine fixe :

$$|f(y) - [f(x) + a \cdot (y - x)]| = |[f'(x) - a] \cdot (y - x) + \varphi(y)| \geqslant$$

$$\geqslant |[f'(x) - a] \cdot (y - x)| - |\varphi(y)| \geqslant \frac{|f'(x) - a|}{2} \cdot |y - x| \ .$$

Pour ce fixer les idées, on écrit souvent

$$f(y) \simeq f(x) + f'(x) \cdot (y - x) \ ,$$

Mais ceci ne donne aucune information sur l'erreur faite.

EXEMPLE 1 Les fonctions constantes sont dérivables dans tout intervalle et leur dérivée est 0 .

EXEMPLE 2 Pour tout $a \in \mathbb{C}$, la fonction $x \longmapsto a \cdot x$ est dérivable dans tout intervalle et sa dérivée est a .

En effet le quotient différentiel est

$$\frac{a \cdot y - a \cdot x}{y - x} = a \ .$$

□

EXEMPLE 3 Pour tout $a \in \mathbb{C}$, la fonction $x \longmapsto \exp(a \cdot x)$ est dérivable dans tout intervalle et sa dérivée en x est $a \cdot \exp(a \cdot x)$.

En effet, on a

$$\frac{\exp(a \cdot y) - \exp(a \cdot x)}{y - x} = a \cdot \exp(a \cdot x) \cdot \frac{\exp(a \cdot [y - x]) - 1}{a \cdot (y - x)} \ ,$$

d'où le résultat par l'exemple 7.8.2. □

EXEMPLE 4 La fonction $|\cdot| : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto |x|$ n'est pas dérivable en 0 , mais elle est dérivable en tout point de $\mathbb{R}^*$ et

$$|\cdot|' : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \operatorname{signum} x := \frac{x}{|x|} = \left\{ \begin{array}{ccc} 1 & & x > 0 \\ & \text{si} & \\ -1 & & x < 0 \end{array} \right. \ .$$

Si l'on pose $x_k := (-1)^k \cdot \frac{1}{k}$, on a $\lim_k x_k = 0$, mais

$$\frac{|x_k| - 0}{x_k - 0} = (-1)^k$$

ne converge pas. D'autre part si $x \neq 0$, on a

$$\frac{|y| - |x|}{y - x} = \operatorname{signum} x$$

si y est suffisamment proche de x . □

8.2 Calcul avec les fonctions dérivables

THEOREME *Soient $f,g : J \longrightarrow \mathbb{C}$ des fonctions, $x \in J$ et $a \in \mathbb{C}$. Alors*

(i) Si f,g sont dérivables en x , les fonctions $a \cdot f$, $f+g$ et $\overline{f}$ sont dérivables en x et on a

$$(a \cdot f)'(x) = a \cdot f'(x) \quad , \quad (f+g)'(x) = f'(x) + g'(x) \quad \text{et} \quad \left(\overline{f}\right)'(x) = \overline{f'(x)} \ .$$

(ii) ***Règle du produit*** *Si f,g sont dérivables en x , la fonction $f \cdot g$ est dérivable en x et on a*

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) \ .$$

(iii) ***Règle du quotient*** *Si f,g sont dérivables en x et si $g \neq 0$ partout dans J , alors $\frac{f}{g}$ est dérivable en x et on a*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x)^2} \ .$$

(iv) Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ tel que $I \subset J$ et $x \in I$. Si f est dérivable en x , alors $f_{|I}$ est dérivable en x et

$$\left(f_{|I}\right)'(x) = f'(x) \ .$$

(v) Soit $x \in J$. Pour que f soit dérivable en x , il faut et il suffit que $\operatorname{Re} f$ et $\operatorname{Im} f$ soient dérivables en x . Dans ce cas, on a

$$f'(x) = (\operatorname{Re} f)'(x) + i \cdot (\operatorname{Im} f)'(x) \ .$$

Démonstration de (i) Cela découle immédiatement de la définition.

Démonstration de (ii) Il suffit d'écrire

$$\frac{f \cdot g(y) - f \cdot g(x)}{y-x} = \frac{f(y) - f(x)}{y-x} \cdot g(y) + f(x) \cdot \frac{g(y) - g(x)}{y-x} \ .$$

et d'utiliser le corollaire 8.1.

Démonstration de (iii) Considérons tout d'abord le cas $f = 1$. Ici on écrit

$$\frac{\frac{1}{g}(y) - \frac{1}{g}(x)}{y-x} = \frac{1}{y-x} \cdot \frac{g(x) - g(y)}{g(y) \cdot g(x)} = \frac{-\frac{g(y)-g(x)}{y-x}}{g(y) \cdot g(x)} \ ,$$

d'où l'on tire

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x) = \frac{-g'(x)}{g^2(x)} \ .$$

Il nous reste à utiliser la règle du produit :

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \left(f \cdot \frac{1}{g}\right)'(x) = f'(x) \cdot \frac{1}{g}(x) + f(x) \cdot \left(\frac{1}{g}\right)'(x) =$$

$$= \frac{f'(x)}{g(x)} - f(x) \cdot \frac{g'(x)}{g^2(x)} = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)} \ .$$

Démonstration de (iv) Cela découle immédiatement de (i) en utilisant les formules

$$\operatorname{Re} f = \frac{1}{2} \cdot \left(f + \overline{f}\right) \quad , \quad \operatorname{Im} f = \frac{1}{2i} \cdot \left(f - \overline{f}\right) \quad \text{et} \quad f = \operatorname{Re} f + i \cdot \operatorname{Im} f \ .$$

□

EXEMPLE 1 Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, la fonction

$$\mathrm{id}^n : x \longmapsto x^n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{si } n \geqslant 0 \text{ , resp.} \quad \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{si } n < 0 \ ,$$

est dérivable de dérivée

$$n \cdot \mathrm{id}^{n-1} : x \longmapsto n \cdot x^{n-1} \ .$$

C'est immédiat par récurrence. Le cas $n = 0$ découle de l'exemple 8.1.1. Quant au pas de récurrence on a

$$\left(\mathrm{id}^{n+1}\right)' = (\mathrm{id}^n \cdot \mathrm{id}) = (\mathrm{id}^n)' \cdot \mathrm{id} + \mathrm{id}^n \cdot \mathrm{id}' = n \cdot \mathrm{id}^{n-1} \cdot \mathrm{id} + \mathrm{id}^n \cdot 1 = (n+1) \cdot \mathrm{id}^n$$

en utilisant la règle du produit et l'exemple 8.1.2. Finalement pour $n < 0$, on a

$$(\mathrm{id}^n)' = \left(\frac{1}{\mathrm{id}^{-n}}\right)' = \frac{\left(-\mathrm{id}^{-n}\right)'}{\mathrm{id}^{-2n}} = \frac{-(-n) \cdot \mathrm{id}^{-n-1}}{\mathrm{id}^{-2n}} = n \cdot \mathrm{id}^{n-1} \ ,$$

en appliquant la règle du quotient. □

EXEMPLE 2 Les fonctions cos , sin , tan et cot sont dérivables et on a

$$\cos' = -\sin \quad , \quad \sin' = \cos$$

et

$$\tan' = \frac{1}{\cos^2} \quad , \quad \cot' = \frac{-1}{\sin^2} \ .$$

La fonction $x \longmapsto \exp(i \cdot x) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ est dérivable et de dérivée $x \longmapsto i \cdot \exp(i \cdot x)$ d'après l'exemple 8.1.3, d'où la première partie par (iv), puisque

$$\exp(i \cdot x) = \cos x + i \cdot \sin x \quad \text{et} \quad i \cdot \exp(i \cdot x) = -\sin x + i \cdot \cos x \ .$$

Pour la seconde on a

$$\tan' = \left(\frac{\sin}{\cos}\right)' = \frac{\sin' \cdot \cos - \sin \cdot \cos'}{\cos^2} = \frac{\cos^2 + \sin^2}{\cos^2} = \frac{1}{\cos^2} \ ,$$

et de même pour $\cot'$. □

DEFINITION On dit que $f : J \longrightarrow \mathbb{C}$ est *dérivable à gauche* , respectivement *à droite en* $x \in J$, si la restriction de f à $J \cap \left]-\infty, x\right]$, respectivement à $J \cap \left[x, \infty\right[$, est dérivable en x . On écrit

$$f_g'(x) := \left(f_{|J \cap]-\infty,x]}\right)'(x) \quad \text{et} \quad f_d'(x) := \left(f_{|J \cap [x,\infty[}\right)'(x) \ ,$$

et on dit que ces nombres sont la *dérivée à gauche et à droite* de f en x .

PROPOSITION *Pour que f soit dérivable en x , il faut et il suffit que f soit dérivable à gauche et à droite en x et que $f_g'(x) = f_d'(x)$.*

La condition est nécessaire par (iv). Réciproquement, en utilisant la remarque 8.1.2 et la proposition 7.8, il nous suffit de montrer que $a := f_g'(x) = f_d'(x)$ est valeur limite de $y \longmapsto \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$. Mais pour tout $\varepsilon > 0$, il existe par hypothèse $\delta_g, \delta_d > 0$ tels que l'on ait

$$\left| \frac{f(y) - f(x)}{y - x} - f_g'(x) \right| \leqslant \varepsilon \quad \text{pour tout } y \in J \text{ tel que } x - \delta_g \leqslant y \leqslant x$$

et

$$\left| \frac{f(y) - f(x)}{y - x} - f_d'(x) \right| \leqslant \varepsilon \quad \text{pour tout } y \in J \text{ tel que } x \leqslant y \leqslant x + \delta_d \ .$$

On a donc

$$\left| \frac{f(y) - f(x)}{y - x} - a \right| \leqslant \varepsilon \quad \text{pour tout } y \in J \text{ tel que } x - \min(\delta_g, \delta_d) \leqslant y \leqslant x + \min(\delta_g, \delta_d) \ ,$$

ce qu'il fallait démontrer. □

EXEMPLE 3 Considérons à nouveau la fonction $|\cdot| : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto |x|$. On a

$$|\cdot|_g'(0) = -1 \quad \text{et} \quad |\cdot|_d'(0) = 1 \ ,$$

ce qui montre que $|\cdot|$ n'est pas dérivable en 0 .

EXEMPLE 4 La fonction

$$|\cdot|^3 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \begin{cases} x^3 & \quad x \geqslant 0 \\ & \text{si} \\ -x^3 & \quad x < 0 \end{cases}$$

est dérivable en 0 . En effet

$$\left(|\cdot|^3\right)_l'(0) = -3 \cdot \mathrm{id}^2(0) = 0 \quad \text{et} \quad \left(|\cdot|^3\right)_l'(0) = 3 \cdot \mathrm{id}^2(0) = 0 \ .$$

EXERCICE 1 On considère la fonction

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \begin{cases} x^5 - 2x^3 + 2x & \quad x < 1 \\ & \text{si} \\ x & \quad x \geqslant 1 \end{cases} .$$

Est-ce que cette fonction est dérivable (à gauche et à droite), respectivement continûment dérivable ?

EXERCICE 2 Soient J un intervalle de $\mathbb{R}$, $x \in J$ et $f : J \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue. Montrer que si les restrictions de f à $J \cap]-\infty, x[$ et à $J \cap]x, \infty[$ sont continûment dérivables et

$$\lim_{t \to x-} f'(t) = \lim_{t \to x+} f'(t) \in \mathbb{C} \ ,$$

alors f est continûment dérivable sur J .

8.3 Dérivation des fonctions composées et réciproques

THEOREME

(i) ***Dérivation des fonctions composées*** *Soient $f : J \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction, I un intervalle de $\mathbb{R}$, $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que $g(I) \subset J$ et $u \in I$. Si g est dérivable en u et f est dérivable en $g(u)$, alors*

$$f \circ g : I \xrightarrow{g} J \xrightarrow{f} \mathbb{C}$$

est dérivable en u et on a

$$(f \circ g)'(u) = f'(g(u)) \cdot g'(u) \ .$$

(ii) ***Dérivation d'une fonction réciproque*** *Soient $f : J \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue strictement croissante, respectivement décroissante, et $\overset{-1}{f} : f(J) \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction réciproque. Si f est dérivable en $x \in J$, alors $\overset{-1}{f}$ est dérivable en $f(x)$ si, et seulement si, on a $f'(x) \neq 0$. Dans ce cas, on a*

$$\left(\overset{-1}{f}\right)'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)} \ ,$$

ou bien

$$\left(\overset{-1}{f}\right)'(y) = \frac{1}{f'\left(\overset{-1}{f}(y)\right)} \ ,$$

en ayant posé $y = f(x)$.

Démonstration de (i) Définissons la fonction $\widetilde{f} : J \longrightarrow \mathbb{C}$ par

$$\widetilde{f}(y) := \begin{cases} \frac{f(y)-f(g(u))}{y-g(u)} & \\ & \text{si} \\ f'(g(u)) & \end{cases} \begin{matrix} y \neq g(u) \\ \\ y = g(u) \end{matrix} \ .$$

On a

$$\lim_{y \to g(u)} \widetilde{f}(y) = f'(g(u))$$

d'après la remarque 8.1.2, i.e $\widetilde{f}$ est continue en $g(u)$, et

$$f(y) - f(g(u)) = \widetilde{f}(y) \cdot [y - g(u)] \ \text{ pour tout } y \in J \ .$$

Il vient alors

$$\lim_{v \neq u, v \to u} \frac{f(g(v)) - f(g(u))}{v - u} = \lim_{v \neq u, v \to u} \frac{\widetilde{f}(g(v)) \cdot [g(v) - g(u)]}{v - u} =$$

$$= \lim_{v \to u} \widetilde{f}(g(v)) \cdot \lim_{v \neq u, v \to u} \frac{g(v) - g(u)}{v - u} = f'(g(u)) \cdot g'(u) \ ,$$

puisque g est continue en u par le corollaire 8.1, donc aussi $\widetilde{f} \circ g$ par le théorème 7.3.ii.

Démonstration de (ii) La condition est nécessaire, car on a $\mathrm{id}_J = \overset{-1}{f} \circ f$, donc

$$1 = \left(\overset{-1}{f} \circ f\right)'(x) = \left(\overset{-1}{f}\right)'(f(x)) \cdot f'(x)$$

par la formule de dérivation des fonctions composées. On en déduit évidemment $f'(x) \neq 0$, ainsi que la formule.

Réciproquement, soit $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de $f(J)$ convergente vers $f(x)$ et telle que $y_k \neq f(x)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Puisque f est injective (cf. théorème 7.11), il existe une suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de J telle que $f(x_k) = y_k$ et $x_k \neq x$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Comme $\overset{-1}{f}$ est continue, on a $\lim_k x_k = \lim_k \overset{-1}{f}(y_k) = \overset{-1}{f}(f(x)) = x$ et

$$\lim_k \frac{\overset{-1}{f}(y_k) - \overset{-1}{f}(f(x))}{y_k - f(x)} = \lim_k \frac{x_k - x}{f(x_k) - f(x)} = \lim_k \frac{1}{\frac{f(x_k)-f(x)}{x_k-x}} = \frac{1}{f'(x)} \ .$$

□

REMARQUE Le fait d'écrire

$$\frac{f(g(v)) - f(g(u))}{v-u} = \frac{f(g(v)) - f(g(u))}{g(v) - g(u)} \cdot \frac{g(v) - g(u)}{v-u}$$

ne conduit pas à une démonstration correcte de la règle de dérivation des fonctions composées, car pour certain $v \neq u$ on peut avoir

$$g(v) = g(u) \ ,$$

à moins que g soit injective.

EXEMPLE 1 Si $f : J \longrightarrow \mathbb{C}$ est dérivable et si, pour $a, b \in \mathbb{R}$, la fonction

$$u \longmapsto a \cdot u + b : I \longrightarrow J$$

est bien définie, alors

$$u \longmapsto f(a \cdot u + b) : I \longrightarrow \mathbb{C}$$

est dérivable de dérivée

$$u \longmapsto a \cdot f'(a \cdot u + b) \ .$$

EXEMPLE 2 Pour tout $x > 0$, on a $\ln'(x) = \frac{1}{x}$, i.e.

$$\ln' = \frac{1}{\mathrm{id}} \ .$$

En effet

$$\ln' = \left(\exp^{-1}\right)' = \frac{1}{\exp'(\exp^{-1})} = \frac{1}{\exp(\exp^{-1})} = \frac{1}{\mathrm{id}} \ .$$

□

EXEMPLE 3 Pour tout $s \in \mathbb{R}$, la fonction

$$\mathrm{id}^s : x \longmapsto x^s : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$$

est dérivable de dérivée

$$(\mathrm{id}^s)' = s \cdot \mathrm{id}^{s-1} \ .$$

On a

$$\partial_x \left(x^s\right) = \partial_x \left(e^{s \cdot \ln x}\right) = e^{s \cdot \ln x} \cdot \partial_x \left(s \cdot \ln x\right) = x^s \cdot \frac{s}{x} = s \cdot x^{s-1} \ .$$

□

EXEMPLE 4 Si $s > 0$, la fonction id^s se prolonge par continuité en 0 en la définissant par 0 (cf. exemple 7.16.2). Est-elle dérivable en 0 ? Il vient

$$\lim_{x \to 0+} \frac{x^s - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0+} x^{s-1} = \begin{cases} \infty & & s < 1 \\ 1 & \text{si} & s = 1 \\ 0 & & s > 1 \end{cases} \ .$$

La formule de l'exemple 3 est encore valable avec les conventions

$$0^s = 0 \text{ si } s > 0 \quad \text{et} \quad 0^0 = 1 \ .$$

La fonction

$$\mathrm{id}^s : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$$

est donc continûment dérivable si $s \geqslant 1$.

EXEMPLE 5 La fonction

$$\sqrt{1+\cdot} : x \longmapsto \sqrt{1+x} : \left]-1, \infty\right[\longrightarrow \mathbb{R}$$

est dérivable de dérivée

$$\frac{1}{2 \cdot \sqrt{1+\cdot}} : x \longmapsto \frac{1}{2 \cdot \sqrt{1+x}} \ .$$

En effet

$$\left(\sqrt{1+x}\right)' = \left([1+x]^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2} \cdot [1+x]^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{1+x}} \ .$$

□

APPLICATION Il vient

$$\lim_k \left(\sqrt{k + \sqrt{k}} - \sqrt{k}\right) = \lim_k \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{k}}} - 1}{\frac{1}{\sqrt{k}}} = \left(\sqrt{1+\cdot}\right)'(0) = \frac{1}{2} \ .$$

EXEMPLE 6 La fonction $\ln|\cdot| : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ est dérivable de dérivée $\frac{1}{\mathrm{id}}$.

On a

$$(\ln|\cdot|)' = \frac{1}{|\cdot|} \cdot \mathrm{signum} = \frac{\mathrm{id}}{|\cdot|^2} = \frac{1}{\mathrm{id}} \ ,$$

d'après la règle de dérivation des fonctions composées et l'exemple 8.1.4. On considère $\mathbb{R}^*$ comme la réunion des deux intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, \infty[$. $\square$

APPLICATION Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\lim_{y\to\infty} \left(1 + \frac{x}{y}\right)^y = e^x \ .$$

Cette formule est trivialement vraie si $x = 0$. Soit donc $x \in \mathbb{R}^*$. Pour tout $y \in [|x| , \infty[$, on peut écrire

$$\left(1 + \frac{x}{y}\right)^y = \exp\left(y \cdot \ln\left(1 + \frac{x}{y}\right)\right) = \exp\left(y \cdot \ln\left[|x| \cdot \left|\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right|\right]\right) =$$

$$= \exp\left(\frac{\ln\left|\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right| - \ln\left|\frac{1}{x}\right|}{\frac{1}{y}}\right) \ ,$$

donc

$$\lim_{y\to\infty} \left(1 + \frac{x}{y}\right)^y = \exp\left(\lim_{y\to\infty} \frac{\ln\left|\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right| - \ln\left|\frac{1}{x}\right|}{\frac{1}{y}}\right)$$

$$= \exp\left(\left[\ln\left|\frac{1}{x} + \cdot\right|\right]'(0)\right) = \exp\left(\frac{1}{\frac{1}{x}}\right) = \exp(x) \ ,$$

par la continuité de exp . $\square$

APPLICATION Considérons le problème des intérêts cumulés calculés sur des périodes de plus en plus petites. Si le taux d'intérêt est x , après t années le capital a été multiplié par le facteur

$$\begin{array}{ccc} (1+x)^t & & \text{à la fin de l'année} \\ \left(1+\frac{x}{2}\right)^{2t} & \text{si les intérêts sont versés} & \text{après 6 mois} \\ \left(1+\frac{x}{12}\right)^{12t} & & \text{après 1 mois} \end{array} \ .$$

Si les intérêts sont versés continuellement, le facteur est

$$\lim_k \left(1 + \frac{x}{k}\right)^{k\cdot t} = (e^x)^t = e^{x\cdot t} \ .$$

EXEMPLE 7 La fonction $\arcsin :]-1, 1[\longrightarrow \mathbb{R}$ est dérivable de dérivée

$$\arcsin' = \frac{1}{\sqrt{1 - \mathrm{id}^2}} \ .$$

On a

$$\arcsin' = \left(\sin^{-1}\right)' = \frac{1}{\sin'\left(\sin^{-1}\right)} = \frac{1}{\cos\left(\sin^{-1}\right)} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2\left(\sin^{-1}\right)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \mathrm{id}^2}} \ .$$

$\square$

On prouve de manière analogue (exercice) que

$$\arccos' = -\frac{1}{\sqrt{1-\mathrm{id}^2}} \quad , \quad \arctan' = \frac{1}{1+\mathrm{id}^2} \quad \text{et} \quad \operatorname{arccot}' = \frac{-1}{1+\mathrm{id}^2} \ .$$

EXERCICE 1 Pour tout $s \in \mathbb{R}_+$, on considère la fonction

$$f_s : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \begin{cases} x^s \cdot \sin\frac{1}{x} & x > 0 \\ & \text{si} \\ 0 & x = 0 \end{cases} \ .$$

Pour quelles valeurs de s est-ce que cette fonction est continue, dérivable et continûment dérivable ?

EXERCICE 2

(a) Soit J un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : J \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ une fonction dérivable. Démontrer la formule $f' = f \cdot (\ln f)'$.

(b) Calculer la dérivée de la fonction

$$\mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}_+^* : x \longmapsto x^x \ .$$

EXERCICE 3 Calculer la dérivée des fonctions suivantes :

(a) Pour $a, b, c \in \mathbb{C}$,

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} : x \longmapsto \exp\left(a \cdot x^2 + b \cdot x + c\right) \ .$$

(b)

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \sin(x \cdot \sin x) + \cos\left(\sin x^2\right) \ .$$

(c)

$$\mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto (x^x)^x \ .$$

(d)

$$\mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto x^{(x^x)} \ .$$

8.4 Condition nécessaire d'extremum local

DEFINITION 1 Soient $f : J \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $x \in J$. Nous dirons que f possède un *maximum* (resp. *minimum*) *local* en x s'il existe un $\delta > 0$ tel que l'on ait

$$f(y) \leqslant f(x) \ , \quad \text{resp.} \quad f(y) \geqslant f(x) \ , \quad \text{pour tout } y \in J \text{ tel que } |y - x| \leqslant \delta \ .$$

Pour simplifier on parle d'un *extremum local* si l'on ne veut pas préciser.

Ce maximum (resp. minimum) local est dit *strict* ou *isolé* si l'on a

$$f(y) < f(x) \ , \quad \text{resp. } f(y) > f(x) \ , \quad \text{pour tout } y \in J \text{ tel que } 0 < |y - x| \leqslant \delta \ .$$

REMARQUE 1 Tout point où f atteint son maximum, resp. minimum, est un maximum, resp. minimum, local.

DEFINITION 2 Si J est un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$, on pose

$$J^\circ :=]\inf\ J, \sup\ J[$$

et on dit que c'est l' *intérieur* de l'intervalle J .

PROPOSITION *Si f est dérivable en $x \in J^\circ$ et si f possède un extremum local en x , alors*

$$f'(x) = 0 \ .$$

En effet, on a

$$f'(x) = f'_g(x) = \lim_{y \to x-} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \geqslant 0$$

et

$$f'(x) = f'_d(x) = \lim_{y \to x+} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leqslant 0 \ ,$$

d'où le résultat. □

DEFINITION 3 On dit qu'un $x \in J$ où f est dérivable et $f'(x) = 0$ est un *point critique* de f .

REMARQUE 2 Ainsi un extremum local à l'intérieur de l'intervalle est un point critique, mais attention la réciproque est fausse, comme le montre l'exemple de la fonction

$$x \longmapsto x^3 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

en 0 .

REMARQUE 3 La proposition est fausse si x est l'une des extremités des l'intervalle comme le montre l'exemple de la fonction

$$[0,1] \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto x \ ,$$

atteignant son maximum en 1 et son minimum en 0 .

8.5 Théorème de Rolle

THEOREME *Soient $[a,b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$ tel que $a \neq b$ et $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(a) = f(b)$. Si f est dérivable dans $]a,b[$, alors il existe $\xi \in\ ]a,b[$ tel que $f'(\xi) = 0$.*

Si f est constante, le résultat est trivial. Si f n'est pas constante, il existe $x \in\ ]a,b[$ tel que

$$f(x) \neq f(a) = f(b) \ .$$

En remplaçant au besoin f par $-f$ nous pouvons supposer que $f(x) > f(a)$. Par le théorème de Weierstrass 7.10 f atteint son maximum en un point $\xi \in [a,b]$. On a

$$f(\xi) = \max\ f([a,b]) \geqslant f(x) > f(a) \ ,$$

donc $\xi \in\ ]a,b[$. Le résultat découle alors de la remarque 8.4.1 et de la proposition 8.4. □

EXEMPLE 1 Un polynôme réel $\neq 0$ de degré n a au plus n zéros dans $\mathbb{R}$.

Démontrons ce résultat par récurrence sur n . Le cas $n = 0$ est trivial. Si maintenant un polynôme p de degré $n+1$ possédait au moins $n+2$ zéros $x_0, \ldots, x_{n+1}$ dans $\mathbb{R}$, alors p' en posséderait au moins $n+1$. En effet le théorème de Rolle montre qu'entre x_k et x_{k+1} , pour $k = 0, \ldots, n$, il en existe au moins un. Comme $\deg p' \leqslant n$ le pas de récurrence s'obtient par contraposition. □

COROLLAIRE (Formule des accroissements finis) *Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ des fonctions continues qui sont dérivables dans $]a,b[$. Alors*

(i) Il existe $\xi \in\ ]a,b[$ tel que

$$[f(b) - f(a)] \cdot g'(\xi) = [g(b) - g(a)] \cdot f'(\xi) \ .$$

Si $g' \neq 0$ sur $]a,b[$, alors $g(a) \neq g(b)$ et

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \ .$$

(ii) En particulier il existe $\xi \in\ ]a,b[$ tel que

$$f(b) - f(a) = f'(\xi) \cdot (b-a) \ .$$

Démonstration de (i) La fonction

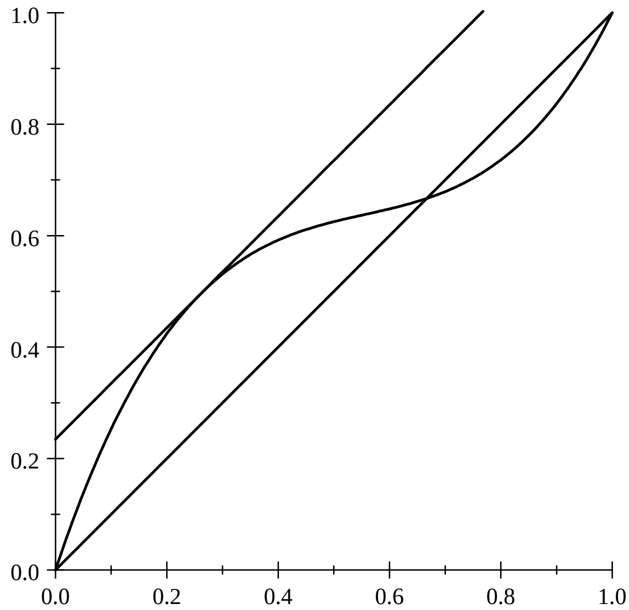
$$h : x \longmapsto [f(b) - f(a)] \cdot [g(x) - g(a)] - [f(x) - f(a)] \cdot [g(b) - g(a)]$$

satisfait manifestement aux hypothèse du théorème de Rolle. Il existe donc $\xi \in\ ]a,b[$ tel que

$$0 = h'(\xi) = [f(b) - f(a)] \cdot g'(\xi) - f'(\xi) \cdot [g(b) - g(a)] \ .$$

La seconde assertion découle par contraposition du théorème de Rolle appliqué à g .

Démonstration de (ii) Il suffit de prendre $g := \mathrm{id}_{|[a,b]}$. □



$$x \longmapsto 3 \cdot x^3 - 5 \cdot x^2 + 3 \cdot x : [0,1] \longrightarrow [0,1]$$
$$\xi = \tfrac{5-\sqrt{7}}{9} \quad \text{et} \quad f(\xi) = \tfrac{155}{243} - \tfrac{13\sqrt{7}}{243}$$

EXEMPLE 2 On a

$$\ln x < x - 1 \quad \text{si } x > 0 \text{ et } x \neq 1 \ .$$

Par la formule des accroissements finis il existe ξ entre x et 1 tel que

$$\ln x = \ln x - \ln 1 = \ln' \xi \cdot (x-1) = \frac{1}{\xi} \cdot (x-1) \ .$$

Si $x > 1$, on a $\xi > 1$, donc $\frac{1}{\xi} < 1$; si $0 < x < 1$, on a $\xi < 1$, donc $\frac{1}{\xi} > 1$ et $x - 1 < 0$. Le résultat en découle. □

On prouve de la même manière que

$$\sin x < x \quad \text{et} \quad \arctan x < x \quad \text{pour tout } x > 0 \ .$$

PROPOSITION (Inégalité de la moyenne) *Si $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ est une fonction continue, dérivable dans $]a,b[$, alors*

$$|f(b) - f(a)| \leqslant \sqrt{2} \cdot (b-a) \cdot \sup_{x \in]a,b[} |f'(x)| \ .$$

Par le corollaire ci-dessus, il existe $\xi, \eta \in]a,b[$ tels que

$$\operatorname{Re} f(b) - \operatorname{Re} f(a) = (\operatorname{Re} f)'(\xi) \cdot (b-a)$$

et

$$\operatorname{Im} f(b) - \operatorname{Im} f(a) = (\operatorname{Im} f)'(\eta) \cdot (b-a) \ ,$$

d'où l'on tire

$$|f(b) - f(a)|^2 = |\operatorname{Re} f(b) - \operatorname{Re} f(a)|^2 + |\operatorname{Im} f(b) - \operatorname{Im} f(a)|^2 =$$

$$= \left(\left| (\operatorname{Re} f)'(\xi) \right|^2 + \left| (\operatorname{Im} f)'(\eta) \right|^2 \right) \cdot (b-a)^2 \leqslant \left(|f'(\xi)|^2 + |f'(\eta)|^2 \right) \cdot (b-a)^2 \leqslant$$

$$\leqslant 2 \cdot (b-a)^2 \cdot \sup_{x\in]a,b[} |f'(x)|^2 \ .$$

$\square$

REMARQUE Nous pourrons supprimer la constante $\sqrt{2}$ à l'aide du calcul intégral (cf. 9.9).

EXERCICE 1 Montrer à l'aide de l'inégalité de la moyennne les inégalités suivantes :

(a) Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$, on a

$$e^a \cdot (b-a) < e^b - e^a < e^b \cdot (b-a) \ .$$

(b) Si $0 < x < 1$, alors

$$x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < \left(x - \frac{x^2}{2}\right) \cdot \left(1 - x^2\right)^{-1} \ .$$

EXERCICE 2 Soient $a \in J^\circ$ et $f : J \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, dérivable dans $J \smallsetminus \{a\}$. On suppose que

$$f'(a-) := \lim_{x\to a-} f'(x) \quad \text{et} \quad f'(a+) := \lim_{x\to a+} f'(x)$$

existent. Montrer que f est dérivable en a si, et seulement si, $f'(a+) = f'(a-)$. Dans ce cas on a $f'(a) = f'(a-)$.

EXERCICE 3 Toute fonction dérivable $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ayant un minimum local, qui n'est pas un minimum absolu, possède en plus un maximum local.

8.6 Monotonie

DEFINITION Soient X un ensemble et $f, g : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ des fonctions. On écrit $f \leqslant g$ si l'on a $f(x) \leqslant g(x)$ pour tout $x \in X$.

On vérifie immédiatement que ceci définit une relation d'ordre sur l'ensemble $\overline{\mathbb{R}}^X$ de toutes les fonctions sur X à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$. Rappelons que

$$f < g \quad \text{signifie que} \quad f \leqslant g \text{ et } f \neq g \ ,$$

i.e. que $f(x) \leqslant g(x)$ pour tout $x \in X$ et qu'il existe $u \in X$ tel que $f(u) < g(u)$.

Mais attention, si A est une partie de X , nous écrirons

$$f < g \text{ dans } A \quad \text{pour} \quad f(x) < g(x) \text{ pour tout } x \in A \ .$$

PROPOSITION *Soit $f : J \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et dérivable dans J° . Alors*

(i) $$f' \geqslant 0 \ , \text{ resp. } \leqslant 0 \ , \text{ dans } J^\circ \quad \Longleftrightarrow \quad f \text{ est croissante, resp. décroissante} \ .$$

(ii)

$$f' > 0 \ , \text{ resp. } < 0 \ , \text{ dans } J^\circ \quad \Longrightarrow \quad f \text{ est strictement croissante, resp. décroissante} \ .$$

Pour tout $x, y \in J$ tels que $x < y$, il existe $\xi \in \left]x, y\right[\subset J^\circ$ tel que

$$f(y) - f(x) = f'(\xi) \cdot (y - x) \ .$$

Les implications $\Rightarrow$ en découlent immédiatement. L'implication $\Leftarrow$ de (i) se démontre en utilisant la définition de la dérivée comme limite des quotients différentiels. □

REMARQUE La réciproque dans (iii) est fausse comme le montre l'exemple de la fonction

$$x \longmapsto x^3 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \ .$$

COROLLAIRE *Si $f : J \longrightarrow \mathbb{C}$ est une fonction continue et dérivable dans J° , alors*

$$f' = 0 \text{ dans } J^\circ \quad \Longleftrightarrow \quad f \text{ est constante} \ .$$

La condition est évidemment suffisante (cf. exemple 8.1.1). Réciproquement f est à la fois croissante et décroissante par (i) , donc constante. □

EXEMPLE 1 Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\operatorname{arcsinh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right) \ .$$

En effet $\sinh' = \cosh$, donc

$$\operatorname{arcsinh}'(x) = \frac{1}{\cosh(\operatorname{arcsinh} x)} = \frac{1}{\sqrt{\sinh^2(\operatorname{arcsinh} x) + 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

et

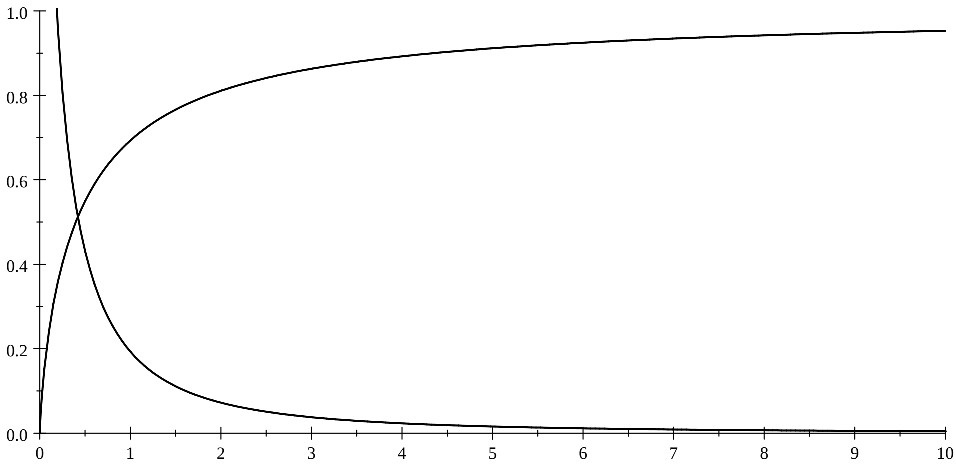
$$\partial_x \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} \cdot \left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \ .$$

Mais comme $\operatorname{arcsinh} 0 = 0$ et $\ln 1 = 0$, on obtient le résultat. □

EXEMPLE 2 La fonction

$$x \longmapsto x\cdot\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$$

est strictement croissante et d'image $]0,1[$.



$\mathrm{id}\cdot\ln\left(1+\frac{1}{\mathrm{id}}\right) : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \,]0,1[$
$\ln\left(1+\frac{1}{\mathrm{id}}\right) - \frac{1}{1+\mathrm{id}} : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$

On a

$$\lim_{x\to 0+} x\cdot\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0+}\left[x\cdot\ln(1+x) - x\cdot\ln x\right] = 0 \ ,$$

puisque

$$\lim_{x\to 0+} \ln(1+x) = \ln 1 = 0$$

par la continuité de $\ln$, et

$$\lim_{x\to 0+} x\cdot\ln\ x = 0$$

par 7.16.3.

On a

$$\lim_{x\to\infty} x\cdot\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = 1$$

(cf. exercice 7.12.1). On peut aussi le démontrer de la manière suivante, méthode analogue à celle de l'exemple 8.3.6. Avec le changement de variable $y = 1+\frac{1}{x}$, et puisque $\lim_{x\to 0+}\left(1+\frac{1}{x}\right) = 1$, on obtient

$$\lim_{x\to 0+} x\cdot\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \lim_{y\to 1}\frac{\ln y - \ln 1}{y-1} = \ln'(1) = 1 \ .$$

Il est également possible d'utiliser cet exemple directement en écrivant

$$x \cdot \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x \ ,$$

donc

$$\lim_{x\to\infty} x \cdot \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \ln\left(\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right) = \ln e^1 = 1 \ ,$$

puisque ln est continue en e .

Calculons maintenant la dérivée de cette fonction. On a

$$\left(x \cdot \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)' = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) + x \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{1+x} =$$

$$= \ln(1+x) - \ln x - \frac{1}{1+x} \ .$$

Comme par la formule des accroissements finis, il existe un $\xi \in \left]x, 1+x\right[$ tel que

$$\ln(1+x) - \ln x = \ln' \xi = \frac{1}{\xi} > \frac{1}{1+x} \ ,$$

on obtient

$$\left(x \cdot \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)' > 0 \ ,$$

ce qui finit de prouver que la fonction est strictement croissante. $\square$

EXERCICE 1 Soient $f : J \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable et $a \in J^\circ$ tel que $f'(a) > 0$.

(a) Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$a - \varepsilon \leqslant x \leqslant a \quad \Longrightarrow \quad f(x) \leqslant f(a)$$

et

$$a \leqslant x \leqslant a + \varepsilon \quad \Longrightarrow \quad f(a) \leqslant f(x) \ .$$

(b) Est-il possible d'en déduire que $f_{|[a-\varepsilon,a+\varepsilon]}$ est strictement croissante ? Démonstration ou contre-exemple !

EXERCICE 2 Soit $f : J \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que $f(0) = 0$ et définissons

$$g : \left]0, \infty\right[\longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \frac{f(x)}{x} \ .$$

Montrer

(a) g est dérivable et prolongeable par continuité en 0 .

(b) Si f' est croissante, alors le prolongement continu de g est croissant.

Utiliser la proposition 8.6.(ii) et la formule des accroissements finis appliquée à f .

EXERCICE 3 Soient $f, g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ des fonctions dérivables telles que

$$f \cdot g' - f' \cdot g \neq 0 \text{ dans } J \ .$$

Montrer que g possède entre deux zéros voisins de f exactement un zéro.

Trouver un exemple montrant que le résultat est faux si la condition n'est satisfaite que dans J° .

EXERCICE 4 Montrer les formules

(a)

$$\operatorname{arccosh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$$

(b)

$$\operatorname{arctanh} x = \frac{1}{2} \cdot \ln \frac{1+x}{1-x} \ .$$

8.7 Primitives

DEFINITION Soit $f : J \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction (continue). Une *primitive* de f est une fonction $F : J \longrightarrow \mathbb{C}$ dérivable telle que

$$F' = f \ .$$

REMARQUE On est souvent conduit à la recherche d'une primitive, par exemple si l'on veut retrouver le chemin parcouru connaissant la vitesse, voire l'accélération. On détermine souvent une primitive par tâtonnement, sans oublier la vérification, ce qui permet de calculer des intégrales comme nous le verrons. Pour prouver que toute fonction continue possède une primitive, nous aurons besoin de la théorie de l'intégration .

THEOREME (d'unicité) *Soient $f : J \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction et $F_0 : J \longrightarrow \mathbb{C}$ une primitive de f . Alors $F : J \longrightarrow \mathbb{C}$ est une primitive de f si, et seulement si, on a*

$$F = F_0 + c \quad \textit{pour un } c \in \mathbb{C} \ .$$

En effet il vient

$$(F - F_0)' = F' - F_0' = f - f = 0 \ ,$$

d'où le résultat par le corollaire 8.6. □

EXEMPLE 1 Equation différentielle de l'exponentielle

$$f' = c \cdot f \ .$$

Beaucoup de problème d'évolution (population, substance radio-active ou médicamenteuse) s'exprime en disant que la variation instantanée $f'(t)$ d'une grandeur f variant, par exemple au cours du temps t , est proportionnelle à cette grandeur $f(t)$ en cet instant, i.e.

$$f'(t) = c \cdot f(t) \ ,$$

où c est le coefficient de proportionnalité. On a souvent $c \in [0,1]$ et on l'exprime en % . En outre, on connait la valeur de f au temps initial τ : $f(\tau) = \eta$.

On le résultat suivant :

PROPOSITION *Soient $\tau \in J$ et $c, \eta \in \mathbb{C}$. Il existe une et une seule fonction dérivable*

$$f : J \longrightarrow \mathbb{C}$$

solution du problème avec condition initiale

$$f' = c \cdot f \quad \textit{et} \quad f(\tau) = \eta \ . \tag{$*$}$$

On a

$$f = \eta \cdot e^{c \cdot (\diamond - \tau)} \ .$$

Pour prouver l'unicité, nous allons montrer que toute solution de $(*)$ est égale à cette fonction. On procède par essai (Ansatz). Si f est solution de notre problème, posons

$$g := e^{-c\cdot\diamond} \cdot f \ .$$

Il vient alors

$$g' = -c \cdot e^{-c\cdot\diamond} \cdot f + e^{-c\cdot\diamond} \cdot f' = -c \cdot e^{-c\cdot\diamond} \cdot f + c \cdot e^{-c\cdot\diamond} \cdot f = 0 \ .$$

Par le théorème d'unicité, on en déduit que g est constante. Mais comme

$$g(\tau) = e^{-c\cdot\tau} \cdot f(\tau) = \eta \cdot e^{-c\cdot\tau} \ ,$$

on obtient

$$e^{-c\cdot\diamond} \cdot f = \eta \cdot e^{-c\cdot\tau} \ ,$$

donc

$$f = \eta \cdot e^{c\cdot(\diamond-\tau)} \ .$$

La fonction $f := \eta \cdot e^{c\cdot(\diamond-\tau)}$ est évidemment solution de $(*)$, puisque

$$f' = \eta \cdot e^{c\cdot(\diamond-\tau)} \cdot c = c \cdot f$$

et

$$f(\tau) = \eta \cdot e^{c\cdot(\tau-\tau)} = \eta \ .$$

$\square$

EXEMPLE 2 Datation à l'aide du carbone C^{14}

La désintégration d'un matériel radioactif est décrit par la loi

$$m' = -\lambda \cdot m \ ,$$

où $m(t)$ désigne la masse (ou la concentration) de ce matériel au temps t et λ le taux de désintégration. Si m_0 désigne la masse au temps t_0 , on a

$$m(t) = m_0 \cdot e^{-\lambda\cdot(t-t_0)} \ .$$

Si τ est la *demi-vie* , par exemple 5568 années pour C^{14} , on a par définition

$$\frac{1}{2} \cdot m_0 = m(t_0+\tau) = m_0 \cdot e^{-\lambda\cdot\tau} \ ,$$

donc

$$\lambda = \frac{\ln 2}{\tau} \ .$$

Ainsi

$$m(t) = m_0 \cdot e^{-\frac{\ln 2}{\tau}\cdot(t-t_0)} \ .$$

Le rapport u_0 du carbone C^{14} à son isotope C^{12} , dû aux rayons cosmiques, est resté constant jusqu'en 1950. Ce rapport est le même dans tout être vivant par l'intermédiaire de la respiration. A sa mort le carbone C^{14} qu'il contient se désintègre et le rapport $u(T)$ du C^{14} sur C^{12} après T années est donné par

$$u(T) = u_0 \cdot e^{-\frac{\ln 2}{\tau}\cdot T} \ .$$

En mesurant $u(T)$, on en déduit que

$$T = \frac{\tau}{\ln 2} \cdot \ln\left(\frac{u_0}{u(T)}\right) \ .$$

EXERCICE 1 Soient $\tau \in J$ et $\eta \in \mathbb{C}$. Montrer qu'il existe une et une seule fonction dérivable $f : J \longrightarrow \mathbb{C}$ solution du problème avec condition initiale :

$$f' = f + \exp \quad \text{et} \quad f(\tau) = \eta \ ,$$

et déterminer cette fonction, en utilisant l'Ansatz $f = g \cdot \exp$.

EXERCICE 2 Pour décrire l'évolution de la concentration alcoolique dans le sang, on utilise le modèle suivant. Soient $f, g : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ la quantité d'alcool dans l'estomac et le sang respectivement. Alors f et g sont solution du problème avec conditions initiales

$$f' = -\alpha \cdot f \quad \text{et} \quad g' = \alpha \cdot f - \beta \cdot g \ ,$$

pour des constantes $\alpha, \beta > 0$, et

$$f(0) = \xi \geqslant 0 \quad \text{et} \quad g(0) = \eta \geqslant 0 \ .$$

Calculer cette solution, montrer que g possède un maximum et déterminer sa valeur. Pour simplifier on peut prendre $1 = \alpha \neq \beta$ et $\eta = 0$.

8.8 Règle de l'Hospital

PROPOSITION (Règle élémentaire) *Soient $f, g : J \longrightarrow \mathbb{C}$ des fonctions dérivables et $c \in J$ tels que $g(x) \neq 0$ pour tout $x \in J \setminus \{c\}$.*

Si $f(c) = g(c) = 0$ et $g'(c) \neq 0$, alors

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \ .$$

La démonstration est simple. En effet si $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite de J convergente vers c telle que $x_k \neq c$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$\frac{f(x_k)}{g(x_k)} = \frac{f(x_k) - f(c)}{g(x_k) - g(c)} = \frac{\frac{f(x_k)-f(c)}{x_k - c}}{\frac{g(x_k)-g(c)}{x_k - c}}$$

et le membre de droite converge vers

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} \ .$$

$\square$

En pratique on peut avoir besoin de la règle plus générale suivante :

THEOREME *Soient $f, g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ des fonctions dérivables et c une extrémité de J n'appartenant pas à J . On suppose que $g, g' \neq 0$ sur J et que*

(i)

$$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} g(x) = 0$$

ou bien

(ii)

$$\lim_{x \to c} g(x) = \pm\infty \ .$$

Si $\lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe dans $\overline{\mathbb{R}}$, alors $\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)}$ existe dans $\overline{\mathbb{R}}$ et

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} \ .$$

Nous n'allons considérer que le cas où

$$c \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \alpha := \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} \in \mathbb{R} \ ,$$

les autres cas $c = \pm\infty$ ou $\alpha = \pm\infty$ se prouvant de manière analogue, avec les modifications habituelles (cf. 7.9).

Etant donné $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que l'on ait

$$\left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - \alpha \right| \leqslant \varepsilon \quad \text{si } x \in J \cap [c - \delta, c + \delta] \ .$$

Soient alors $x \in J \cap [c - \delta, c + \delta]$ et $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de J convergente vers c telle que $x_k \neq x$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Par la formule des accroissements finis 8.5, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $g(x) \neq$

$g(x_k)$ et il existe ξ_k entre x et x_k tel que

$$\frac{f(x)-f(x_k)}{g(x)-g(x_k)}=\frac{f'(\xi_k)}{g'(\xi_k)}\ .$$

Pour tout k assez grand, on a $x,x_k \in J\cap[c-\delta,c+\delta]$, donc aussi $\xi_k \in J\cap[c-\delta,c+\delta]$, et par suite

$$\frac{f'(\xi_k)}{g'(\xi_k)}\in[\alpha-\varepsilon,\alpha+\varepsilon]\ .$$

Démonstration de (i) On a $\lim_k f(x_k)=\lim_k g(x_k)=0$, donc les limites suivante existent et

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_k \frac{f(x)-f(x_k)}{g(x)-g(x_k)}=\lim_k \frac{f'(\xi_k)}{g'(\xi_k)}\in[\alpha-\varepsilon,\alpha+\varepsilon]\ .$$

On en déduit évidemment que

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=\alpha\ .$$

Démonstration de (ii) On a $\lim_k g(x_k)=\pm\infty$, donc

$$\lim_k \frac{g(x)}{g(x_k)}=\lim_k \frac{f(x)}{g(x_k)}=0\ .$$

On obtient alors

$$\frac{f(x_k)}{g(x_k)}=\frac{f(x_k)-f(x)}{g(x_k)}+\frac{f(x)}{g(x_k)}=\left(1-\frac{g(x)}{g(x_k)}\right)\cdot\frac{f(x_k)-f(x)}{g(x_k)-g(x)}+\frac{f(x)}{g(x_k)}=$$

$$=\left(1-\frac{g(x)}{g(x_k)}\right)\cdot\frac{f'(\xi_k)}{g'(\xi_k)}+\frac{f(x)}{g(x_k)}\in[\alpha-2\varepsilon,\alpha+2\varepsilon]\ ,$$

pour tout k encore plus grand. On en déduit évidemment que $\lim_k \frac{f(x_k)}{g(x_k)}=\alpha$, ce qui finit aussi de prouver que

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=\alpha\ .$$

□

EXEMPLE 1 Redémontrons l'une des formules de 7.16.3. Pour tout $s\in\mathbb{R}_+^*$, on a

$$\lim_{x\to 0+} x^s\cdot\ln x=\lim_{x\to 0+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x^s}}=\lim_{x\to 0+}\frac{\frac{1}{x}}{(-s)\cdot x^{-s-1}}=-\frac{1}{s}\cdot\lim_{x\to 0+}x^s=0\ .$$

EXEMPLE 2 On a

$$\lim_{x\to\infty} x\cdot\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)=1 \quad \text{et} \quad \lim_{y\to\frac{\pi}{2}-}\left(\frac{\pi}{2}-y\right)\cdot\tan y=1\ .$$

Nous savons que

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2}\ .$$

Ainsi

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{1+x^2} = 1 \ .$$

La seconde formule s'obtient par le changement de variable $x = \tan y$. □

REMARQUE 1 La règle élémentaire de l'Hospital revient à utiliser l'approximation affine des fonctions f et g (cf. théorème 8.1). On a

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)\cdot(x-c)+\varphi(y)}{g'(c)\cdot(x-c)+\psi(y)} = \frac{f'(c)+\frac{\varphi(y)}{x-c}}{g'(c)+\frac{\psi(y)}{x-c}} \ ,$$

d'où le résultat. Nous généraliserons cette possibilité avec la formule de Taylor (cf. 8.9).

REMARQUE 2 La régle n'est pas toujours applicable directement. Par exemple pour calculer

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\sqrt{1-\cos x}}{x} \ ,$$

il ne faut pas dériver $\sqrt{1-\cos}$, l'expression se compliquant. Il suffit, par exemple, d'écrire

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\sqrt{1-\cos x}}{x} = \sqrt{\lim_{x\to 0+} \frac{1-\cos x}{x^2}} =$$

$$= \sqrt{\lim_{x\to 0+} \frac{\sin x}{2x}} = \sqrt{\lim_{x\to 0+} \frac{\cos x}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \ .$$

EXERCICE 1 Calculer

$$\lim_{x\to 1-} \frac{\frac{\pi}{2} - \arcsin x}{\sqrt{1-x}} \ .$$

EXERCICE 2 Calculer

$$\lim_{0\neq x\to 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}\right)$$

à l'aide de la règle de l'Hospital, mais aussi en utilisant l'estimation du reste. Laquelle des deux méthodes citées est la meilleure ?

Idem pour

$$\lim_{0\neq x\to 0} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}\right) \ ,$$

$$\lim_{x\to\infty} \left(x^3 \cdot \sin\frac{1}{x} - x^2\right)$$

et

$$\lim_{0\neq x\to 0} \frac{\sin x - x + \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{120}}{x^7} \ .$$

EXERCICE 3 Calculer

$$\lim_k k \cdot \left(k^{\frac{1}{k}} - 1\right) \quad \text{et} \quad \lim_k \sqrt{k} \cdot \left(k^{\frac{1}{k}} - 1\right) \ .$$

8.9 Formule de Taylor

DEFINITION 1 Soit $f : J \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction. On dit que f est *deux fois dérivable* (dans J) si f est dérivable dans J et si sa dérivée f' l'est aussi. La fonction

$$f'' := (f')'$$

s'appelle la *deuxième (fonction) dérivée* de f .

On définit de même, pour $k \in \mathbb{N}$, la notion de fonction *k-fois dérivable* . On pose

$$f^{(0)} := f \quad \text{et} \quad f^{(l+1)} := \left(f^{(l)}\right)' \quad \text{pour } l \in \mathbb{N} \text{ tel que } l < k \ ,$$

et on dit que $f^{(k)}$ est la *k-ième (fonction) dérivée* de f .

On dit que f est *k-fois continûment dérivable* si f est k-fois dérivable et si $f^{(k)}$ est continue. On désigne par $\mathcal{C}^{(k)}(J)$ l'ensemble de toutes ces fonctions et on pose

$$\partial^k : \mathcal{C}^{(k)}(J) \longrightarrow \mathcal{C}(J) : f \longmapsto f^{(k)} \ .$$

Remarquons que $\mathcal{C}(J) := \mathcal{C}^{(0)}(J)$ est l'ensemble des fonctions continues sur J .

On dit que f est *indéfiniment dérivable* si elle est k-fois dérivable quel que soit $k \in \mathbb{N}$.

REMARQUE 1 Par le corollaire 8.1, si une fonction f est k-fois dérivable, alors sa l-ième dérivée $f^{(l)}$ est continue pour tout $l < k$ et on a

$$\partial^l : \mathcal{C}^{(k)}(J) \longrightarrow \mathcal{C}^{(k-l)}(J) : f \longmapsto f^{(l)} \ .$$

Toutes les dérivées d'une fonction indéfiniment dérivable sont continues.

DEFINITION 2 Si f est k-fois dérivable et $x \in J$, alors

$$T_k f := \sum_{l=0}^{k} \frac{f^{(l)}(x)}{l!} \cdot (\cdot - x)^l$$

s'appelle le *polynôme de Taylor de degré k* de f en x .

Pour tout $j = 0, \ldots, k$, on a

$$(T_k f)^{(j)}(x) = f^{(j)}(x) \ ,$$

car

$$(T_k f)^{(j)} = \sum_{l=j}^{k} \frac{f^{(l)}(x)}{(l-j)!} \cdot (\cdot - x)^{l-j} \ .$$

THEOREME (Formule de Taylor avec reste de Lagrange) *Soient $f : J \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction k-fois continûment dérivable telle que $f^{(k)}$ soit dérivable dans J° et $x \in J$.*

Pour tout $y \in J$ tel que $y \neq x$, il existe un ξ strictement entre x et y tel que

$$f(y) = \sum_{l=0}^{k} \frac{f^{(l)}(x)}{l!} \cdot (y-x)^l + \frac{f^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!} \cdot (y-x)^{k+1} \quad .$$

La première démonstration a l'aide de la formule des accroissements finis a été donnée par Ampère en 1806. Lagrange a donné le reste sous cette forme à partir de sa forme intégrale (cf. 9.12).

Considérons sur l'intervalle fermé $J_{x,y}$ entre x et y , la fonction g définie par

$$g(t) := f(y) - \sum_{l=0}^{k} \frac{f^{(l)}(t)}{l!} \cdot (y-t)^l - a \cdot \frac{(y-t)^{k+1}}{(k+1)!} \quad \text{pour tout } t \in J_{x,y} \ ,$$

en ayant choisi $a \in \mathbb{R}$ tel que $g(x) = 0$. On a également $g(y) = 0$ et g est continue dans $J_{x,y}$. Puisque g est dérivable dans ${J_{x,y}}^{\circ} \subset J^{\circ}$, le théorème de Rolle 8.5 entraîne l'existence d'un $\xi \in {J_{x,y}}^{\circ}$, donc strictement entre x et y , tel que $g'(\xi) = 0$. Mais comme

$$g'(t) = -\sum_{l=0}^{k} \frac{f^{(l+1)}(t)}{l!} \cdot (y-t)^l + \sum_{l=0}^{k} \frac{f^{(l)}(t)}{l!} \cdot l \cdot (y-t)^{l-1} + a \cdot \frac{(y-t)^k}{k!} =$$

$$= -\frac{f^{(k+1)}(t)}{k!} \cdot (y-t)^k + a \cdot \frac{(y-t)^k}{k!} \ ,$$

il vient

$$a = f^{(k+1)}(\xi) \quad .$$

En posant $t = x$, on obtient le résultat. □

COROLLAIRE *Soient $f : J \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction $k+1$-fois dérivable et $x \in J$. Alors*

$$f^{(k+1)} = 0 \ \textit{dans}\ J \quad \Longleftrightarrow \quad f = \sum_{l=0}^{k} \frac{f^{(l)}(x)}{l!} \cdot (\diamond - x)^l \quad .$$

Il suffit de considérer la partie réelle et la partie imaginaire de f . □

REMARQUE 2 Un polynôme de degré k coïncide avec son polynôme de Taylor. Ceci fournit une méthode élégante pour développer un polynôme. Si $P = \sum_{l=0}^{k} c_l \cdot \mathrm{id}^l$, alors pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, on a

$$P(y) = \sum_{l=0}^{k} \frac{P^{(l)}(x)}{l!} \cdot (y-x)^l \quad .$$

REMARQUE 3 Si pour $f : J \longrightarrow \mathbb{C}$ on écrit

$$f(y) = \sum_{l=0}^{k} \frac{f^{(l)}(x)}{l!} \cdot (y-x)^l + R_{k+1}(y) \ ,$$

la formule de Taylor montre que

$$R_{k+1}(y) = \frac{f^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!} \cdot (y-x)^{k+1}$$

pour un ξ strictement entre x et y . Si l'on a $\left|f^{(k+1)}\right| \leqslant M$ dans J° , alors

$$|R_{k+1}(y)| \leqslant \frac{M}{(k+1)!} \cdot |y-x|^{k+1} \quad \text{pour tout } y \in J \ ,$$

donc en particulier

$$\lim_{x \neq y \to x} \frac{R_{k+1}(y)}{(y-x)^j} = 0 \quad \text{pour tout } j = 0, 1, \ldots, k \ .$$

Ceci est en particulier satisfait si $J = [a, b]$ et si f est $(k+1)$-fois continûment dérivable dans J , puisqu'alors $f^{(k+1)}$ est bornée par le théorème de Weierstrass 7.10.

EXEMPLE Nous pouvons maintenant prouver facilement l'assertion faite dans la remarque 6.19, p. 168. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$\cos x = \sum_{l=0}^{k} \frac{(-1)^l}{(2l)!} \cdot x^{2l} + R_{2k+2}(x) \quad \text{et} \quad \sin x = \sum_{l=0}^{k} \frac{(-1)^l}{(2l+1)!} \cdot x^{2l+1} + R_{2k+3}(x)$$

et

$$|R_k(x)| \leqslant \frac{|x|^k}{k!} \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R} \ .$$

C'est immédiat, puisque les dérivées de cos et sin sont l'une de ces fonctions à un signe près et qu'elles prennent leurs valeurs dans $[-1, 1]$. □

EXERCICE 1 Soient $k \in \mathbb{N}^*$, $f : J \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction $(k-1)$-fois dérivable et $x \in J$. Si $f^{(k-1)}$ est dérivable en x , alors en écrivant

$$f(y) = \sum_{l=0}^{k} \frac{f^{(l)}(x)}{l!} \cdot (y-x)^l + R_{k+1}(y) \ ,$$

on a

$$\lim_{x \neq y \to x} \frac{R_{k+1}(y)}{(y-x)^k} = 0 \ .$$

Préciser la différence entre ce résultat et celui de la remarque 3 ci-dessus.

On utilisera la règle élémentaire de l'Hospital.

EXERCICE 2 Soient J un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f, g \in \mathcal{C}^{(n)}(J)$.

(a) Montrer que $f \cdot g \in \mathcal{C}^{(n)}(J)$ et la *règle de Leibniz*

$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot f^{(k)} \cdot g^{(n-k)} \ .$$

(b) Soit $f := \sin \cdot \cosh$. Calculer $f^{(2n)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ à l'aide de la règle de Leibniz.

EXERCICE 3

(a) Soient $c_1, c_2, \eta \in \mathbb{C}$. Si $c_1 \neq 0$, montrer à l'aide de l'Ansatz $f = g \cdot e^{-c_1 \cdot \mathrm{id}}$, que

$$f = \frac{c_2}{c_1} + \left(\eta - \frac{c_2}{c_1}\right) \cdot e^{-c_1 \cdot \mathrm{id}}$$

est l'unique solution du problème avec condition initiale

$$f' + c_1 \cdot f = c_2 \quad , \quad f(0) = \eta \ .$$

(b) Soient $\eta_0, \eta_1 \in \mathbb{C}$. Montrer que le problème avec condition initiale

$$f'' + f = 0 \quad , \quad f(0) = \eta_0 \quad , \quad f'(0) = \eta_1 \ .$$

possède une unique solution.

On fera l'Ansatz $f = g \cdot e^{i \cdot \mathrm{id}}$ et on montrera que $g'' + 2i \cdot g' = 0$.

(c) Quelles sont les solutions lorsque $(\eta_0, \eta_1) = (1, 0)$ et $(0, 1)$.

8.10 Condition suffisante d'extremum local strict

THEOREME *Soient $f : J \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction k-fois continûment dérivable telle que l'on ait*

$$f'(x) = f''(x) = \ldots = f^{(k-1)}(x) = 0 \quad et \quad f^{(k)}(x) \neq 0$$

pour un certain $k \in \mathbb{N}$ et un $x \in J^\circ$. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) *f possède en x un minimum, respectivement un maximum, local strict.*

(ii) *f possède en x un minimum, respectivement un maximum, local.*

(iii) *k est pair et $f^{(k)}(x) > 0$, respectivement $f^{(k)}(x) < 0$.*

Pour tout $y \in J$, on a

$$f(y) - f(x) = \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!} \cdot (y - x)^k \tag{$*$}$$

pour un ξ strictement entre x et y .

(i) $\Rightarrow$ (ii) C'est évident !

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Si f possède un minimum local, soient $(y_l)_{l\in\mathbb{N}}$ une suite de J convergente vers x telle que $y_l \neq x$ pour tout $l \in \mathbb{N}$ et $(\xi_l)_{l\in\mathbb{N}}$ la suite correspondante. On a alors $\lim_l \xi_l = x$ et

$$0 \leqslant f(y_l) - f(x) = \frac{f^{(k)}(\xi_l)}{k!} \cdot (y_l - x)^k \ .$$

Si l'on choisit $(y_l)_{l\in\mathbb{N}}$ telle que $y_l > x$ pour tout $l \in \mathbb{N}$, on obtient $f^{(k)}(\xi_l) \geqslant 0$. Par la continuité de $f^{(k)}$, on en déduit que $f^{(k)}(x) \geqslant 0$, et par suite que $f^{(k)}(x) > 0$, puisque $f^{(k)}(x) \neq 0$. En choisissant maintenant la suite $(y_l)_{l\in\mathbb{N}}$ telle que $y_l < x$ pour tout $l \in \mathbb{N}$, la continuité de $f^{(k)}$ montre que $f^{(k)}(\xi_l) > 0$ pour l assez grand, et l'inégalité ci-dessus prouve que k est pair. La démonstration est analogue si f possède un maximum local.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Par la continuité de $f^{(k)}$, on voit que $f^{(k)}(y)$ a le même signe pour tous les y proches de x que $f^{(k)}(x)$ (cf. exercice 7.1.1). Il en est de même de $f^{(k)}(\xi)$, d'où le résultat par $(*)$. □

COROLLAIRE *On suppose que f est deux fois continûment dérivable.*

(i) *Si f possède un minimum, resp. maximum, local en x , alors*

$$f'(x) = 0 \quad et \quad f''(x) \geqslant 0 \text{ , resp. } f''(x) \leqslant 0 \ .$$

(ii) *Si l'on a*

$$f'(x) = 0 \quad et \quad f''(x) > 0 \text{ , resp. } f''(x) < 0 \ ,$$

alors f possède un minimum, resp. maximum, local strict en x .

Pour une démonstration directe, il suffit de se rappeler la proposition 8.4 et de discuter la formule de Taylor

$$f(y) = f(x) + \frac{f''(\xi)}{2} \cdot (y-x)^2 \ ,$$

où ξ est un point strictement entre x et y . $\square$

EXEMPLE 1 La réciproque du corollaire (i) est fausse comme le montre l'exemple de id^3 . En effet

$$\left(\mathrm{id}^3\right)'(0) = 3\,\mathrm{id}^2(0) = 0 \quad \text{et} \quad \left(\mathrm{id}^3\right)''(0) = 6\,\mathrm{id}(0) = 0 \ .$$

Ceci ne contredit pas la proposition, puisque

$$\left(\mathrm{id}^3\right)^{(3)}(0) = 6$$

et 3 est impair !

Dans certains cas on ne peut pas décider à l'aide de la proposition si f possède un maximum ou minimum local, par exemple si f est indéfiniment dérivable et si $f^{(k)}(x) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

EXEMPLE 2 La fonction

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) & \\ & \text{si} \\ 0 & \end{cases} \begin{matrix} x \neq 0 \\ \\ x = 0 \end{matrix}$$

est indéfiniment dérivable et on a

$$f^{(k)}(x) = \begin{cases} p_k\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) & \\ & \text{si} \\ 0 & \end{cases} \begin{matrix} x \neq 0 \\ \\ x = 0 \end{matrix}$$

où p_k est un polynôme.

En effet, le cas $k = 0$ est trivial avec $p_0 = 1$. Si maintenant nous supposons que le résultat est vrai pour k , pour tout $x \neq 0$, il vient

$$f^{(k+1)}(x) = \left[p_k'\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \frac{-1}{x^2} + p_k\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \frac{2}{x^3}\right] \cdot \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

et il suffit de poser

$$p_{k+1} := -\,\mathrm{id}^2 \cdot p_k' + 2 \cdot \mathrm{id}^3 \cdot p_k \ .$$

Pour $x = 0$, on a finalement

$$f^{(k+1)}(0) = \lim_{0 \neq x \to 0} \frac{1}{x} \cdot p_k\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \lim_{y \to \infty} y \cdot p_k(y) \cdot \exp\left(-y^2\right) = 0 \ .$$

$\square$

EXERCICE Montrer que la fonction

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{x}\right) & \\ & \text{si} \\ 0 & \end{cases} \begin{matrix} x > 0 \\ \\ x \leqslant 0 \end{matrix}$$

est indéfiniment dérivable.

8.11 Convexité

DEFINITION On dit qu'une fonction $f : J \longrightarrow \mathbb{R}$ est *convexe* si, pour tout $x, y \in J$ tels que $x \neq y$, on a

$$f\left(\alpha \cdot x + [1-\alpha] \cdot y\right) \leqslant \alpha \cdot f(x) + (1-\alpha) \cdot f(y) \quad \text{pour tout } \alpha \in [0,1] \ ,$$

ou bien

$$f(z) \leqslant \frac{y-z}{y-x} \cdot f(x) + \frac{z-x}{y-x} \cdot f(y) \quad \text{pour tout } z \text{ entre } x \text{ et } y \ ,$$

en posant

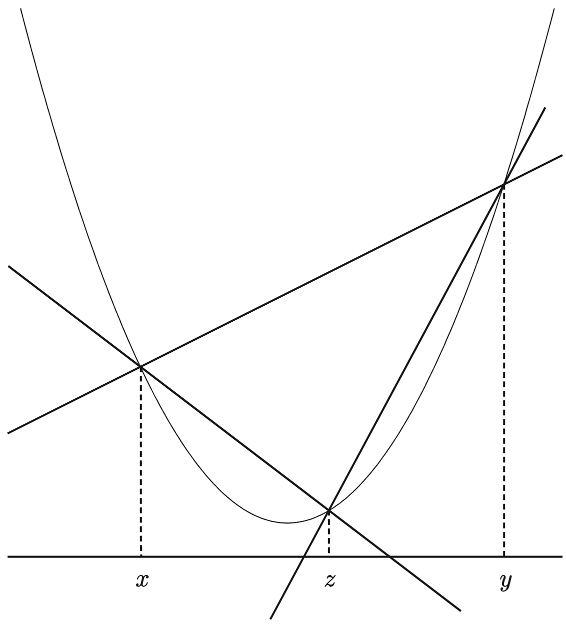
$$z = \alpha \cdot x + (1-\alpha) \cdot y \quad \text{ou} \quad \alpha = \frac{y-z}{y-x} \ .$$

On dit que f est *concave* si $-f$ est convexe, ce qui revient à retourner les inégalités.

PROPOSITION *Si $f : J \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue et dérivable dans J° , alors f est convexe si, et seulement si, $f' : J^{\circ} \longrightarrow \mathbb{R}$ est croissante.*

Si f est convexe, $x, y \in J^{\circ}$ tels que $x < y$ et $z \in \left]x, y\right[$, alors

$$f(z) \leqslant \left(1 + \frac{x-z}{y-x}\right) \cdot f(x) + \frac{z-x}{y-x} \cdot f(y) = \frac{y-z}{y-x} \cdot f(x) + \left(\frac{z-y}{y-x} + 1\right) \cdot f(y) \ ,$$



donc

$$\frac{f(z) - f(x)}{z-x} \leqslant \frac{f(y) - f(x)}{y-x} \leqslant \frac{f(y) - f(z)}{y-z} \ .$$

On a alors

$$f'(x) = \lim_{x \neq z \to x} \frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leqslant \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leqslant \lim_{y \neq z \to y} \frac{f(z) - f(y)}{z - y} = f'(y) \ .$$

Réciproquement, par la formule des accroissements finis (corollaire 8.5), on a

$$\frac{f(z) - f(x)}{z - x} = f'(\xi) \quad \text{et} \quad \frac{f(y) - f(z)}{y - z} = f'(\eta)$$

pour un ξ entre x et z , et un η entre z et y . Ainsi $\xi \leqslant \eta$; on en déduit que $f'(\xi) \leqslant f'(\eta)$ et par suite

$$\frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leqslant \frac{f(y) - f(z)}{y - z} \ ,$$

d'où l'on tire l'inégalité de convexité. □

COROLLAIRE *Si f est continue et deux fois dérivable dans J° , alors f est convexe si, et seulement si, on a $f'' \geqslant 0$ dans J° .*

C'est immédiat par la proposition 8.6.(i) appliquée à f' . □

EXEMPLE 1 La fonction exponentielle réelle est convexe.

En effet $\exp'' = \exp \geqslant 0$. □

EXEMPLE 2 La fonction logarithmique est concave.

En effet $\ln'' = -\frac{1}{\mathrm{id}^2} \leqslant 0$ sur $]0, \infty[$. □

APPLICATION Pour tout $p, q \in \,]1, \infty[$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ et tout $x, y \in \mathbb{R}_+$, on a

$$x^{\frac{1}{p}} \cdot y^{\frac{1}{q}} \leqslant \frac{x}{p} + \frac{y}{q} \ .$$

Cette inégalité généralise celle que l'on a entre les *moyennes géométrique* et *arithmétique* :

$$\sqrt{x \cdot y} \leqslant \frac{x + y}{2} \ .$$

On peut supposer que $x, y \in \,]0, \infty[$ et comme ln est concave, on a

$$\ln \left(\frac{x}{p} + \frac{y}{q} \right) \geqslant \frac{1}{p} \cdot \ln x + \frac{1}{q} \cdot \ln y \ .$$

Puisque exp est croissante, on en déduit que

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} \geqslant \exp \left(\frac{1}{p} \cdot \ln x + \frac{1}{q} \cdot \ln y \right) = x^{\frac{1}{p}} \cdot y^{\frac{1}{q}} \ .$$

□

REMARQUE Si $f'' > 0$ sur J , alors $\{f = c\}$ pour $c \in \mathbb{R}$ a au plus deux éléments.

En effet $(f - c)' = f'$ est strictement croissante, donc possède au plus un zéro. Le théorème de Rolle 8.5 montre alors que $f - c$ possède au plus deux zéros. □

Si f est seulement convexe (i.e. $f'' \geqslant 0$), ce résultat est faux, comme le montre l'exemple d'une fonction affine ou de la fonction

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & & x \leqslant 0 \\ & \text{si} & \\ x^3 & & 0 < x \end{array} \right. ,$$

qui est 2-fois continûment dérivable. La deuxième dérivée est $6 \cdot \max(\cdot, 0)$.

EXERCICE Soient J un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : J \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Montrer :

(a) Si f est convexe, alors f est continue.

Etant donné $x \in J$ et $a, b \in J$ tels que $a < x < b$, on montrera que, pour tout $y \in [a, b]$, on a

$$f(y) \leqslant f(x) + M(y - x) \quad \text{bzw.} \quad f(y) \geqslant f(x) + m(y - x)$$

pour certaines constantes $m, M \in \mathbb{R}$, en étudiant séparemment les cas $y \leqslant x$ et $y \geqslant x$.

(b) Si $f \in \mathcal{C}^{(2)}(J)$, alors f est convexe si, et seulement si, le graphe de f est au dessus de chacune de ses tangentes, i.e. si pour tout $x, y \in J$, on a

$$f(y) \geqslant f(x) + f'(x)(y - x) \ .$$

8.12 Discussion d'une fonction

Nous rappelons simplement les différents points à considérer lors de la discussion d'une fonction :

(a) Valeurs limites au bord.

(b) Prolongement par continuité, dérivabilité.

(c) Zéros, ou certaines autres valeurs caractéristiques.

(d) Monotonie.

(e) Points critiques : $\{f' = 0\}$, changement de signe de f' , extremums locaux.

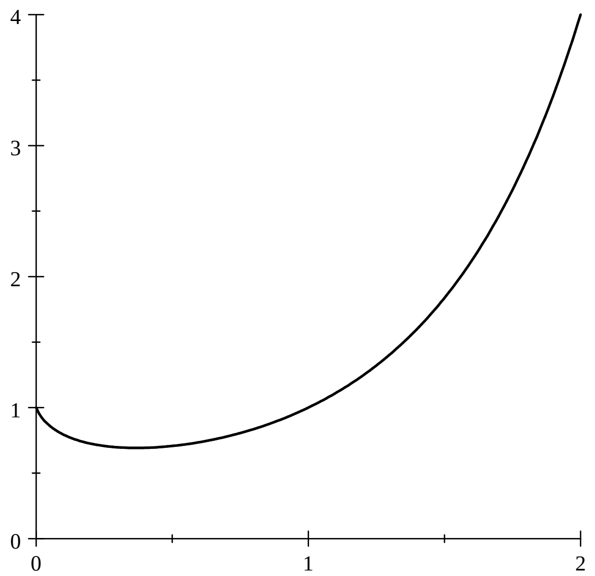
(f) $\{f'' = 0\}$, changement de signe de f'' : *Points d'inflexion.*

(g) Convexité.

EXEMPLE Discutons la fonction

$$\mathrm{id}^{\mathrm{id}} := \exp \circ (\mathrm{id} \cdot \ln) : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto x^x \ ,$$

en remarquant que la fonction $\mathrm{id} \cdot \ln$ peut être prolongée par continuité en 0 par 0 (cf. exemple 7.16.3).



Elle est donc continue dans $\mathbb{R}_+$. Rappelons qu'en 0 on a

$$\lim_{x \to 0+} x^x = \lim_{x \to 0+} e^{x \cdot \ln x} = e^0 = 1 = 0^0 \ .$$

En outre

$$\lim_{x \to \infty} x^x = \infty \ .$$

Elle est indéfiniment dérivable dans $]0, \infty[$ et non-dérivable en 0 .

En effet

$$\lim_{x\to 0+}\frac{x^x-1}{x-0}=\lim_{x\to 0+}\frac{e^{x\cdot\ln x}}{x}=\lim_{x\to 0+}e^{x\cdot\ln x}\cdot\left(\ln x+\frac{x}{x}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0+}(\ln x+1)\cdot e^{x\cdot\ln x}=-\infty\ .$$

On a

$$\partial x^x=(\ln x+1)\cdot x^x\quad\text{et}\quad\partial^2 x^x=\left[(\ln x+1)^2+\frac{1}{x}\right]\cdot x^x>0\text{ pour tout }x>0\ .$$

Elle est strictement positive et

$$\{x^x=1\}=\{0,1\}\ .$$

En outre

$$\{\partial x^x=0\}=\left\{\frac{1}{e}\right\}\quad,\quad\frac{1}{e}\simeq 0,3678\ldots\ .$$

Elle possède en $\frac{1}{e}$ en minimum, valant $e^{-\frac{1}{e}}\simeq 0,6922\ldots$, car elle est strictement décroissante à gauche de ce point et strictement croissante à droite. Elle est convexe.

EXERCICE Discuter les fonctions suivantes :

(a)

$$\mathbb{R}_+^*\longrightarrow\mathbb{R}:x\longmapsto\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}\ .$$

(b)

$$\mathbb{R}_+^*\longrightarrow\mathbb{R}:x\longmapsto\ln^2 x-\ln x^2\ .$$

(c)

$$\mathbb{R}_+^*\longrightarrow\mathbb{R}:x\longmapsto\frac{\ln x}{x}\ .$$

8.13 Séries de Taylor

DEFINITION 1 Soient $f : J \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction indéfiniment dérivable et $x \in J$. On dit que

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{f^{(l)}(x)}{l!} \cdot (\mathrm{id} - x)^l$$

est la *série de Taylor de* f *au voisinage de* x . On définit, pour tout $k \in \mathbb{N}$, le $(k+1)$-ième reste $R_{k+1} : J \longrightarrow \mathbb{R}$ par

$$f(y) = \sum_{l=0}^{k} \frac{f^{(l)}(x)}{l!} \cdot (y - x)^l + R_{k+1}(y) \quad \text{pour tout } y \in J \ .$$

La formule de Taylor 8.9 montre, si f est réelle, que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, le reste peut se mettre sous la forme

$$R_k(y) = \frac{f^{(k)}(\xi_k)}{k!} \cdot (y - x)^k$$

pour un ξ_k entre y et x . On a trivialement la

PROPOSITION *Pour que la série de Taylor de* f *au voisinage de* x *soit convergente au point* $y \in J$ *et que*

$$f(y) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{f^{(l)}(x)}{l!} \cdot (y - x)^l \ ,$$

il faut et il suffit que

$$\lim_{k \geqslant 1} R_k(y) = 0 \ .$$

DEFINITION 2 Dans ce cas on dit que la série de Taylor de f représente cette fonction en y .

EXEMPLE 1 Supposons que la fonction exponentielle réelle $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ait été introduite autrement que par sa série, par exemple comme l'unique fonction dérivable solution du problème avec condition initiale

$$f' = f \quad \text{et} \quad f(0) = 1 \ .$$

Il est bon de remarquer que l'existence n'est pas immédiate. Puisque $\exp^{(k)} = \exp$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, la série de Taylor de exp au voisinage de 0 est alors

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} \cdot \mathrm{id}^l \ .$$

Estimons le reste. On a

$$|R_k(y)| = \left|\frac{\exp(\xi_k)}{k!} \cdot y^k\right| \leqslant M \cdot \left|\frac{y^k}{k!}\right| \ ,$$

puisque exp est bornée sur l'intervalle entre 0 et y . La fonction exponentielle est donc représentée par sa série de Taylor, car $\left(\frac{|y|^k}{k!}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est une zéro-suite. Rappelons que ceci a été démontré en constatant que c'est la suite des termes de la série exponentielle, qui est convergente.

De la même manière on peut déterminer la série de Taylor de $\exp(i \cdot \mathrm{id}) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ au voisinage de 0 , ce qui revient en séparant la partie réelle et la partie imaginaire à déterminer les séries de Taylor de cos et sin .

EXEMPLE 2 Revenons à l'exemple 8.10. La série de Taylor de cette fonction au voisinage de 0 est la série nulle pour tout $y \in \mathbb{R}$. Elle ne représente cette fonction qu'en 0 , puisque

$$\exp\left(-\frac{1}{y^2}\right) > 0 \text{ pour tout } y \in \mathbb{R}^* \ .$$

EXEMPLE 3 Considérons la fonction $\ln(1+\mathrm{id}) : \left]-1,\infty\right[\longrightarrow \mathbb{R}$. On a

$$\partial^k \ln(1+\mathrm{id}) = (-1)^{k-1} \cdot \frac{(k-1)!}{(1+\mathrm{id})^k} \quad \text{pour } k \geqslant 1 \ .$$

En effet

$$\partial \ln(1+\mathrm{id}) = \frac{1}{(1+\mathrm{id})} \ ,$$

et si la formule est vraie pour k , il vient

$$\partial^{k+1} \ln(1+\mathrm{id}) = \partial\left[(-1)^{k-1} \cdot \frac{(k-1)!}{(1+\mathrm{id})^k}\right] =$$

$$= (-1)^{k-1} \cdot \frac{(k-1)! \cdot (-k)}{(1+\mathrm{id})^{k+1}} = (-1)^k \cdot \frac{k!}{(1+\mathrm{id})^{k+1}} \ .$$

□

La série de Taylor de $\ln(1+\mathrm{id})$ au voisinage de 0 est donc

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^{l-1}}{l} \cdot \mathrm{id}^l \ ,$$

et elle représente cette fonction en tous les points de $\left[-\frac{1}{2}, 1\right]$. En particulier

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^l = -\ln\left(1-\frac{1}{2}\right) = \ln 2 = \ln(1+1) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^{l-1}}{l} \ .$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et $y \in \left]-1,\infty\right[$, on a

$$R_k(y) = \frac{(-1)^{k-1} \cdot (k-1)!}{k! \cdot (1+\xi_k)^k} \cdot y^k = \frac{(-1)^{k-1}}{k} \cdot \left(\frac{y}{1+\xi_k}\right)^k$$

pour un ξ_k entre y et 0 . Mais

$$\left|\frac{y}{1+\xi_k}\right| \leqslant y \leqslant 1 \quad \text{si } 0 \leqslant y \leqslant 1 \ ,$$

$$\left|\frac{y}{1+\xi_k}\right| \leqslant \frac{-y}{1+y} \quad \text{si } -1 \leqslant y < 0$$

et

$$\frac{-y}{1+y} \leqslant 1 \quad \Longleftrightarrow \quad y \geqslant -\frac{1}{2} \ ,$$

donc

$$\lim_{k \geqslant 1} R_k(y) = 0 \quad \text{si } y \in \left[-\frac{1}{2}, 1\right] \ ,$$

ce qu'il fallait démontrer. □

Nous verrons plus tard (cf. exemple 9.12), en utilisant le reste sous forme intégrale, que cette série représente $\ln(1+\mathrm{id})$ sur $]-1,1]$.

EXERCICE

(a) Déterminer la série de Taylor de la fonction

$$[-1,\infty[\longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \sqrt{1+x}$$

au voisinage de 0 .

(b) Donner un intervalle dans lequel cette série représente la fonction. On montrera que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout $\delta \in [0,1[$, on a

$$|R_k(y)| \leqslant \frac{(2k-2)!}{2^{2k-1}k\,(k-1)!^2} \cdot |1-\delta|^{\frac{1}{2}-k} \cdot |y|^k \quad \text{pour tout } y \in [-\delta,\infty[$$

en utilisant la formule

$$\prod_{l=1}^{k-1}(2l-1) = \frac{(2k-2)!}{2^{k-1}(k-1)!} \ .$$

8.14 Méthode de Newton : cas convexe

Le théorème de Bolzano 7.5, p. 181, montre qu'une fonction continue $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$ possède au moins un zéro $\xi \in]a, b[$, i.e. $f(\xi) = 0$. Comment peut-on calculer une valeur approchée de ce zéro ?

THEOREME *Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continûment dérivable et convexe telle que*

$$f(a) < 0 \quad \text{et} \quad f(b) > 0 \; .$$

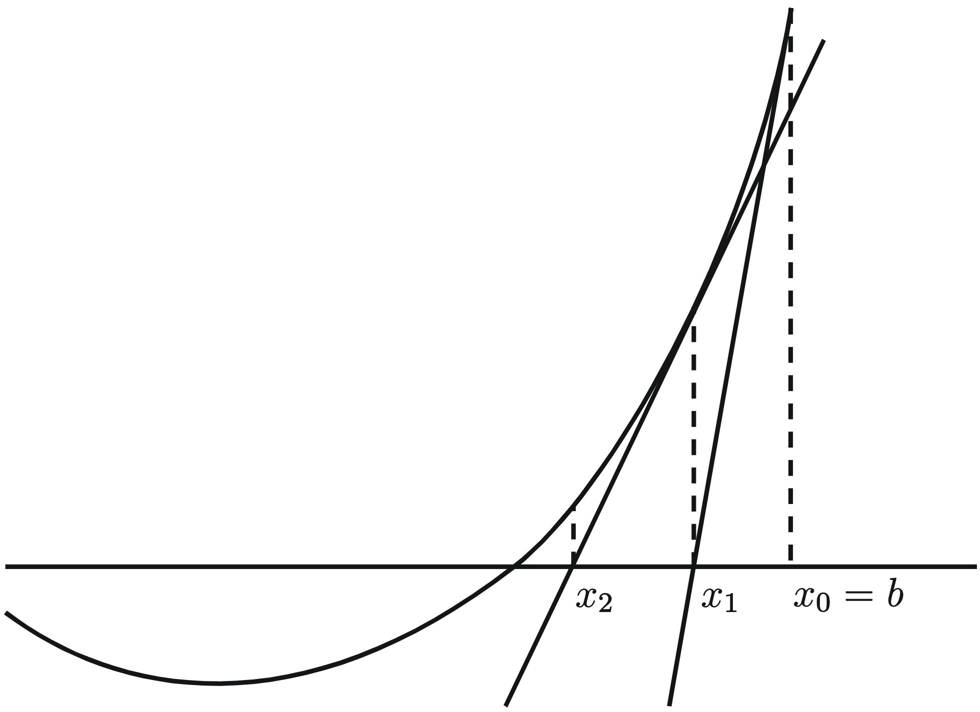
Alors

(i) *f possède un unique zéro $\xi \in]a, b[$.*
(ii) *Pour tout $x_0 \in [a, b]$ tel que $f(x_0) \geqslant 0$, la formule de récurrence*

$$x_{k+1} := x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

définit une suite décroissante $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de $[a, b]$ qui converge vers ξ .
(iii) *Si $f'(\xi) \geqslant m > 0$ et $f''(x) \leqslant M$ pour tout $x \in]\xi, b[$, alors*

$$|x_{k+2} - x_{k+1}| \leqslant |\xi - x_{k+1}| \leqslant \frac{M}{2m} \cdot |x_{k+1} - x_k|^2 \; .$$



Démonstration de (i) Nous savons que $f' : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est croissante par la proposition 8.11. Etant donné $x \in [a, b]$ tel que $f(x) \geqslant 0$, la formule des accroissements finis (corollaire

8.5) montre qu'il existe $\eta \in \left]a, x\right[$ tel que

$$f'(\eta) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geqslant \frac{-f(a)}{x - a} > 0 \ .$$

Pour tout $y \in [x, b]$, on a $y \geqslant \eta$, donc

$$f'(y) \geqslant f'(\eta) > 0 \ .$$

Ceci montre que f est strictement croissante dans $[x, b]$, donc que cette fonction ne peut s'y annuler qu'en x . Puisque f possède au moins un zéro par le théorème de Bolzano, on en déduit évidemment en raisonnant par l'absurde que f possède un unique zéro $\xi \in \left]a, b\right[$.

Pour tout $x \in [a, b]$, on a

$$x \geqslant \xi \quad \Longleftrightarrow \quad f(x) \geqslant 0 \tag{$*$}$$

et

$$x \geqslant \xi \quad \Longrightarrow \quad f'(x) > 0 \ . \tag{$**$}$$

Démonstration de (ii) Soit $x_0 \in [a, b]$ tel que $f(x_0) \geqslant 0$. Par $(*)$ on a $x_0 \geqslant \xi$. Nous allons montrer par récurrence que la suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est bien définie et que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $x_k \in [\xi, b]$.

Le cas $k = 0$ est clair par $(*)$. Démontrons le pas de récurrence. Mais comme par hypothèse on a $x_k \in [\xi, b]$, il vient $f(x_k) \geqslant 0$ et $f'(x_k) > 0$ par $(*)$ et $(**)$, et nous pouvons considérer

$$x_{k+1} := x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \ .$$

La fonction $g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$g(x) := f(x) - f(x_k) - f'(x_k) \cdot (x - x_k)$$

est dérivable et

$$g'(x) = f'(x) - f'(x_k) \leqslant 0 \quad \text{pour tout } x \leqslant x_k \ .$$

Elle est donc décroissante dans $[a, x_k]$ et comme $g(x_k) = 0$, on en déduit que $g \geqslant 0$ sur $[a, x_k]$. On a en particulier

$$0 \leqslant g(\xi) = f(\xi) - f(x_k) - f'(x_k) \cdot (\xi - x_k) = -f(x_k) - f'(x_k) \cdot (\xi - x_k) \ .$$

Ainsi

$$\xi \leqslant x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_{k+1} \leqslant x_k \leqslant b \ ,$$

ce que nous voulions démontrer.

Ceci montre également que la suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est décroissante et qu'elle est minorée par ξ , donc convergente. On a $\lim_k x_k \geqslant \xi$, donc $f'(\lim_k x_k) > 0$, et

$$\lim_k x_k = \lim_k x_{k+1} = \lim_k \left(x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \right) = \lim_k x_k - \lim_k \frac{f(\lim_k x_k)}{f'(\lim_k x_k)} \ ,$$

d'où l'on tire $f(\lim_k x_k) = 0$, i.e. $\lim_k x_k = \xi$ par l'unicité.

Démonstration de (iii) Puisque f' est croissante, sur $[\xi, b]$ on a $f' \geqslant f'(\xi) \geqslant m$, donc

$$(f - m \cdot (\mathrm{id} - \xi))' = f' - m \geqslant 0 \ .$$

Ceci montre que $f - m \cdot (\mathrm{id} - \xi)$ est croissante sur $[\xi, b]$, et par suite $\geqslant 0$ puisque cette fonction s'annule en ξ . Ainsi

$$f \geqslant m \cdot (\mathrm{id} - \xi) \quad \text{sur } [\xi, b] \ . \tag{$***$}$$

On introduit maintenant la fonction $h : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$h(x) := f(x) - f(x_k) - f'(x_k) \cdot (x - x_k) - \frac{M}{2} \cdot (x - x_k)^2 \ .$$

On obtient

$$h'(x) = f'(x) - f'(x_k) - M \cdot (x - x_k)$$

et

$$h''(x) = f''(x) - M \leqslant 0 \quad \text{pour tout } x \in \left]\xi, b\right[\ .$$

Ceci montre que h' est décroissante sur l'intervalle $[\xi, b]$. Mais comme $h'(x_k) = 0$, on en déduit que $h' \geqslant 0$ sur $[\xi, x_k]$. Ainsi h est croissante sur cet intervalle et comme $h(x_k) = 0$, on obtient $h \leqslant 0$ sur $[\xi, x_k]$. On a donc en particulier $h(x_{k+1}) \leqslant 0$, et par suite

$$0 \geqslant f(x_{k+1}) - f(x_k) - f'(x_k) \cdot (x_{k+1} - x_k) - \frac{M}{2} \cdot (x - x_k)^2 = f(x_{k+1}) - \frac{M}{2} \cdot (x - x_k)^2 \ .$$

Par $(***)$, on en déduit que

$$|\xi - x_{k+1}| \leqslant \frac{f(x_{k+1})}{m} \leqslant \frac{M}{2m} \cdot |x_{k+1} - x_k|^2 \ ,$$

ce qu'il fallait démontrer. □

REMARQUE On a un résultat analogue si $f(a) > 0$ et $f(b) < 0$. Dans ce cas la suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est croissante. On peut aussi remplaçer la convexité par la concavité de f , mais il faut alors choisir x_0 tel que $f(x_0) \leqslant 0$.

EXEMPLE 1 Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Si $a \in \mathbb{R}_+$ et $a \neq 0, 1$, la fonction

$$x \longmapsto x^p - a$$

satisfait aux hypothèses sur l'intervalle $[0, \max(1, a)]$. On retrouve le procédé ayant montré l'existence de la racine p-ième de a (cf. 5.6, p. 111).

EXEMPLE 2 Calcul de ln 2 , sachant calculer des valeurs approchées de e^x . On applique la méthode de Newton à la fonction

$$x \longmapsto e^x - 2 : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R} \ .$$

On a

$$x_{k+1} = x_k - 1 + 2 \cdot e^{-x_k} \ .$$

On obtient

$$x_0 = 1 \quad , \quad x_1 = 2 \cdot e^{-1} \quad , \quad x_2 = 2 \cdot e^{-1} - 1 + 2 \cdot e^{\frac{2}{e}} = 0,694\ldots \ ,$$

$$x_3 = 0,6931475\ldots \quad , \quad x_4 = 0,69314718\ldots \ .$$

La convergence de ce procédé est beaucoup plus rapide que l'utilisation de la série

$$\ln 2 = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^{l-1}}{l}$$

(cf. exemple 8.13.3). On a besoin de 100 termes pour avoir une erreur plus petite que 10^{-2} ! Même l'utilisation de la série

$$\ln 2 = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l \cdot 2^l} ,$$

dont la convergence est beaucoup plus rapide, n'est pas aussi bonne que la méthode de Newton. On a besoin de 17 termes pour avoir une erreur plus petite que 10^{-6} .

EXEMPLE 3 L'équation $x^x = 2$ possède une solution égale à $1,5596\ldots$. Quant à $x^x = \frac{3}{4}$, elle en a deux égales à $0,1535\ldots$ et $0,6362\ldots$.

EXERCICE Soit $f : J \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable ayant un zéro $\xi \in J$ tel que $f(\xi) = f'(\xi) = 0$. On suppose en outre qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $0 < f'' \leqslant M$. Montrer pour tout $x_0 \in J \smallsetminus \{\xi\}$:

(a) La suite des approximations successives définie par la méthode de Newton

$$x_{k+1} := x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \quad \text{pour } k \in \mathbb{N}$$

est strictement monotone et converge vers ξ .

(b) Si f'' est continue en ξ , il existe un $c \in \left]0,1\right[$ tel que $|x_{k+1} - \xi| \leqslant c \cdot |x_k - \xi|$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

On se ramènera au cas $x_0 > \xi$, on montrera que les fonctions

$$\varphi = \mathrm{id} - \frac{f}{f'} \quad \text{et} \quad \Phi := \frac{\varphi - \xi}{\mathrm{id} - \xi}$$

se prolonge par continuité en ξ (règle de l'Hospital) et on en déduira que $\Phi \leqslant c < 1$ sur $[\xi, x_0]$.

8.15 Méthode de Newton : cas local

REMARQUE La suite définie par la méthode de Newton (cf. théorème 8.12) n'est pas toujours convergente, comme on peut le voir sur l'exemple de la fonction arctan qui s'annule en 0 en partant de $x_0 := 1,4$.

Mais si l'on se rapproche du zéro, par exemple en partant de $x_0 := 1,3917$, alors il y a convergence.

Ce fait est décrit par le

THEOREME *Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable telle que l'on ait*

$$f(a) < 0 \quad , \quad f(b) > 0 \quad , \quad f' \neq 0 \quad \text{dans } [a,b]$$

et qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que $|f''| \leqslant M$. Il existe alors $m > 0$ tel que $f' \geqslant m$ et f possède un unique zéro ξ dans $[a,b]$.

En choisissant $\tilde{a}, \tilde{b} \in [a,b]$ de telle manière que

$$\tilde{a} < \tilde{b} \quad , \quad \xi \in \left[\tilde{a}, \tilde{b}\right] \quad , \quad \kappa := \frac{M}{m} \cdot \left(\tilde{b} - \tilde{a}\right) \leqslant 1$$

et

$$\left[\tilde{a} - \frac{1}{2} \cdot \left(\tilde{b} - \tilde{a}\right), \tilde{b} + \frac{1}{2} \cdot \left(\tilde{b} - \tilde{a}\right)\right] \subset [a,b] \ ,$$

alors pour tout $x_0 \in \left[\tilde{a}, \tilde{b}\right]$, la formule de récurrence

$$x_{k+1} := x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

définit une suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $\left[\tilde{a} - \frac{1}{2} \cdot \left(\tilde{b} - \tilde{a}\right), \tilde{b} + \frac{1}{2} \cdot \left(\tilde{b} - \tilde{a}\right)\right]$ qui converge vers ξ .

En outre, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$|x_{k+1} - \xi| \leqslant \frac{M}{2 \cdot m} \cdot |x_k - \xi|^2$$

et

$$|x_k - \xi| \leqslant \frac{2 \cdot m}{M} \cdot \left(\frac{\kappa}{2}\right)^{2^k} \ .$$

Puisque f' est continue et ne s'annule pas, on a $f' > 0$ dans $[a,b]$ ou $f' < 0$ dans $[a,b]$ par le théorème de Bolzano 7.5, p. 181. Mais comme par la formule des accroissements finis 8.5 il existe $\eta \in \left]a,b\right[$ tel que

$$f'(\eta) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} > 0 \ ,$$

le second cas est exclu. On en déduit alors la première assertion car f' atteint son minimum dans $[a,b]$ par le théorème de Weierstrass 7.10. Le théorème 8.6.(iii) montre donc que f est strictement croissante, et par suite que f possède un unique zéro $\xi \in \left]a,b\right[$.

Montrons maintenant par récurrence que la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est contenue dans

$$\left[\tilde{a} - \frac{1}{2}\cdot\left(\tilde{b}-\tilde{a}\right), \tilde{b} + \frac{1}{2}\cdot\left(\tilde{b}-\tilde{a}\right)\right] .$$

Par hypothèse, on a trivialement x_0 dans cet intervalle, mais remarquons que x_1 peut très bien ne plus être dans $\left[\tilde{a},\tilde{b}\right]$.

Il nous suffit de montrer que $|x_k-\xi| \leqslant \frac{1}{2}\cdot\left(\tilde{b}-\tilde{a}\right)$ pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, puisque ξ appartient à $\left[\tilde{a},\tilde{b}\right]$. La formule de Taylor montre qu'il existe η_k entre x_k et ξ tel que

$$0 = f(\xi) = f(x_k) + f'(x_k)\cdot(\xi - x_k) + \frac{f''(\eta_k)}{2}\cdot(\xi-x_k)^2 .$$

On a alors

$$|x_{k+1}-\xi| = \left|x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} - \xi\right| = \left|\frac{f''(\eta_k)}{2\cdot f'(x_k)}\cdot(\xi-x_k)^2\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{M}{2\cdot m}\cdot|x_k-\xi|^2 .$$

On en déduit tout d'abord que

$$|x_1-\xi| \leqslant \frac{M}{2\cdot m}\cdot|x_0-\xi|^2 \leqslant \frac{M}{2\cdot m}\cdot\left(\tilde{b}-\tilde{a}\right)^2 \leqslant \frac{1}{2}\cdot\left(\tilde{b}-\tilde{a}\right) ,$$

puis que

$$|x_{k+1}-\xi| \leqslant \frac{M}{2\cdot m}\cdot|x_k-\xi|^2 \leqslant \frac{M}{2\cdot m}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\left(\tilde{b}-\tilde{a}\right)\right)^2 \leqslant \frac{1}{8}\cdot\left(\tilde{b}-\tilde{a}\right) \leqslant \frac{1}{2}\cdot\left(\tilde{b}-\tilde{a}\right) .$$

Finalement, on a

$$|x_k-\xi| \leqslant \frac{M}{2\cdot m}\cdot|x_{k-1}-\xi|^2 \leqslant \frac{M}{2\cdot m}\cdot\left(\frac{M}{2\cdot m}\cdot|x_{k-2}-\xi|^2\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{M}{2\cdot m}\right)^{1+2}\cdot|x_{k-2}-\xi|^{2\cdot 2} \leqslant \ldots \leqslant \left(\frac{M}{2\cdot m}\right)^{1+2+..+2^{k-1}}\cdot|x_0-\xi|^{2^k} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2\cdot m}{M}\cdot\left(\frac{M}{2\cdot m}\right)^{2^k}\cdot\left(\tilde{b}-\tilde{a}\right)^{2^k} = \frac{2\cdot m}{M}\cdot\left(\frac{\kappa}{2}\right)^{2^k} ,$$

puisque

$$\sum_{l=0}^{k-1} 2^l = 2^k - 1 .$$

$\square$