Chapitre 12

ÉQUATIONS DIFFERENTIELLES ORDINAIRES ET THÉORÈME DU POINT FIXE

Version du 16 décembre 2002

12.1 Les équations différentielles ordinaires

Si l'on étudie la variation d'une certaine grandeur z en fonction d'une variable t , on arrive souvent à modéliser cette situation en exprimant la variation z' de z à l'aide de t et z , i.e.

$$z' = F(t, z) \ .$$

Plus précisément :

DEFINITION 1 Soient D une partie de $\mathbb{R} \times \mathbb{K}$ et $F : D \longrightarrow \mathbb{K}$. On dit qu'une fonction $f : J \longrightarrow \mathbb{K}$ définie sur un intervalle J de $\mathbb{R}$ est une *solution de l'équation différentielle (ordinaire du premier ordre)*

$$f' = F(\cdot, f) \ ,$$

si f est dérivable et satisfait à

$$(t, f(t)) \in D \quad \text{et} \quad f'(t) = F(t, f(t)) \quad \text{pour tout } t \in J \ .$$

S'il faut préciser, on dit que l'équation différentielle $f' = F(\cdot, f)$ est définie sur D .

En général on a encore une *condition initiale* $(\tau, \xi) \in D$. On dit alors que f est *solution du problème avec condition initiale*

$$f' = F(\cdot, f) \quad \text{et} \quad f(\tau) = \xi$$

si f est solution de l'équation différentielle, $\tau \in J$ et évidemment si $f(\tau) = \xi$.

EXEMPLE Nous avons déjà rencontré des équations différentielles particulières.

Par exemple la recherche d'une primitive d'une fonction $g : J \longrightarrow \mathbb{C}$ (cf. 8.7 et 9.8) revient à résoudre l'équation différentielle

$$f' = g \ .$$

Dans ce cas la fonction F est donnée par

$$F : J \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} : (t, z) \longmapsto g(t) \ .$$

Nous avons également explicitement résolu l'équation différentielle

$$f' = c \cdot f \ ,$$

où $c : J \longrightarrow \mathbb{C}$ est une fonction continue (cf. exemple 8.7.1 et proposition 9.8). Ici on a

$$F : J \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} : (t, z) \longmapsto c(t) \cdot z \ .$$

Finalement nous avons considérer en 9.15 la classe particulière des équations différentielles à variables séparées

$$f' = \sigma \cdot \rho(f) \ ,$$

où $\sigma : \widetilde{J} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $\rho : \widetilde{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions continues. On a

$$F : \widetilde{J} \times \widetilde{I} \longrightarrow \mathbb{R} : (t, x) \longmapsto \sigma(t) \cdot \rho(x) \ .$$

Il est utile de généraliser la notion d'équation différentielle ordinaire en considérant des systèmes de telles équations. Ceux-ci se rencontrent lorsqu'on doit étudier des modèles faisant intervenir n grandeurs z_j dépendant d'une variable t et s'influençant mutuellement.

Plus précisément :

DEFINITION 2 Soient D une partie de $\mathbb{R} \times \mathbb{K}^n$ et

$$F : D \longrightarrow \mathbb{K}^n : (t, z_1, \ldots, z_n) \longmapsto (F_j(t, z_1, \ldots, z_n))_{j=1,\ldots,n} \ .$$

On dit qu'une fonction

$$f : J \longrightarrow \mathbb{K}^n : t \longmapsto (f_j(t))_{j=1,\ldots,n}$$

définie sur un intervalle J de $\mathbb{R}$ est une *solution de l'équation différentielle (ordinaire vectorielle du premier ordre)* ou *du système d'équations différentielles (ordinaires du premier ordre)*

$$f' = F(\cdot, f) \quad \text{ou bien} \quad f_j' = F_j(t, f_1, \ldots, f_n) \ ,$$

si f est dérivable et satisfait à

$$(t, f(t)) \in D \quad \text{et} \quad f'(t) = F(t, f(t)) \quad \text{pour tout } t \in J \ .$$

S'il faut préciser, on dit que l'équation différentielle $f' = F(\cdot, f)$ est définie sur D .

Etant donné $(\tau, \xi) \in D$, on définit comme précédemment la notion de *solution du problème avec condition initiale*

$$f' = F(\cdot, f) \quad \text{et} \quad f(\tau) = \xi \ .$$

PROPOSITION *Si $F : D \longrightarrow \mathbb{K}^n$ est continue et si $f : J \longrightarrow \mathbb{K}^n$ est une solution de l'équation différentielle $f' = F(\cdot, f)$, alors f est continûment dérivable.*

En effet $f' = F \circ (\mathrm{id}, f)$ et $(\mathrm{id}, f) : J \longrightarrow J \times \mathbb{K}^n$ est continue, puisque f est dérivable, donc continue. □

EXERCICE Soient $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{K}^n$, $F : D \longrightarrow \mathbb{K}^n$ une fonction continue, $(\tau, \xi) \in D$ et $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < \tau < b$. Si

$$g :]a, \tau[\longrightarrow \mathbb{K}^n \quad \text{et} \quad h :]\tau, b[\longrightarrow \mathbb{K}^n$$

sont des solutions de $f' = F(\cdot, f)$ telles que

$$\lim_{t \to \tau-} g(t) = \xi = \lim_{t \to \tau+} h(t) \ ,$$

alors la fonction

$$f :]a, b[\longrightarrow \mathbb{K}^n : t \longmapsto \begin{cases} g(t) & t \in]a, \tau[\\ \xi \quad \text{si} & t = \tau \\ h(t) & t \in]\tau, b[\end{cases}$$

est aussi une solution de $f' = F(\cdot, f)$.

12.2 Les applications lipschitziennes

DEFINITION 1 Soient X, Y des espaces métriques et $q \in \mathbb{R}_+$.

Une application $\Phi : X \longrightarrow Y$ est dite *q-lipschitzienne* si, pour tout $u, v \in X$, on a

$$d_Y\left(\Phi\left(u\right), \Phi\left(v\right)\right) \leqslant q \cdot d_X\left(u, v\right) \ .$$

On dit que Φ est *localement lipschitzienne* si, pour tout $x \in X$, il existe un voisinage V de x et un $q \in \mathbb{R}_+$ tels que la restriction de Φ à V soit q-lipschitzienne.

REMARQUE 1 Une application lipschitzienne est évidemment uniformément continue. Une application localement lipschitzienne est continue. Cette notion est intermédiaire entre continuité et dérivabilité.

PROPOSITION *Soient $\widetilde{X}$ une partie ouverte de $\mathbb{R}^n$, $\Phi : \widetilde{X} \longrightarrow \mathbb{R}^m$ une application continûment dérivable et X une partie contenue dans $\widetilde{X}$. Alors*

(i) Si X est convexe et

$$\left\|D\Phi\left(x\right)\right\| \leqslant q \quad \textit{pour tout } x \in X \ ,$$

alors la restriction de Φ à X est q-lipschitzienne.

(ii) La restriction de Φ à X est localement lipschitzienne.

Démonstration de (i) En effet l'inégalité de la moyenne 11.14 montre que, pour tout $u, v \in X$, on a

$$\left|\Phi\left(u\right) - \Phi\left(v\right)\right| = \sup\nolimits_{x \in X} \left\|D\Phi\left(x\right)\right\| \cdot \left|u - v\right| \leqslant q \cdot \left|u - v\right| \ .$$

Démonstration de (ii) Il suffit de constater que $\left\|D\Phi\right\|$ est continue sur X , donc bornée sur toute boule fermée contenues dans $\widetilde{X}$, puisqu'elle est compacte. Une boule étant convexe, cela montre que Φ est localement lipschitzienne, donc aussi sa restriction à X . □

EXEMPLE La fonction $x \longmapsto |x| : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ est 1-lipschitzienne, mais elle n'est pas dérivable en 0 .

En effet, on a

$$\Big|\left|u\right| - \left|v\right|\Big| \leqslant \left|u - v\right| \quad \text{pour tout } u, v \in \mathbb{R}^n$$

par la proposition 10.1. □

DEFINITION 2 Soient X, Y, Z des espaces métriques, D une partie de $X \times Z$,

$$\Phi : D \longrightarrow Y : (x, z) \longmapsto \Phi\left(x, z\right)$$

une application et $q \in \mathbb{R}_+$. Nous dirons que Φ est *q-lipschitzienne* en la première variable si, pour tout $z \in Z$, les applications

$$\Phi(\cdot, z) : \{x \in X \mid (x, z) \in D\} \longrightarrow Y$$

sont q-lipschitziennes, i.e. si pour tout $u, v \in X$ et $z \in Z$ tels que $(u, z), (v, z) \in D$, on a

$$d_Y(\Phi(u, z), \Phi(v, z)) \leqslant q \cdot d_X(u, v) \ .$$

On dit que Φ est *localement lipschitzienne* en la première variable si, pour tout $(x, z) \in D$, il existe un voisinage V de (x, z) dans D et un $q \in \mathbb{R}_+$ tels que la restriction de Φ à V soit q-lipschitzienne en x .

On définit de manière analogue les applications (localement) lipschitziennes en la seconde variable.

COROLLAIRE *Soient D une partie ouverte de $\mathbb{R}^n \times Z$ et $\Phi : D \longrightarrow \mathbb{R}^m$ une application dérivable en la première variable telle que*

$$(x, z) \longmapsto D_x\Phi(x, z) : D \longrightarrow \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n \times m)$$

soit continue. Alors Φ est localement lipschitzienne en la première variable.

REMARQUE 2 Il ne suffit pas que, pour tout $z \in Z$, l'application $\Phi(\cdot, z)$ définie sur l'ensemble ouvert $\{x \in \mathbb{R}^n \mid (x, z) \in D\}$ soit continûment dérivable. Dans ce cas $x \longmapsto D_x\Phi(x, z)$ est continue, mais on a besoin de la continuité globale en (x, z) pour que, dans un voisinage V de (x, z) , on ait

$$\sup_{(u,w) \in V} \|D_x\Phi(u, w)\| < \infty \ .$$

12.3 Théorème d'unicité

Considérons à nouveau une équation différentielle $f' = F(\cdot, f)$ définie sur une partie $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{K}^n$ par

$$F : D :\longrightarrow \mathbb{K}^n \ .$$

Si D est ouvert, si F est continûment dérivable par rapport à la seconde variable, en remplaçant $\mathbb{C}$ par $\mathbb{R}^2$ lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, et si

$$(t, x) \longmapsto D_x F(t, x) : D \longrightarrow \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n \times n)$$

est continue, alors F est localement lipschitzienne en la seconde variable.

Il suffit dans le corollaire 12.2 de permuter les variables. $\square$

THEOREME *On suppose que $F : D \longrightarrow \mathbb{K}^n$ est une application continue localement lipschitzienne en la seconde variable. Si J est un intervalle de $\mathbb{R}$, $g, h : J \longrightarrow \mathbb{K}^n$ sont des solutions de l'équation différentielle $f' = F(\cdot, f)$ et si $g(\tau) = h(\tau)$ pour un certain $\tau \in J$, alors $g = h$.*

En d'autre termes le problème avec condition initiale

$$f' = F(\cdot, f) \quad \text{et} \quad f(\tau) = \xi$$

possède au plus une solution.

Montrons tout d'abord que si pour un $s \in J$, on $g(s) = h(s)$, alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que l'on ait $g(t) = h(t)$ pour tout $t \in J$ tel que $|t - s| \leqslant \varepsilon$.

En effet, si V est un voisinage dans D de $(s, g(s))$ dans lequel F est q-lipschitzienne en *la* seconde variable, soit $\varepsilon > 0$ tel que l'on ait $\varepsilon \leqslant \frac{1}{2q}$ et

$$(t, g(t)), (t, h(t)) \in V \quad \text{si } t \in J \text{ et } |t - s| \leqslant \varepsilon \ .$$

Ceci est possible, puisque $(\mathrm{id}, g), (\mathrm{id}, h) : J \longrightarrow D$ sont continues, donc

$$(\mathrm{id}, g)^{-1}(V) \cap (\mathrm{id}, h)^{-1}(V)$$

est un voisinage de s dans J . Pour tout $t \in J$ tel que $s \leqslant t \leqslant s+\varepsilon$, par le théorème fondamental du calcul différentiel et intégral (cf. proposition 12.1), on obtient

$$|g(t) - h(t)| = \left| \int_s^t [g'(u) - h'(u)] \, du \right| \leqslant \int_s^t |F(u, g(u)) - F(u, h(u))| \, du \leqslant$$

$$\leqslant q \cdot \int_s^t |g(u) - h(u)| \, du \leqslant q \cdot M(t) \cdot |t - s| \ ,$$

en posant

$$M(t) := \sup_{s \leqslant u \leqslant t} |g(u) - h(u)| \ .$$

On en déduit que

$$M(t) = \sup_{s \leqslant u \leqslant t} |g(u) - h(u)| \leqslant \sup_{s \leqslant u \leqslant t} q \cdot M(u) \cdot |u - s| = q \cdot M(t) \cdot |t - s| \leqslant$$

$$\leqslant q \cdot \varepsilon \cdot M(t) \leqslant \frac{1}{2} \cdot M(t) \ ,$$

et par suite $M(t) = 0$, donc $g(t) = h(t)$. On procède de même si $s - \varepsilon \leqslant t \leqslant s$.

Soit alors

$$s := \sup \{t \in J \mid t \geqslant \tau \text{ et } g(u) = h(u) \text{ pour tout } u \in [\tau, t]\} \ .$$

Si $s \notin J$, on a nécessairement $s = \sup\ J$. Si $s \in J$, par la continuité de g et h , on a aussi $g(s) = h(s)$. Par ce qui précède et la propriété d'approximation du supremum, on obtient aussi $s = \sup\ J$. Nous avons donc prouvé que $g(t) = h(t)$ pour tout $t \in J$ tel que $t \geqslant \tau$. On procède de manière analogue pour $t \leqslant \tau$. □

EXEMPLE 1 Pour la question d'unicité, nous pouvons considérer des équations différentielles à variables séparées $f' = \sigma \cdot \rho(f)$ plus générale que celles considérées dans le théorème 9.15.

Soient $\sigma : \widetilde{J} \longrightarrow \mathbb{K}$ une fonction continue, $\widetilde{D}$ une partie de $\mathbb{K}^n$ et $\rho : \widetilde{D} \longrightarrow \mathbb{K}^n$ une fonction localement lipschitzienne, par exemple si $\widetilde{D}$ est ouvert et ρ continûment dérivable par la proposition 12.2.ii.

Alors pour tout intervalle $J \subset \widetilde{J}$, le problème avec condition initiale $(\tau, \xi) \in J \times \widetilde{D}$ possède au plus une solution sur J .

En effet, étant donné $(t, z) \in \widetilde{J} \times \widetilde{D}$, soient U un voisinage de t dans lequel σ est bornée et V un voisinage de z dans lequel ρ est q-lipschitzienne pour un certain $q \in \mathbb{R}_+$. Il est alors évident que

$$F : \widetilde{J} \times \widetilde{D} \longrightarrow \mathbb{K}^n : (t, z) \longmapsto \sigma(t) \cdot \rho(z)$$

est q-lipschitzienne en la seconde variable sur $U \times V$. □

Rappelons que l'existence n'est assurée pour le moment, grâce au théorème 9.15, que dans le cas réel et $n = 1$. Même dans le cas complexe et $n = 1$ la méthode n'est pas applicable, puisqu'il faut diviser et faire un changement de variable.

Mais cela n'empêche pas que l'on puisse dans beaucoup de cas donner explicitement une solution à chaque problème avec condition initiale. Le théorème d'unicité montre alors que toutes les solutions de l'équation différentielle ont été trouvée.

EXEMPLE 2 Le théorème d'unicité n'est pas applicable à l'équation différentielle

$$f' = \sqrt[3]{f^2} \ ,$$

en considérant $\sqrt[3]{\cdot}$ comme la fonction réciproque de $\mathrm{id}^3 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, car elle n'est pas lipschitzienne au voisinage de 0 . L'unicité n'est pas assurée comme nous l'avons vu dans l'exemple 9.15.2.

EXERCICE Déterminer toutes les solutions des équations différentielles

(a)
$$f' = \mathrm{id} \cdot f^2$$

(b)
$$f' = |f|$$

définies sur $\mathbb{R} \times \mathbb{C}$.

(a) Ce sont les fonctions

$$\left]-\sqrt{\tfrac{2}{c}},\sqrt{\tfrac{2}{c}}\right[\longrightarrow \mathbb{R} : t \longmapsto \frac{1}{\frac{1}{c}-\frac{t^2}{2}} \quad \text{si } c>0 \ ,$$

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} : t \longmapsto \frac{1}{\frac{1}{c}-\frac{t^2}{2}} \quad \text{si } c \in \mathbb{C} \smallsetminus \mathbb{R}_+$$

et la fonction constante 0 .

(b) Les solutions réelles sont

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : t \longmapsto c \cdot e^{\operatorname{signum} c \cdot t} \quad \text{pour } c \in \mathbb{R} \ ,$$

en rappelant que

$$\operatorname{signum} c := \left\{ \begin{array}{ccc} \frac{c}{|c|} & & c \neq 0 \\ & \text{si} & \\ 0 & & c = 0 \end{array} \right. \ .$$

Les solutions complexes non-réelles sont de la forme

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} : t \longmapsto \operatorname{Re}(c) \cdot e^t + \frac{|\operatorname{Im}(c)|^2}{2 \cdot (\operatorname{Re}(c) + |c|)} \cdot \left(e^t - e^{-t}\right) + i \cdot \operatorname{Im} c \quad \text{pour } c \in \mathbb{C} \smallsetminus \mathbb{R} \ .$$

12.4 Quelques exemples d'équations différentielles

Modèles démographiques

Soit $p(t) \in \widetilde{I}$, où $\widetilde{I}$ est un intervalle de $\mathbb{R}$, la "mesure" d'une "population" au temps t . Si l'on suppose que le taux de "renouvellement" (reproduction − décès) ne dépend que de la grandeur de la population, donc décrit par une fonction $\widetilde{\rho} : \widetilde{I} \longrightarrow \mathbb{R}$, on obtient l'équation différentielle à variables séparées

$$p' = \widetilde{\rho}(p) \cdot p \ .$$

Dans certaines situations on constate que la population se stabilise autour d'une grandeur $M \in \mathbb{R}$. Cela signifie que $\widetilde{\rho}(M) = 0$, $\widetilde{\rho} > 0$ sur $]0, M[$ et $\widetilde{\rho} < 0$ sur $]M, \infty[$. Le modèle le plus simple s'obtient en supposant que

$$\widetilde{\rho}(z) = a \cdot (M - z)$$

avec $a, M > 0$. On dit que

$$p' = a \cdot p \cdot (M - p)$$

est l' *équation différentielle logistique* .

EXERCICE 1 Discuter l'équation différentielle logistique (unicité et existence).

Equations différentielles homogènes

Soient $\widetilde{I}$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $h : \widetilde{I} \longrightarrow \mathbb{K}$ une fonction continue. Considérons l'équation différentielle, dite *homogène* ,

$$f' = h\left(\frac{f}{\mathrm{id}}\right) \ .$$

Cela revient à considérer la fonction

$$F : (t, z) \longmapsto h\left(\frac{z}{t}\right)$$

définie sur l'ensemble

$$\left\{(t, z) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{K} \mid z \in t \cdot \widetilde{I}\right\} \ .$$

PROPOSITION *Soient J un intervalle de $\mathbb{R}$ tel que $0 \notin J$, $f : J \longrightarrow \mathbb{K}$ et définissons*

$$g : J \longrightarrow \mathbb{K} : t \longmapsto \frac{f(t)}{t} \ .$$

Pour que f soit solution de $f' = h\left(\frac{f}{\mathrm{id}}\right)$, il faut et il suffit que g soit solution de

$$g' = \frac{1}{\mathrm{id}} \cdot [h(g) - g] \ .$$

Cette méthode est dite de *résolution par substitution* . La nouvelle équation différentielle est évidemment plus "simple", parce que connue ; elle est à variables séparées.

La démonstration est laissée en exercice. □

Equations différentielles de Bernouilli

Soient $\widetilde{J}$ un intervalle de $\mathbb{R}$, $a, b : \widetilde{J} \longrightarrow \mathbb{R}$ des fonctions continues et $\alpha \in \mathbb{R}$. On dit que

$$f' = a \cdot f + b \cdot f^{\alpha}$$

est l' *équation différentielle de Bernouilli* .

Elle est définie par

$$F : \widetilde{J} \times \mathbb{R}_{+}^{*} \longrightarrow \mathbb{R} : (t, x) \longmapsto a(t) \cdot x + b(t) \cdot x^{\alpha} \ .$$

Si $\alpha \in \mathbb{N}$, respectivement $\alpha \in \mathbb{Z}$, on la définit sur $\tilde{J} \times \mathbb{K}$, respectivement $\tilde{J} \times \mathbb{K}^{*}$.

On a unicité par le corollaire 12.2 et on la résoud en faisant la substitution

$$g = f^{1-\alpha} \ .$$

EXERCICE 2 Résoudre le problème avec condition initiale

$$f' = -2 \cdot \frac{f}{\mathrm{id}} - 2 \cdot \mathrm{id}^2 \cdot f^{\frac{3}{2}} \quad \text{et} \quad f(2) = \frac{1}{4} \ .$$

La solution est

$$f : \left]\sqrt{2}, \infty\right[\longrightarrow \mathbb{R} : t \longmapsto \left(\frac{t^3}{2} - t\right)^{-2} \ .$$

Equations différentielles de Riccati

Soient $\widetilde{J}$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $p, q, r : \widetilde{J} \longrightarrow \mathbb{K}$ des fonctions continues. On dit que

$$f' = p \cdot f^2 + q \cdot f + r$$

est l' *équation différentielle de Riccati* .

Elle est définie sur $\widetilde{J} \times \mathbb{K}$ et on a unicité. Si $r = 0$, c'est une équation différentielle de Bernouilli. Si $r \neq 0$ et si l'on connait une solution particulière $f_0 : J \longrightarrow \mathbb{K}$, on peut déterminer toutes les autres, mais définies sur J seulement, grâce à la substitution

$$g = \frac{1}{f - f_0} \ .$$

Cela revient à résoudre l'équation linéaire

$$g' = -(2 \cdot p \cdot f_0 + q) \cdot g - p \ .$$

EXERCICE 3 Déterminer toutes les solutions de

$$f' = f^2 + 2 \cdot \mathrm{id} \cdot f + 2 \ ,$$

en remarquant que $-\frac{1}{\mathrm{id}}$ est une solution et en utilisant la fonction

$$E : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \int_0^x e^{t^2} \, dt \ .$$

12.5 Le théorème du point fixe

DEFINITION Soient X un ensemble et $\Phi : X \longrightarrow X$ une application. On dit qu'un élément $\xi \in X$ est un *point fixe* de Φ si $\Phi(\xi) = \xi$.

Cette notion est devenue fondamentale car la plupart des équations peuvent se mettre sous cette forme, et une méthode assez générale dans le cadre des espaces métriques permet, avec les bonnes hypothèses évidemment, de prouver l'existence d'une solution et son unicité . Le principe de cette méthode est simple.

PROPOSITION (Principe du point fixe) *Etant donné un point $x_0 \in X$, on considère la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par récurrence par*

$$x_{k+1} := \Phi(x_k) \quad \textit{pour tout } k \in \mathbb{N} \ .$$

Si X est un espace métrique, $\Phi : X \longrightarrow X$ est continue et si cette suite est convergente vers $\xi \in X$, alors ξ est un point fixe de Φ .

En effet

$$\xi = \lim_k x_{k+1} = \lim_k \Phi(x_k) = \Phi(\lim_k x_k) = \Phi(\xi) \ .$$

□

On dit que c'est la *méthode des approximations successives* . Le seul problème est d'assurer la convergence de la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

On définit, pour tout $k \in \mathbb{N}$, les applications $\overset{k}{\Phi} : X \longrightarrow X$ par récurrence en posant

$$\overset{0}{\Phi} := \mathrm{id}_X \quad \text{et} \quad \overset{k+1}{\Phi} := \Phi \circ \overset{k}{\Phi} = \overset{k}{\Phi} \circ \Phi \ .$$

On a alors

$$x_k = \overset{k}{\Phi}(x_0) \ .$$

Plus généralement, si l'équation considérée dépend d'un paramètre et possède une unique solution pour chaque valeur du paramètre, on peut se demander si cette solution en dépend continûment.

Soit $\Phi : X \times Y \longrightarrow X$ une application. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on définit les applications

$$\overset{k}{\Phi} : X \times Y \longrightarrow X$$

par

$$\overset{0}{\Phi}(x, y) := x \quad \text{et} \quad \overset{k+1}{\Phi}(x, y) := \Phi\left(\overset{k}{\Phi}(x, y), y\right) = \overset{k}{\Phi}(\Phi(x, y), y) \ .$$

On peut l'écrire sous la forme

$$\overset{0}{\Phi} := \mathrm{pr}_1 \quad \text{et} \quad \overset{k+1}{\Phi} := \Phi \circ \left(\overset{k}{\Phi}, \mathrm{pr}_2\right) = \overset{k}{\Phi} \circ (\Phi, \mathrm{pr}_2) \ .$$

Si Φ est continue, alors chaque $\overset{k}{\Phi}$ est continue. L'application $\overset{0}{\Phi}$ est 1-lipschitzienne en x .

THEOREME (de Banach-Caccioppoli) *Soient X un espace métrique complet non-vide, Y un espace métrique et $\Phi : X \times Y \longrightarrow X$ une application continue telle que $\overset{k}{\Phi}$ soit q_k-lipschitzienne en la première variable, pour tout $k \in \mathbb{N}$, et que*

$$\sum_{l=0}^{\infty} q_l < \infty \ .$$

Alors, pour tout $y \in Y$, l'application $\Phi(\cdot, y)$ possède un unique point fixe $\xi(y) \in X$ et, pour tout $x_0 \in X$, la suite des approximations successives $\left(\overset{k}{\Phi}(x_0, y)\right)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers $\xi(y)$. En outre, on a

$$d_X\left(\overset{k}{\Phi}(x_0, y), \xi(y)\right) \leqslant \left(\sum_{l=k}^{\infty} q_l\right) \cdot d_X(x_0, \Phi(x_0, y))$$

et l'application des points fixes

$$\xi : Y \longrightarrow X : y \longmapsto \xi(y)$$

est continue.

Montrons tout d'abord l'unicité. Comme $\sum_{l=0}^{\infty} q_l < \infty$, on a $\lim_k q_k = 0$, donc

$$q_k < 1 \quad \text{pour tout } k \text{ assez grand.}$$

Pour un tel k , si ξ et η sont des points fixes de $\Phi(\cdot, y)$, il vient

$$d_X(\xi, \eta) = d_X\left(\overset{k}{\Phi}(\xi, y), \overset{k}{\Phi}(\eta, y)\right) \leqslant q_k \cdot d_X(\xi, \eta) < d_X(\xi, \eta) \quad \text{si } d_X(\xi, \eta) \neq 0 \ .$$

Mais ceci est absurde, donc $\xi = \eta$, ce qu'il fallait démontrer.

Pour l'existence, soit $x_0 \in X$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}$, posons

$$\xi_k := \overset{k}{\Phi}(x_0, \cdot) : Y \longrightarrow X \ .$$

C'est une application continue, ξ_0 est l'application constante prenant la valeur x_0 et on a

$$\xi_{k+1} = \Phi(\xi_k, \cdot) = \Phi \circ (\xi_k, \mathrm{id}) \ .$$

Pour tout $y \in Y$, la suite $(\xi_k(y))_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans X . En effet, si $k < l$, on a

$$d_X(\xi_k(y), \xi_l(y)) \leqslant \sum_{j=k}^{l-1} d_X\left(\xi_j(y), \xi_{j+1}(y)\right) = \sum_{j=k}^{l-1} d_X\left(\overset{j}{\Phi}(x_0, y), \overset{j+1}{\Phi}(x_0, y)\right) =$$

$$= \sum_{j=k}^{l-1} d_X\left(\overset{j}{\Phi}(x_0, y), \overset{j}{\Phi}(\Phi(x_0, y), y)\right) \leqslant \left(\sum_{j=k}^{l-1} q_j\right) \cdot d_X(x_0, \Phi(x_0, y)) \ .$$

Puisque X est complet, on peut définir

$$\xi(y) := \lim_k \xi_k(y) \ .$$

C'est un point fixe de $\Phi(\cdot, y)$, car cette application est continue, donc

$$\Phi(\xi(y), y) = \lim_k \Phi(\xi_k(y), y) = \lim_k \xi_{k+1}(y) = \xi(y) \ .$$

Finalement, en faisant tendre j vers l'infini, on obtient

$$d_X\left(\xi_k\left(y\right),\xi\left(y\right)\right)\leqslant\left(\sum_{l=k}^{\infty}q_l\right)\cdot d_X\left(x_0,\Phi\left(x_0,y\right)\right)\ .$$

On va encore en déduire que ξ est continue en $z\in Y$. Remarquons tout d'abord, puisque $d_X\left(x_0,\Phi\left(x_0,\cdot\right)\right)$ est continue, qu'il existe un voisinage U de z tel que

$$d_X\left(x_0,\Phi\left(x_0,y\right)\right)\leqslant d_X\left(x_0,\Phi\left(x_0,z\right)\right)+1=:M\quad\text{pour tout } y\in U\ .$$

Pour tout $y\in U$, on a donc

$$d_X\left(\xi_k\left(y\right),\xi\left(y\right)\right)\leqslant M\cdot\left(\sum_{l=k}^{\infty}q_l\right)\ ,$$

ce qui montre que la suite $\left(\xi_k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur U vers ξ , donc que ξ est continue, en généralisant la notion de convergence uniforme et le théorème 10.5. Directement, pour tout $\varepsilon>0$, on obtient

$$d_X\left(\xi\left(y\right),\xi\left(z\right)\right)\leqslant d_X\left(\xi\left(y\right),\xi_k\left(y\right)\right)+d_X\left(\xi_k\left(y\right),\xi_k\left(z\right)\right)+d_X\left(\xi_k\left(z\right),\xi\left(z\right)\right)\leqslant\varepsilon$$

pour tout y suffisamment proche de z en choisissant tout d'abord un k suffisamment grand. □

EXEMPLE 1 Si Φ est q-lipschitzienne (en la première variable) avec $q<1$, alors l'hypothèse du théorème de Banach-Caccioppoli est satisfaite ; on dit que c'est le *théorème du point fixe de Banach* et que Φ est une *contraction* (stricte).

En effet $\overset{k}{\Phi}$ est q^k-lipschitzienne (en la première variable), puisque par récurrence il vient

$$d_X\left(\overset{k+1}{\Phi}\left(u,y\right),\overset{k+1}{\Phi}\left(v,y\right)\right)=d_X\left(\Phi\left(\overset{k}{\Phi}\left(u,y\right),y\right),\Phi\left(\overset{k}{\Phi}\left(v,y\right),y\right)\right)\leqslant$$

$$\leqslant q\cdot d_X\left(\overset{k}{\Phi}\left(u,y\right),\overset{k}{\Phi}\left(v,y\right)\right)\leqslant q^{k+1}\cdot d_X\left(u,v\right)$$

pour tout $u,v\in X$ et $y\in Y$. □

EXEMPLE 2 La méthode de Newton de résolution d'une équation est un cas particulier de la méthode des approximations successives. En effet si J est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f:J\longrightarrow\mathbb{R}$ est une fonction continûment dérivable telle que $f'\neq0$ partout, alors $f\left(x\right)=0$ est équivalent à

$$x-\frac{f\left(x\right)}{f'\left(x\right)}=x\ .$$

En définissant

$$\Phi:J\longrightarrow\mathbb{R}:x\longmapsto x-\frac{f\left(x\right)}{f'\left(x\right)}$$

et si $x_0\in J$, la suite des approximations successives $\left(\overset{k}{\Phi}\left(x_0\right)\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est celle de la méthode de Newton pour autant que l'on ait $\Phi\left(J\right)\subset J$. Mais remarquons que les théorèmes 8.14 et 8.15 ne découlent pas en général du théorème de Banach-Caccioppoli. Par contre il est possible de donner des conditions permettant de l'utiliser.

Une autre manière de résoudre l'équation $f(x)=0$ consiste à l'écrire sous la forme équivalente

$$x-f(x)=x\ ,$$

donc de considérer l'application

$$\Phi : J \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto x-f(x)\ .$$

Si $\Phi(J)\subset J$ et

$$q:=\sup_{x\in J}\left|1-f'(x)\right|<1\ ,$$

alors Φ est q-lipschitzienne par la proposition 12.2.i, donc f possède un unique zéro dans J par la remarque 1.

EXEMPLE 3 Soient $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ et $b\in\mathbb{R}^n$. Pour résoudre l'équation

$$(\mathrm{Id}-A)\,x=b\ ,$$

il suffit de définir

$$\Phi:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^n : x\longmapsto Ax+b\ .$$

Munissons tout d'abord $\mathbb{R}^n$ de la norme $|\cdot|_1$ et estimons

$$|\Phi x-\Phi y|_1=|Ax-Ay|_1=\sum_{k=1}^n\left|\sum_{l=1}^n a_{k,l}\cdot(x_l-y_l)\right|\leqslant\sum_{l=1}^n\left(\sum_{k=1}^n|a_{k,l}|\right)\cdot|(x_l-y_l)|\leqslant$$

$$\leqslant\left(\sup_{l=1,\ldots,n}\sum_{k=1}^n|a_{k,l}|\right)\cdot|x-y|_1\ .$$

Soit $q_1(A):=\sup_{l=1,\ldots,n}\sum_{k=1}^n|a_{k,l}|$.

En munissant $\mathbb{R}^n$ de la norme $|\cdot|_2$ il vient en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$|\Phi x-\Phi y|_2=|Ax-Ay|_2=\left[\sum_{k=1}^n\left|\sum_{l=1}^n a_{k,l}\cdot(x_l-y_l)\right|^2\right]^{\frac12}\leqslant$$

$$\leqslant\left[\sum_{k=1}^n\left(\sum_{l=1}^n|a_{k,l}|^2\right)\cdot\left(\sum_{l=1}^n|(x_l-y_l)|^2\right)\right]^{\frac12}=\left(\sum_{k,l=1}^n|a_{k,l}|^2\right)^{\frac12}\cdot|x-y|_2\ .$$

Soit $q_2(A):=\left(\sum_{k,l=1}^n|a_{k,l}|^2\right)^{\frac12}$.

Nous avons donc montré que Φ est q_1- et q_2-lipschitzienne.

Considérons dans $\mathbb{R}^2$ les matrices

$$A:=\begin{pmatrix}\frac12 & \frac12\\ 0 & \frac12\end{pmatrix}\quad\text{et}\quad B:=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt2}{2} & 0\\ 0 & \frac{\sqrt2}{2}\end{pmatrix}\ .$$

On voit immédiatement que

$$q_1(A)=1\quad\text{et}\quad q_2(A)=\frac{\sqrt3}{2}<1\ ,$$

tandis que

$$q_1(B) = \frac{\sqrt{2}}{2} < 1 \quad \text{et} \quad q_2(B) = 1 \ .$$

Ces exemples montrent que dans les applications le choix de la bonne norme est un point important.

EXERCICE 1 Soient $v \in \mathbb{R}^n$ tel que $|v| = 1$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Formuler la bijectivité de l'application

$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n : x \longmapsto x + \alpha \cdot |x| \cdot v$$

comme un problème de point fixe et déterminer tous les α tels que f soit bijective et un homéomorphisme.

EXERCICE 2 Soient X un espace métrique compact, d sa métrique et $\Phi : X \longrightarrow X$ une application strictement contractante , i.e. telle que

$$d(\Phi(u), \Phi(v)) < d(u,v) \quad \text{pour tout } u, v \in X \text{ tels que } u \neq v \ .$$

(a) Montrer que Φ possède un et un seul point fixe $\xi \in X$. Pour l'existence on considère la fonction

$$x \longmapsto d(x, \Phi(x)) : X \longrightarrow \mathbb{R}_+ \ .$$

(b) En déduire que, pour tout $x_0 \in X$, la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par $x_{k+1} := \Phi(x_k)$, pour tout $k \in \mathbb{N}$, converge vers ξ . On montrera que la suite $(d(x_k, \xi))_{k\in\mathbb{N}}$ est décroissante, et qu'elle converge vers 0 en extrayant une sous-suite convenable de $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

(c) Montrer à l'aide de contre-exemples que l'hypothèse faite sur Φ n'entraîne pas que Φ soit une contraction, i.e. q-lipschitzienne avec $q < 1$, et que l'on ne peut pas remplacer "compact" par "complet" .

12.6 Théorème d'existence globale

LEMME *Soient D une partie de $\mathbb{R} \times \mathbb{K}^n$, $F : D \longrightarrow \mathbb{K}^n$ une application continue, J un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : J \longrightarrow \mathbb{K}^n$ une fonction telle que $\operatorname{Gr} f \subset D$ et $(t, \xi) \in D$.*

Pour que f soit dérivable et solution du problème avec condition initiale

$$f' = F(\cdot, f) \quad \textit{et} \quad f(\tau) = \xi \ ,$$

il faut et il suffit que f soit continue et solution de l'équation intégrale

$$f(t) = \xi + \int_\tau^t F(s, f(s))\, ds \quad \textit{pour tout } t \in J \ .$$

En effet, si f est solution du problème avec condition initiale, on a

$$f(t) = f(\tau) + \int_\tau^t f'(s)\, ds = \xi + \int_\tau^t F(s, f(s))\, ds$$

d'après le théorème fondamental du calcul différentiel et intégral 9.9 (cf. proposition 12.1).

Réciproquement, si f est continue, alors la fonction

$$s \longmapsto (s, f(s)) \longmapsto F(s, f(s))$$

est aussi continue, donc

$$t \longmapsto \xi + \int_\tau^t F(s, f(s))\, ds$$

est continûment dérivable. Si f est solution de l'équation intégrale, alors f est continûment dérivable et $f'(t) = F(t, f(t))$ pour tout $t \in J$. ——— □

Ce lemme va nous permettre d'appliquer le théorème de Banach-Caccioppoli d'existence d'un point fixe.

THEOREME (de Picard-Lindelöf) *Etant donné une partie D de $\mathbb{R} \times \mathbb{K}^n$,*

$$F : D \longrightarrow \mathbb{K}^n$$

une application continue, $[a, b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\tau \in [a, b]$, on pose

$$X := \{ g \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{K}^n) \mid \operatorname{Gr} g \subset D \} \ ,$$

et, pour tout $t \in [a, b]$,

$$Y_t := \{ z \in \mathbb{K}^n \mid (t, z) \in D \} \ .$$

On suppose que les propriétés suivantes sont satisfaites :

(i) *On a $X \neq \emptyset$.*

(ii) *Pour tout $t \in [a, b]$, l'ensemble Y_t est fermé dans $\mathbb{K}^n$.*

(iii) *Pour tout $\xi \in Y_\tau$ et tout $g \in X$, en posant*

$$\Phi(g, \xi)(t) := \xi + \int_\tau^t F(s, g(s))\, ds \ \textit{pour tout } t \in [a, b] \ ,$$

on a $\operatorname{Gr}\Phi(g,\xi) \subset D$.

Si F *est q-lipschitzienne en la seconde variable pour un certain* $q \in \mathbb{R}_+$ *, alors pour tout* $\xi \in Y_\tau$ *, il existe une unique solution* $f_\xi : [a,b] \longrightarrow \mathbb{K}^n$ *solution du problème avec condition initiale*

$$f' = F(\cdot, f) \quad et \quad f(\tau) = \xi \ ,$$

qui dépend continûment, par rapport à $\|\cdot\|_{\infty,[a,b]}$ *, de* ξ .

Remarquons tout d'abord que tous les résultats du §10 sur la convergence uniforme peuvent être généralisés aux fonctions à valeurs dans $\mathbb{K}^n$, voire dans un espace de Banach. En particulier l'ensemble $\mathcal{C}([a,b], \mathbb{K}^n)$ des fonctions continues sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{K}^n$, muni de la norme uniforme

$$\|f\|_{\infty,[a,b]} := \sup_{t\in[a,b]} |f(t)| \ ,$$

est un espace de Banach (cf. théorème 10.5).

Les ensembles X et $Y := Y_\tau$ sont non-vides par l'hypothèse (i). Pour tout $g \in X$ et $\xi \in Y$, la fonction $\Phi(g,\xi)$ est évidemment continue et la condition (iii) montre que Φ est une application de $X \times Y$ dans X . Muni de la métrique induite X est un espace métrique complet par le corollaire 10.16, car elle est fermée par la condition (ii). En effet si $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de X uniformément convergente dans $\mathcal{C}([a,b], \mathbb{K}^n)$ vers g , alors

$$g(t) = \lim_k g_k(t) \in Y_t \quad \text{pour tout } t \in [a,b] \ ,$$

ce qui montre que $\operatorname{Gr} g \subset D$.

Notre assertion va donc découler du lemme et du théorème de Banach-Caccioppoli, puisque f est une solution de l'équation intégrale si, et seulement si, f est un point fixe de $\Phi(\cdot,\xi)$.

Pour tout $g,h \in X$, $\xi,\eta \in Y$ et $t \in [a,b]$ tels que $t \geqslant \tau$, on a

$$|\Phi(g,\xi)(t) - \Phi(h,\eta)(t)| = \left|\xi - \eta + \int_\tau^t [F(s,g(s)) - F(s,h(s))]\, ds\right| \leqslant$$

$$\leqslant |\xi-\eta| + \int_\tau^t |F(s,g(s)) - F(s,h(s))|\, ds \leqslant$$

$$\leqslant |\xi-\eta| + \int_\tau^t q\cdot|g(s)-h(s)|\, ds \leqslant |\xi-\eta| + q\cdot\|g-h\|_\infty \cdot (t-\tau) \ .$$

Si $t \leqslant \tau$, on procède de même en permutant t et τ .

En posant $L := \max(\tau - a, b - \tau)$, on obtient

$$\|\Phi(g,\xi) - \Phi(h,\eta)\|_\infty \leqslant |\xi-\eta| + q\cdot L\cdot\|g-h\|_\infty \ .$$

Ceci montre que $\Phi : X \times Y \longrightarrow X$ est continue, et pour tout $\xi \in Y$, que $\Phi(\cdot,\xi)$ est $q\cdot L$-lipschitzienne.

De même, on obtient

$$\left|\overset{2}{\Phi}(g,\xi)(t) - \overset{2}{\Phi}(h,\xi)(t)\right| = |\Phi(\Phi(g,\xi),\xi) - \Phi(\Phi(h,\eta),\eta)| =$$

$$= \left|\int_\tau^t [F(s,\Phi(g,\xi)(s)) - F(s,\Phi(h,\xi)(s))]\, ds\right| \leqslant \int_\tau^t q\cdot|\Phi(g,\xi)(s) - \Phi(h,\xi)(s)|\, ds \leqslant$$

$$\leqslant q \cdot \int_\tau^t q \cdot \|g-h\|_\infty \cdot (s-\tau)\, ds = \|g-h\|_\infty \cdot q^2 \cdot \frac{(t-\tau)^2}{2} \ ,$$

et par suite

$$\left\| \overset{2}{\Phi}(g,\xi) - \overset{2}{\Phi}(h,\xi) \right\|_\infty \leqslant \frac{q^2 \cdot L^2}{2} \cdot \|g-h\|_\infty \ .$$

Finalement, par récurrence, on montre si $t \geqslant \tau$, que

$$\left| \overset{k}{\Phi}(g,\xi)(t) - \overset{k}{\Phi}(h,\xi)(t) \right| \leqslant \|g-h\|_\infty \cdot q^k \cdot \frac{(t-\tau)^k}{k!} \ .$$

Il vient alors

$$\left\| \overset{k}{\Phi}(g,\xi) - \overset{k}{\Phi}(h,\xi) \right\|_\infty \leqslant \frac{q^k \cdot L^k}{k!} \cdot \|g-h\|_\infty \ ,$$

d'où notre affirmation, puisque

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{q^l \cdot L^l}{l!} = e^{q \cdot L} < \infty \ .$$

□

COROLLAIRE (Dépendance continue par rapport à la condition initiale)

Soient J un intervalle de $\mathbb{R}$ et $F : J \times \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^n$ une application continue ayant la propriété suivante : Pour tout intervalle $[a,b] \subset J$, il existe $q \in \mathbb{R}_+$ tel que la fonction F soit q-lipschitzienne en la seconde variable sur $[a,b] \times \mathbb{K}^n$.

Pour tout $\tau \in J$ et tout $\xi \in \mathbb{K}^n$, il existe alors une unique solution $f_\xi : J \longrightarrow \mathbb{K}^n$ du problème avec condition initiale

$$f' = F(\cdot, f) \quad \text{et} \quad f(\tau) = \xi \ .$$

Cette solution, plus précisément sa restriction à chaque intervalle $[a,b] \subset J$, dépend continûment de ξ .

L'unicité découle du théorème 12.3, puisque F est manifestement localement lipschitzienne en la seconde variable dans $J \times \mathbb{K}^n$.

Pour tout intervalle $[a,b] \subset J$ tel que $\tau \in [a,b]$ et $\xi \in \mathbb{K}^n$, il est clair que la partie $[a,b] \times \mathbb{K}^n$ satisfait aux hypothèses du théorème de Picard-Lindelöf. Il existe donc une unique solution

$$f_{a,b} : [a,b] \longrightarrow \mathbb{K}^n$$

du problème avec condition initiale. Si $[c,d]$ est un autre intervalle de J contenant τ , l'unicité montre que les restrictions de $f_{a,b}$ et $f_{c,d}$ à $[a,b] \cap [c,d] =: [m,M]$ sont égales à $f_{m,M}$. Ceci nous permet de définir une fonction $f_\xi : J \longrightarrow \mathbb{K}^n$ en posant

$$f_\xi(t) := f_{[a,b]}(t) \quad \text{si } t \in [a,b] \subset J \ .$$

On vérifie immédiatement que f_ξ est une solution du problème avec condition initiale. □

De la même manière on peut montrer le résultat plus général suivant :

COROLLAIRE (Dépendance continue par rapport à une perturbation de F)

Soit $\widetilde{Y}$ une partie de $\mathcal{C}^b(D, \mathbb{K}^n)$. On suppose que $F \in \widetilde{Y}$, et l'on remplace la condition (iii) par *(iv)* *Pour tout* $\xi \in Y_\tau$ *et* $G \in \widetilde{Y}$ *, en posant*

$$\Phi(g,\xi,G)(t) := \xi + \int_\tau^t G(s,g(s))\,ds \quad \text{pour tout } t \in [a,b] \ ,$$

on a

$$\operatorname{Gr}\Phi(g,\xi,G) \subset D \ .$$

Si, pour un certain $q \in \mathbb{R}_+$ *, chaque* $G \in \widetilde{Y}$ *est q-lipschitzienne en la seconde variable, alors pour tout* $\xi \in Y$ *et tout* $G \in \widetilde{Y}$ *, il existe une unique solution* $f_{\xi,G} : [a,b] \longrightarrow \mathbb{K}^n$ *du problème avec condition initiale*

$$f' = G(\cdot,f) \ \text{ et } f(\tau) = \xi \ ,$$

qui dépend continûment de ξ *et* G *.*

REMARQUE Si l'on veut se libérer de la restriction $\widetilde{Y} \subset \mathcal{C}^b(D,\mathbb{K}^n)$ et considérer le cas normal où $\widetilde{Y} \subset \mathcal{C}(D,\mathbb{K}^n)$, il est nécessaire d'introduire une topologie définie par une métrique, qui n'est pas une norme, ou bien définie par une suite de normes (espace vectoriel localement convexe).

EXERCICE Soient $a,b,\xi \in \mathbb{R}$ tels que $a < 0 < b$. Déterminer la solution du problème avec condition initiale

$$f' = f \quad \text{et} \quad f(0) = \xi$$

en utilisant la méthode de Picard-Lindelöf et la fonction constante égale à ξ comme fonction initiale.

12.7 Equations différentielles linéaires vectorielles du 1^e ordre : cas homogène

Soient J un intervalle de $\mathbb{R}$ et $A : J \longrightarrow \mathbb{M}_{\mathbb{K}}(n \times n)$, $b : J \longrightarrow \mathbb{K}^n$ des applications continues. L'équation différentielle

$$f' = Af + b$$

définie par

$$F : J \times \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^n : (t, z) \longmapsto A(t) z + b(t)$$

est dite *linéaire* . On dit qu'elle est *homogène* si $b = 0$ et *inhomogène* sinon.

La fonction F est évidemment localement lipschitzienne en z par le corollaire 12.2. Mieux, pour tout intervalle compact $[a, b] \subset J$, on a

$$|F(t, u) - F(t, v)| = |A(t) u - A(t) v| \leqslant \|A(t)\| \cdot |u - v| \leqslant q \cdot |u - v|$$

pour tout $t \in [a, b]$ et $u, v \in \mathbb{K}^n$, en ayant posé

$$q := \sup_{t \in [a,b]} \|A(t)\|$$

(cf. proposition 11.8). Grâce au corollaire 12.6, on obtient le

THEOREME *Pour tout $\tau \in J$ et $\xi \in \mathbb{K}^n$, le problème avec condition initiale*

$$f' = Af + b \quad \text{et} \quad f(\tau) = \xi \ ,$$

possède une unique solution définie sur J .

COROLLAIRE (Cas homogène) *Si pour tout $\xi \in \mathbb{K}^n$, $f_\xi : J \longrightarrow \mathbb{K}^n$ désigne l'unique solution du problème avec condition initiale*

$$f' = Af \quad \text{et} \quad f(\tau) = \xi \ ,$$

l'application

$$\mathbb{K}^n \longrightarrow \mathcal{C}^{(1)}(J, \mathbb{K}^n) : \xi \longmapsto f_\xi$$

est linéaire, injective et son image est l'ensemble des solutions de l'équation différentielle linéaire homogène $f' = Af$.

En particulier, cet ensemble est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^{(1)}(J, \mathbb{K}^n)$ de dimension n .

Pour tout $\xi, \eta \in \mathbb{K}^n$ et $\alpha \in \mathbb{K}$, on a

$$(\alpha \cdot f_\xi)' = \alpha \cdot f_\xi' = \alpha \cdot Af_\xi = A(\alpha \cdot f_\xi) \quad \text{et} \quad (\alpha \cdot f_\xi)(\tau) = \alpha \cdot f_\xi(\tau) = \alpha \cdot \xi \ ,$$

ce qui montre que

$$f_{\alpha \cdot \xi} = \alpha \cdot f_\xi \ .$$

De même

$$(f_\xi + f_\eta)' = f_\xi' + f_\eta' = Af_\xi + Af_\eta = A(f_\xi + f_\eta)$$

et

$$(f_\xi + f_\eta)(\tau) = f_\xi(\tau) + f_\eta(\tau) = \xi + \eta ,$$

donc

$$f_{\xi+\eta} = f_\xi + f_\eta .$$

Ceci montre que $\xi \longmapsto f_\xi$ est linéaire. Elle est injective, car si $f_\xi = 0$, on a

$$\xi = f_\xi(\tau) = 0 .$$

Finalement, si f est une solution de $f' = Af$, en posant $\xi := f(\tau)$, l'unicité montre que $f = f_\xi$. □

Si $(\varphi_j)_{j=1,\ldots,n}$ est une suite de $\mathcal{C}^{(1)}(J, \mathbb{K}^n)$, nous poserons

$$\Phi := (\varphi_1, \ldots, \varphi_n) : J \longrightarrow \mathbb{M}_{\mathbb{K}}(n \times n) : t \longmapsto (\varphi_1(t), .., \varphi_n(t)) .$$

On a

$$\Phi' = (\varphi_1', \ldots, \varphi_n') \quad \text{et} \quad A\Phi = (A\varphi_1, \ldots, A\varphi_n) ;$$

ceci montre que :

PROPOSITION *Les φ_j sont solutions de $f' = Af$ si, et seulement si, on a*

$$\Phi' = A\Phi .$$

Soit $\tau \in J$. Pour que $(\varphi_j)_{j=1,\ldots,n}$ soit une base de l'espace vectoriel des solutions de $f' = Af$, il faut et il suffit que $\Phi' = A\Phi$ et que les vecteurs $(\varphi_j(\tau))_{j=1,\ldots,n}$ soient linéairement indépendants, i.e. que

$$\det \Phi(\tau) \neq 0 .$$

C'est immédiat par l'injectivité (ou l'unicité), puisque φ_j est la solution associée à la condition initiale $\varphi_j(\tau)$. □

DEFINITION Si $(\varphi_j)_{j=1,\ldots,n}$ est une base de l'espace vectoriel des solutions de $f' = Af$, on dit que c'est un *système fondamental de solutions* . On dit que la fonction $\det \Phi$ est le *déterminant de Wronski* .

Par exemple, si $(e_j)_{j=1,\ldots,n}$ désigne la base canonique de $\mathbb{K}^n$, alors $(f_{e_j})_{j=1,\ldots,n}$ est évidemment un système fondamental de solutions, car on a

$$\Phi(\tau) = \mathrm{Id} .$$

REMARQUE La connaissance d'un système fondamental de solutions permet de représenter toute solution du problème avec condition initiale :

Si $\xi \in \mathbb{K}^n$, on a

$$f_\xi = \Phi \circ \Phi(\tau)^{-1} \xi .$$

En effet

$$\left[\Phi \circ \Phi(\tau)^{-1} \xi\right]' = \Phi' \circ \Phi(\tau)^{-1} \xi = A\Phi \circ \Phi(\tau)^{-1} \xi$$

et

$$\left[\Phi \circ \Phi(\tau)^{-1} \xi\right](\tau) = \Phi(\tau) \circ \Phi(\tau)^{-1} \xi = \xi \ .$$

□

EXERCICE Soient J un intervalle de $\mathbb{R}$, $\tau \in J$ et $A : J \longrightarrow \mathbb{M}_{\mathbb{K}}(n \times n)$ une application continue. On définit

$$B : J \longrightarrow \mathbb{M}_{\mathbb{K}}(n \times n) : t \longmapsto \int_{\tau}^{t} A(s)\, ds \ ,$$

et on suppose que

$$B(t)\, A(t) = A(t)\, B(t) \quad \text{pour tout } t \in J \ .$$

(a) Etant donné $M \in \mathbb{M}_{\mathbb{K}}(n \times n)$, montrer que la série

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} \cdot M^l$$

est convergente dans $\mathbb{M}_{\mathbb{K}}(n \times n)$. On désigne par $\exp(M)$ la somme de cette série.

(b) Montrer, pour tout $l \in \mathbb{N}$, que l'application

$$B^l : J \longrightarrow \mathbb{M}_{\mathbb{K}}(n \times n) : t \longmapsto B(t)^l$$

est dérivable et que

$$\partial B^l = l \cdot A \cdot B^{l-1} \ .$$

(c) Montrer que

$$\Phi : J \longrightarrow \mathbb{M}_{\mathbb{K}}(n \times n) : t \longmapsto \exp(B(t))$$

est un système fondamental de solutions de l'équation différentielle $f' = Af$.

(d) Si $T \in \mathbb{GL}_{\mathbb{K}}(n)$ montrer que, pour tout $t \in J$, on a

$$\overset{-1}{T} \Phi(t)\, T = \exp\left(\int_{\tau}^{t} \overset{-1}{T} A(s)\, T \ ds\right) \ .$$

(e) Comment peut-on déterminer un système fondamental de solutions de $f' = Af$ lorsque A est à coefficients constants, en utilisant ce qui précède ?

12.8 Equations différentielles linéaires vectorielles à coefficients constants

Nous étudions maintenant le cas où A est une fonction matricielle constante sur $\mathbb{R}$. Le spectre $\operatorname{Sp} A$ de A est l'ensemble des valeurs propres de A . Rappelons que $\lambda \in \mathbb{K}$ est une *valeur propre* de A si $A - \lambda \cdot \mathrm{Id}$ n'est pas inversible, i.e. si

$$\operatorname{Ker}(A - \lambda \cdot \mathrm{Id}) \neq \{0\} \ ,$$

ou encore si λ est un zéro du *polynôme caractéristique* , i.e.

$$\det(A - \lambda \cdot \mathrm{Id}) = 0 \ .$$

Pour tout $\mu \in \mathbb{K}$, il existe un plus petit entier $q(\mu) \in \mathbb{N}$ tel que

$$\operatorname{Ker}(A - \mu \cdot \mathrm{Id})^{q(\mu)+1} = \operatorname{Ker}(A - \mu \cdot \mathrm{Id})^{q(\mu)} \ ,$$

puisque

$$\operatorname{Ker}(A - \mu \cdot \mathrm{Id})^{q+1} = (A - \mu \cdot \mathrm{Id})^{-1} \left(\operatorname{Ker}[A - \mu \cdot \mathrm{Id}]^q\right) \ .$$

On a

$$\lambda \in \operatorname{Sp} A \quad \Longleftrightarrow \quad q(\lambda) > 0 \ .$$

On dit que $q(\lambda)$ est l' *ordre de* λ , que $\operatorname{Ker}(A - \lambda \cdot \mathrm{Id})$ est le *sous-espace propre* et que

$$v \in \operatorname{Ker}(A - \lambda \cdot \mathrm{Id}) \setminus \{0\}$$

est un *vecteur propre* associé à λ . L'entier $\dim \operatorname{Ker}(A - \lambda \cdot \mathrm{Id})$ s'appelle la *multiplicité géométrique* de λ .

On dit que $\operatorname{Ker}(A - \lambda \cdot \mathrm{Id})^{q(\lambda)}$ est le *sous-espace principal* et que

$$v \in \operatorname{Ker}(A - \lambda \cdot \mathrm{Id})^{q(\lambda)} \setminus \{0\}$$

est un *vecteur principal* associé à λ . L'entier $\dim \operatorname{Ker}(A - \lambda \cdot \mathrm{Id})^{q(\lambda)}$ s'appelle la *multiplicité algébrique* de λ .

On a le résultat fondamental suivant :

THEOREME *Si le polynôme caractéristique de A se décompose en facteurs linéaires dans $\mathbb{K}$, i.e.*

$$\det(A - \mu \cdot \mathrm{Id}) = \prod_{\lambda \in \operatorname{Sp} A} (\lambda - \mu)^{m(\lambda)} \ ,$$

par exemple si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, alors

$$\mathbb{K}^n = \bigoplus_{\lambda \in \operatorname{Sp} A} \operatorname{Ker}(A - \lambda \cdot \mathrm{Id})^{q(\lambda)} \quad \text{et} \quad m(\lambda) = \dim \operatorname{Ker}(A - \lambda \cdot \mathrm{Id})^{q(\lambda)} \ .$$

En particulier, il existe une base de $\mathbb{K}^n$ formée de vecteurs principaux $(v_{\lambda,k})_{\lambda \in \operatorname{Sp} K, k=1,\ldots,m(\lambda)}$.

Cf. Fischer, Lineare Algebra, p. 171-177 et 229-232. Pratiquement, on détermine les sous-espaces principaux, dans chacun d'eux on choisit une base et il n'est en général pas difficile de s'assurer qu'on a bien une base de $\mathbb{K}^n$.

PROPOSITION *Si v est un vecteur principal de A associé à la valeur propre λ , alors*

$$\varphi_v : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{K}^n : t \longmapsto e^{\lambda t} \cdot \sum_{j=0}^{q(\lambda)-1} \frac{t^j}{j!} \cdot (A - \lambda \cdot \mathrm{Id})^j \, v$$

est une solution du problème avec condition initiale

$$f' = Af \quad et \quad f(0) = v \ .$$

En effet, on a tout d'abord

$$\varphi_v'(t) = \lambda \cdot e^{\lambda t} \cdot \sum_{j=0}^{q(\lambda)-1} \frac{t^j}{j!} \cdot (A - \lambda \cdot \mathrm{Id})^j \, v + e^{\lambda t} \cdot \sum_{j=1}^{q(\lambda)-1} \frac{t^{j-1}}{(j-1)!} \cdot (A - \lambda \cdot \mathrm{Id})^j \, v \ .$$

Mais comme

$$(A - \lambda \cdot \mathrm{Id})^{j+1} = A\,(A - \lambda \cdot \mathrm{Id})^j - \lambda \cdot (A - \lambda \cdot \mathrm{Id})^j \ ,$$

il vient en particulier

$$A\,(A - \lambda \cdot \mathrm{Id})^{q(\lambda)-1} \, v - \lambda \cdot (A - \lambda \cdot \mathrm{Id})^{q(\lambda)-1} \, v = (A - \lambda \cdot \mathrm{Id})^{q(\lambda)} \, v = 0 \ ,$$

puis

$$\varphi_v'(t) = \lambda \cdot e^{\lambda t} \cdot \sum_{j=0}^{q(\lambda)-2} \frac{t^j}{j!} \cdot (A - \lambda \cdot \mathrm{Id})^j \, v + e^{\lambda t} \cdot \frac{t^{q(\lambda)-1}}{(q(\lambda)-1)!} \cdot A\,(A - \lambda \cdot \mathrm{Id})^{q(\lambda)-1} \, v$$

$$+ e^{\lambda t} \cdot \sum_{j=0}^{q(\lambda)-2} \frac{t^j}{j!} \cdot \left[A\,(A - \lambda \cdot \mathrm{Id})^j - \lambda \cdot (A - \lambda \cdot \mathrm{Id})^j \right] v =$$

$$= A e^{\lambda t} \cdot \sum_{j=0}^{q(\lambda)-1} \frac{t^j}{j!} \cdot (A - \lambda \cdot \mathrm{Id})^j \, v = A \varphi_v \ .$$

□

SCOLIE (Cas complexe) *Plus généralement considérons le cas où le polynôme caractéristique se décompose en facteurs linéaires dans $\mathbb{K}$.*

Le théorème montre qu'il existe une base $(v_{\lambda,k})_{\lambda \in \mathrm{Sp}\, A, k=1,\ldots,m(\lambda)}$ formée de vecteurs principaux. Les fonctions $\varphi_{\lambda,k} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{K}^n$ correpondantes forment donc un système fondamental de solutions de $f' = Af$, puisque

$$\det \Phi(0) = \det (v_{\lambda,k})_{\lambda,k} \neq 0 \ .$$

Pour résoudre la problème avec condition initiale

$$f' = Af \quad \text{et} \quad f(\tau) = \xi \ ,$$

on décompose ξ dans la base $(v_{\lambda,k})_{\lambda,k}$ sous la forme

$$\xi = \sum_{\lambda,k} c_{\lambda,k} \cdot v_{\lambda,k} \ .$$

Il est alors clair que

$$f := \sum_{\lambda,k} c_{\lambda,k} \cdot \varphi_{\lambda,k} (\cdot - \tau)$$

est la solution de ce problème, puisque

$$f(\tau) = \sum_{\lambda,k} c_{\lambda,k} \cdot \varphi_{\lambda,k}(0) = \sum_{\lambda,k} c_{\lambda,k} \cdot v_{\lambda,k} = \xi \ .$$

SCOLIE (Cas réel) *Nous supposons donc que la matrice A est réelle et que le polynôme caractéristique ne se décompose pas en facteurs linéaires sur $\mathbb{R}$.*

Considérons A comme une matrice complexe. Par la méthode précédente, on obtient un système fondamental de solutions complexes. Peut-on en déduire un système fondamental de solutions réelles ?

Pour toute valeur propre complexe λ de A , il en est de même de $\overline{\lambda}$, puisque le polynôme caractéristique a des coefficients réels, et on a $m(\lambda) = m\left(\overline{\lambda}\right)$. En outre, pour tout $v \in \mathbb{C}^n$, on a

$$(A - \lambda \cdot \mathrm{Id})^q v = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \left(A - \overline{\lambda} \cdot \mathrm{Id}\right)^q \overline{v} = 0 \ ,$$

où $\overline{v}$ désigne le vecteur ayant les composantes conjuguées à celles de v . Ceci montre que $q(\lambda) = q\left(\overline{\lambda}\right)$ et que

$$\mathrm{Ker}_{\mathbb{C}^n} (A - \lambda \cdot \mathrm{Id})^{q(\lambda)} \longrightarrow \mathrm{Ker}_{\mathbb{C}^n} \left(A - \overline{\lambda} \cdot \mathrm{Id}\right)^{q(\overline{\lambda})} : v \longmapsto \overline{v}$$

est une bijection.

Si λ est une valeur propre réelle, alors $\mathrm{Ker}_{\mathbb{C}^n} (A - \lambda \cdot \mathrm{Id})^{q(\lambda)}$ est stable par $v \longmapsto \overline{v}$ et la décomposition

$$v = \mathrm{Re}\, v + i \cdot \mathrm{Im}\, v \ ,$$

avec

$$\mathrm{Re}\, v := \frac{1}{2} \cdot (v + \overline{v}) \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}\, v := \frac{1}{2i} \cdot (v - \overline{v}) \ ,$$

montre que

$$\mathrm{Ker}_{\mathbb{C}^n} (A - \lambda \cdot \mathrm{Id})^{q(\lambda)} = \mathrm{Ker}_{\mathbb{R}^n} (A - \lambda \cdot \mathrm{Id})^{q(\lambda)} + i \cdot \mathrm{Ker}_{\mathbb{R}^n} (A - \lambda \cdot \mathrm{Id})^{q(\lambda)} \ ;$$

si l'on choisit une base $(v_{\lambda,k})_k$ de $\mathrm{Ker}_{\mathbb{R}^n} (A - \lambda \cdot \mathrm{Id})^{q(\lambda)}$, donc formée de vecteurs principaux réels, alors les solutions correspondantes sont évidemment réelles.

Si λ est une valeur propre complexe telle que $\mathrm{Im}\, \lambda > 0$ et si $(v_{\lambda,k})_k$ est une base de

$$\mathrm{Ker}_{\mathbb{C}^n} (A - \lambda \cdot \mathrm{Id})^{q(\lambda)} \ ,$$

alors $(\overline{v}_{\lambda,k})_k$ en est une de $\mathrm{Ker}_{\mathbb{C}^n} \left(A - \overline{\lambda} \cdot \mathrm{Id}\right)^{q(\overline{\lambda})}$. On vérifie alors immédiatement que

$$(\mathrm{Re}\, v_{\lambda,k})_k \cup (\mathrm{Im}\, v_{\lambda,k})_k$$

est une base de

$$\mathrm{Ker}_{\mathbb{C}^n} (A - \lambda \cdot \mathrm{Id})^{q(\lambda)} \oplus \mathrm{Ker}_{\mathbb{C}^n} \left(A - \overline{\lambda} \cdot \mathrm{Id}\right)^{q(\overline{\lambda})} \ ,$$

formée de vecteurs réels, mais qui ne sont plus des vecteurs principaux. Si $\varphi_{\overline{\lambda},k}$ est la solution correspondante à $\overline{v}_{\lambda,k}$, on a

$$\varphi_{\overline{\lambda},k} = \overline{\varphi}_{\lambda,k} \ .$$

Par linéarité, les fonctions correspondantes à $\operatorname{Re} v_{\lambda,k}$ et $\operatorname{Im} v_{\lambda,k}$ sont égales à

$$\operatorname{Re} \varphi_{\lambda,k} \quad \text{et} \quad \operatorname{Im} \varphi_{\lambda,k}$$

et sont des solutions réelles.

Nous avons ainsi construit une base de $\mathbb{K}^n$ formée de vecteurs réels ; les fonctions réelles correspondantes forment donc un système fondamental de solutions.

On résoud la problème avec condition initiale comme précédemment.

REMARQUE En construisant la base de vecteurs principaux dans $\operatorname{Ker}(A - \lambda \cdot \operatorname{Id})^{q(\lambda)}$, on les choisit successivement dans le plus petit noyau possible de la suite croissante

$$\left(\operatorname{Ker}(A - \lambda \cdot \operatorname{Id})^q\right)_{q=1,\ldots,q(\lambda)} .$$

Si $v \in \operatorname{Ker}(A - \lambda \cdot \operatorname{Id})^q$, alors

$$\varphi_v(t) = e^{\lambda t} \cdot \sum_{j=0}^{q-1} \frac{t^j}{j!} \cdot (A - \lambda \cdot \operatorname{Id})^j v .$$

EXEMPLE 1 Soit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} .$$

On a

$$\det(A - \mu \cdot \operatorname{Id}) = (-1 - \mu) \cdot (3 - \mu)^2 ,$$

donc $\operatorname{Sp} A = \{-1, 3\}$. Il vient

$$\operatorname{Ker}(A + \operatorname{Id}) = \mathbb{K} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ,$$

car

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \cdot z_1 \\ 0 \\ 4 \cdot z_3 \end{pmatrix} = 0$$

est équivalent à $z_1 = z_3 = 0$. De même

$$\operatorname{Ker}(A - 3 \cdot \operatorname{Id}) = \mathbb{K} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ,$$

car

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 16 \cdot z_2 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

est équivalent à $z_2 = z_3 = 0$. Finalement

$$\operatorname{Ker}(A - 3 \cdot \operatorname{Id})^2 = \mathbb{K} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{K} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} ,$$

car

$$\left(\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{array}\right)=\left(\begin{array}{c} 0 \\ 16\cdot z_2 \\ 0 \end{array}\right)=0$$

est équivalent à $z_2 = 0$. Ceci finit de montrer que la base canonique de $\mathbb{K}^3$ est formée de vecteurs principaux. Les trois fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$\varphi_{-1,1}(t) := e^{-t}\cdot\left(\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 0 \end{array}\right) \quad , \quad \varphi_{3,1}(t) := e^{3t}\cdot\left(\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right)$$

et

$$\varphi_{3,2}(t) := e^{3t}\cdot\left\{\left(\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 1 \end{array}\right)+t\cdot\left(\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 1 \end{array}\right)\right\}=e^{3t}\cdot\left\{\left(\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 1 \end{array}\right)+t\cdot\left(\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right)\right\}$$

forment donc un système fondamental de solutions.

EXEMPLE 2 Considérons le système d'équations différentielles linéaires

$$f_1' = f_2 \quad \text{et} \quad f_2' = -f_1 \ ,$$

i.e.

$$A=\left(\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{array}\right) .$$

On a

$$\det(A-\mu\cdot\mathrm{Id})=\mu^2+1 \ ,$$

donc

$$\mathrm{Sp}\,A=\{\pm i\} \ .$$

Il vient alors

$$\mathrm{Ker}\,(A-i\cdot\mathrm{Id})=\mathbb{C}\cdot\left(\begin{array}{c} 1 \\ i \end{array}\right) \ ,$$

car

$$\left(\begin{array}{cc} -1 & 1 \\ -1 & i \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} z_1 \\ z_2 \end{array}\right)=\left(\begin{array}{c} -i\cdot z_1+z_2 \\ -z_1-i\cdot z_2 \end{array}\right)=0$$

est équivalent à $z_2 = i\cdot z_1$. On en déduit que

$$\mathrm{Ker}\,(A+i\cdot\mathrm{Id})=\mathbb{C}\cdot\left(\begin{array}{c} 1 \\ -i \end{array}\right) .$$

On obtient donc un système fondamental de solutions complexes définies sur $\mathbb{R}$ en posant

$$\varphi_i(t)=e^{it}\cdot\left(\begin{array}{c} 1 \\ i \end{array}\right) \quad \text{et} \quad \varphi_{-i}(t)=e^{-it}\cdot\left(\begin{array}{c} 1 \\ -i \end{array}\right) .$$

On en déduit un système fondamental de solutions réelles en considérant

$$\mathrm{Re}\,\varphi_i(t)=\frac{1}{2}\cdot\left(e^{it}\cdot\left(\begin{array}{c} 1 \\ i \end{array}\right)+e^{-it}\cdot\left(\begin{array}{c} 1 \\ -i \end{array}\right)\right)=\left(\begin{array}{c} \cos t \\ -\sin t \end{array}\right)$$

et

$$\operatorname{Im} \varphi_i(t) = \frac{1}{2i} \cdot \left(e^{it} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} - e^{-it} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} .$$

EXERCICE 1 Etant donné $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $\xi \in \mathbb{R}^2$, déterminer la solution du problème avec condition initiale

$$f' = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} f \quad \text{et} \quad f(0) = \xi$$

dans les trois cas suivants : $\lambda < 0 < \mu$, $\lambda = \mu < 0$ et $\lambda < \mu < 0$. Décrire les trajectoires $f(\mathbb{R})$.

EXERCICE 2 Déterminer un système fondamental de solutions réelles des équations différentielles suivantes :

$$f' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix} f \quad \text{et} \quad f' = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} f .$$

12.9 Equations différentielles linéaires vectorielles du 1^e ordre : cas inhomogène

Soient J un intervalle de $\mathbb{R}$, $A : J \longrightarrow \mathbb{M}_{\mathbb{K}}(n \times n)$ et $b : J \longrightarrow \mathbb{K}^n$ des applications continues. Désignons par Σ_b le sous-ensemble de $\mathcal{C}^{(1)}(J, \mathbb{K}^n)$ des solutions de l'équation différentielle linéaire inhomogène $f' = Af + b$.

Il est clair que Σ_0 est le sous-espace vectoriel des solutions de l'équation différentielle linéaire homogène $f' = Af$ (cf. corollaire 12.7).

PROPOSITION *Soit $f_0 \in \Sigma_b$ une solution particulière de $f' = Af + b$. Pour que f soit solution de cette équation, il faut et il suffit que $f - f_0$ soit solution de $f' = Af$. En d'autres termes, on a*

$$\Sigma_b = f_0 + \Sigma_0 \ ,$$

et Σ_b est un sous-espace affine de $\mathcal{C}^{(1)}(J, \mathbb{K}^n)$.

C'est immédiat. □

Nous avons ainsi ramener la résolution de l'équation différentielle linéaire inhomogène d'une part à celle qui est homogène et d'autre part à la recherche d'une solution particulière de celle qui est inhomogène. Nous allons déterminer une telle solution en utilisant l'Ansatz appelé *méthode de la variation des constantes* .

Remarquons que toute solution de $f' = Af$ est de la forme

$$f = \sum_{j=1}^{n} v_j \cdot \varphi_j = \Phi v \quad \text{pour un } v \in \mathbb{K}^n \ ,$$

où $\Phi = \left(\varphi_j\right)$ désigne un système fondamental de solutions (cf. remarque 12.7). On définit

$$\overset{-1}{\Phi} : J \longrightarrow \mathbb{M}_{\mathbb{K}}(n \times n) : t \longmapsto \Phi(t)^{-1} \ ,$$

et on considère l'Ansatz

$$f = \Phi g$$

avec $g : J \longrightarrow \mathbb{K}^n$, i.e. $g = \overset{-1}{\Phi} f$. Il vient alors

$$f' = \Phi' g + \Phi g' = A\Phi g + \Phi g' = Af + \Phi g' \ ,$$

donc f est solution de $f' = Af + b$ si, et seulement si $\Phi g' = b$, i.e. $g' = \overset{-1}{\Phi} b$.

La fonction f_0 définie par

$$f_0(t) := \Phi(t) \int_{\tau}^{t} \Phi(s)^{-1} b(s) \, ds$$

est donc une solution particulière de $f' = Af + b$.

EXEMPLE Considérons le système d'équations différentielles linéaires inhomogènes

$$f_1' = f_2 + \cos \quad \text{et} \quad f_2' = -f_1 + \sin \ ,$$

i.e.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad b = \begin{pmatrix} \cos \\ \sin \end{pmatrix} .$$

D'après l'exemple 12.8.2, on a

$$\Phi = \begin{pmatrix} \cos & \sin \\ -\sin & \cos \end{pmatrix} \quad \text{, donc} \quad \overset{-1}{\Phi} = \Phi^{\mathsf{T}} .$$

Il vient alors

$$\int_0^t \begin{pmatrix} \cos & -\sin \\ \sin & \cos \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \\ \sin \end{pmatrix} = \int_0^t \begin{pmatrix} \cos^2 - \sin^2 \\ 2 \cdot \sin \cdot \cos \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin t \cdot \cos t \\ \sin^2 t \end{pmatrix} ,$$

et comme solution particulière on obtient

$$f_0(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin t \cdot \cos t \\ \sin^2 t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin t \\ 0 \end{pmatrix} .$$

La solution générale est donc de la forme

$$f(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sin t \\ 0 \end{pmatrix}$$

et on a

$$f(0) = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} .$$

12.10 Equations différentielles vectorielles d'ordre m

DEFINITION Soient D une partie de $\mathbb{R} \times (\mathbb{K}^n)^m$ et

$$G = (G_j)_{j=1,\ldots,n} : D \longrightarrow \mathbb{K}^n : (t, z_0, z_1, \ldots, z_{m-1}) \longmapsto G(t, z_0, z_1, .., z_{m-1}) \ .$$

On dit qu'une fonction $g = (g_j)_{j=1,\ldots,n} : J \longrightarrow \mathbb{K}^n$ définie sur un intervalle J de $\mathbb{R}$ est une *solution de l'équation différentielle (ordinaire vectorielle d'ordre m)* ou *du système d'équations différentielles (ordinaires d'ordre m)*

$$g^{(m)} = G\left(\cdot, g, g^{(1)}, .., g^{(m-1)}\right) \quad \text{ou bien} \quad g_j^{(m)} = G_j\left(\cdot, g, g^{(1)}, \ldots, g^{(m-1)}\right) \ ,$$

si g est m-fois dérivable et satisfait à

$$\left(t, g(t), g^{(1)}(t), .., g^{(m-1)}(t)\right) \in D \quad \text{et} \quad g^{(m)}(t) = G\left(t, g(t), g^{(1)}(t), .., g^{(m-1)}(t)\right)$$

pour tout $t \in J$.

Nous allons ramener cette équation différentielle d'ordre m à valeurs dans $\mathbb{K}^n$ à une équation différentielle du premier ordre, mais à valeurs dans $(\mathbb{K}^n)^m$. Posons

$$z := (z_0, z_1, \ldots, z_{m-1})^\intercal \in (\mathbb{K}^n)^m = \mathbb{K}^{n \cdot m} \ ,$$

avec $z_k \in \mathbb{K}^n$ pour $k = 0, \ldots, m-1$, et définissons

$$F := (F_k)_{k=0,\ldots,m-1} : D \longrightarrow (\mathbb{K}^n)^m$$

par

$$F_k(t, z) := z_{k+1} \quad \text{pour } k = 0, \ldots, m-2$$

et

$$F_{m-1}(t, z) := G(t, z) \ .$$

PROPOSITION

(i) *Si $g : J \longrightarrow \mathbb{K}^n$ est solution de*

$$g^{(m)} = G\left(\cdot, g, g^{(1)}, .., g^{(m-1)}\right) \ , \qquad (*)$$

alors $f := \left(g, g^{(1)}, \ldots, g^{(m-1)}\right)^\intercal : J \longrightarrow (\mathbb{K}^n)^m$ est solution de

$$f' = F(\cdot, f) \ . \qquad (**)$$

(ii) *Réciproquement, si $f : J \longrightarrow (\mathbb{K}^n)^m$ est solution de $(**)$, alors $g := f_0$ est solution de $(*)$.*

En effet, on a tout d'abord

$$f_k' = \left(g^{(k)}\right)' = g^{(k+1)} = f_{k+1} = F_k(\cdot, f) \quad \text{pour } k = 0, \ldots, m-2$$

et

$$f_{m-1}' = \left(g^{(m-1)}\right)' = g^{(m)} = G\left(\cdot, g, g^{(1)}, \ldots, g^{(m-1)}\right) = F_{m-1}(\cdot, f) \ .$$

Réciproquement, comme $g = f_0$ est dérivable, on a

$$g' = f_0' = F_0(\cdot, f) = f_1 \ .$$

Mais f_1 est aussi dérivable, donc g' l'est aussi, ce qui montre que g est deux fois dérivable et que

$$g'' = f_1' = F_1(\cdot, f) = f_2 \ .$$

Par récurrence, on en déduit que g est $(m-1)$-fois dérivable avec

$$g^{(m-1)} = f_{m-2}' = F_{m-2}(\cdot, f) = f_{m-1} \ ,$$

donc que g est m-fois dérivable avec

$$g^{(m)} = f_{m-1}' = F_{m-1}(\cdot, f) = G(\cdot, f) = G\left(\cdot, g, g^{(1)}, .., g^{(m-1)}\right) \ .$$

□

EXEMPLE Si x désigne la position d'un point matériel de masse m dans $\mathbb{R}^3$ soumi à un champ de forces dépendant du temps, de la position et de la vitesse

$$G : D \longrightarrow \mathbb{R}^3 : (t, x, v) \longmapsto G(t, x, v)$$

avec $D \subset \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^3)^2$, alors l'équation différentielle de Newton s'écrit

$$m \cdot \ddot{x} = G(t, x, \dot{x}) \ .$$

L'équation différentielle du premier ordre correspondante s'écrit

$$\begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} f_1 \\ \frac{1}{m} \cdot G(\cdot, f_0, f_1) \end{pmatrix} \ .$$

Le physicien écrit plus simplement

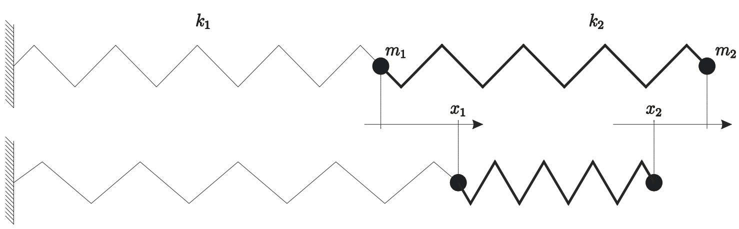
$$\dot{x} = v \quad \text{et} \quad \dot{v} = \frac{1}{m} \cdot G(\cdot, x, v) \ .$$

REMARQUE La formule

$$|F(t, u) - F(t, v)|^2 = |u_1 - v_1|^2 + \ldots + |u_{m-1} - v_{m-1}|^2 + |G(t, u) - G(t, v)|^2$$

montre que F satisfait à une condition de Lipschitz si, et seulement si, il en est de même pour G .

EXERCICE On considère deux ressorts de constantes k_1 et k_2 liés à deux masses ponctuelles de masse m_1 et m_2 de la manière suivante :



On mesure les déviations x_1 et x_2 des masses à partir de leur position de repos. Ce système mécanique est décrit par les équations différentielles

$$m_1 \cdot \ddot{x}_1 = -k_1 \cdot x_1 + k_2 \cdot (x_2 - x_1) \quad \text{et} \quad m_2 \cdot \ddot{x}_2 = -k_2 \cdot (x_2 - x_1) \ .$$

Déterminer un système fondamental de solutions réelles en utilisant les notations

$$\alpha := \frac{k_1}{m_1} \quad , \quad \beta := \frac{k_2}{m_2} \quad \text{et} \quad \gamma := \frac{k_2}{m_1} \; .$$

12.11 Equations différentielles linéaires d'ordre n

Une équation différentielle linéaire d'ordre n s'écrit en général sous la forme

$$g^{(n)} + a_{n-1} \cdot g^{(n-1)} + \ldots + a_0 \cdot g = b \qquad (*)$$

où

$$a_0, \ldots, a_{n-1}, b : J \longrightarrow \mathbb{K}$$

sont des fonctions continues définies sur un intervalle J de $\mathbb{R}$. En posant

$$f_0 = g \quad , \quad f_1 = g' \quad , \ldots , \quad f_{n-1} = g^{(n-1)} \ ,$$

on la ramène au système

$$f' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix} f + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ b \end{pmatrix} \ . \qquad (**)$$

Nous savons par la proposition 12.10 que l'application

$$g \longmapsto \left(g^{(k)}\right)^{\intercal}_{k=0,\ldots,n-1} : \Sigma_b^* \longrightarrow \Sigma_b^{**}$$

est une bijection de l'ensemble des solutions Σ_b^* de $(*)$ sur celui Σ_b^{**} de $(**)$. Comme cette application est linéaire, on en déduit en particulier par le corollaire 12.7 que l'ensemble Σ_0^* des solutions de l'équation différentielle homogène $(*)$ est un espace de dimension n et qu'une suite $\left(\varphi_j\right)_{j=1,\ldots,n}$ de solutions est une base de Σ_0^* si, et seulement si, on a

$$\det \begin{pmatrix} \varphi_1 & \cdots & \varphi_n \\ \varphi_1' & \cdots & \varphi_n' \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)} & \cdots & \varphi_n^{(n-1)} \end{pmatrix} (\tau) \neq 0$$

pour un certain $\tau \in J$. Dans ce cas, on dit que $\left(\varphi_j\right)_{j=1,\ldots,n}$ est un *système fondamental de solutions* de

$$g^{(n)} + a_{n-1} \cdot g^{(n-1)} + \ldots + a_0 \cdot g = 0 \ .$$

Par la proposition 12.9, si g_0 est une solution particulière de l'équation différentielle inhomogène $(*)$, alors

$$\Sigma_b^* = g_0 + \Sigma_0^* \ .$$

Ceci montre aussi que le bon problème avec conditions initiales est

$$g^{(n)} + a_{n-1} \cdot g^{(n-1)} + \ldots + a_0 \cdot g = b$$

et

$$g^{(k)}(\tau) = \xi_k \quad \text{pour } k = 0, \ldots, n-1$$

pour un $\tau \in J$ et $\xi \in \mathbb{K}^n$.

Considérons maintenant le cas où les coefficients a_k sont constants et désignons par $\Lambda \subset \mathbb{C}$ l'ensemble des racines et $m : \Lambda \longrightarrow \mathbb{N}^*$ la *fonction multiplicité* du *polynôme caractéristique*

$$P : \mu \longmapsto \mu^n + a_{n-1} \cdot \mu^{n-1} + \ldots + a_0 = \prod_{\lambda \in \Lambda} (\mu - \lambda)^{m(\lambda)} \ .$$

PROPOSITION *Les fonctions*

$$\psi_{\lambda,k} : t \longmapsto t^k \cdot e^{\lambda t} \ ,$$

pour $\lambda \in \Lambda$ *et* $k = 0, \ldots, m(\lambda) - 1$ *, forment un système fondamental de solutions de*

$$g^{(n)} + a_{n-1} \cdot g^{(n-1)} + \ldots + a_0 \cdot g = 0 \ .$$

Si A désigne la matrice du système $(**)$, on a

$$A - \lambda \cdot \mathrm{Id} = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\lambda & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} - \lambda \end{pmatrix} ,$$

donc en développant suivant la dernière ligne on obtient

$$\det(A - \mu \cdot \mathrm{Id}) = \sum_{k=0}^{n-2} (-1)^{n+k+1} \cdot (-a_k) \cdot (-\mu)^k + (-1)^{2n} \cdot (-a_{n-1} - \mu) \cdot (-\mu)^{n-1} =$$

$$= (-1)^n \cdot \prod_{\lambda \in \Lambda} (\mu - \lambda)^{m(\lambda)} \ .$$

D'après ce qui précède et la proposition 12.8, on obtient un système fondamental de solutions de la forme

$$\varphi_{\lambda,k} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} : t \longmapsto e^{\lambda t} \cdot p_{\lambda,k}(t)$$

pour $\lambda \in \Lambda$ et $k = 1, \ldots, m(\lambda)$, où $p_{\lambda,k}$ est un polynôme de degré $< q(\lambda) \leqslant m(\lambda)$. Le sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^{(n)}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ engendré par les $\varphi_{\lambda,k}$ est de dimension n et contenu dans celui qui est engendré par les $\psi_{\lambda,k}$, qui est de dimension

$$\leqslant \sum_{\lambda \in \Lambda} m(\lambda) = n \ .$$

Ils sont donc égaux et on en déduit, sans faire de calcul, que les $\psi_{\lambda,k}$ sont des solutions et qu'elles sont linéairement indépendantes. □

REMARQUE 1 Si les coefficients sont réels, on procède de la même manière qu'en 12.8. Si $\lambda \in \Lambda$ est réelle, alors $\psi_{\lambda,k}$ est réelle. Si $\lambda \in \Lambda$ est tel que $\mathrm{Im}\,\lambda > 0$, on considère les fonctions

$$t \longmapsto \mathrm{Re}\,\psi_{\lambda,k}(t) = t^k \cdot e^{\mathrm{Re}\,\lambda \cdot t} \cdot \cos(\mathrm{Im}\,\lambda \cdot t)$$

et

$$t \longmapsto \mathrm{Im}\,\psi_{\lambda,k}(t) = t^k \cdot e^{\mathrm{Re}\,\lambda \cdot t} \cdot \sin(\mathrm{Im}\,\lambda \cdot t) \ .$$

REMARQUE 2 L'équation inhomogène se résout en cherchant une solution particulière par la méthode de la variation des constantes du système $(**)$ associé. Il n'est pas possible de reformuler le résultat sous une forme simplifée ne faisant pas intervenir de matrice et qui soit utile. Il est préférable de faire un Ansatz judicieux !

12.12 Le procédé de réduction de d'Alembert

Nous allons montrer comment l'on peut ramener la résolution d'une équation différentielle linéaire de dimension n , dont on connait une solution particulière, à celle d'une équation différentielle linéaire de dimension $n-1$.

Soient donc $f' = Af$ cette équation différentielle linéaire définie sur J et désignons par $\varphi : J \longrightarrow \mathbb{K}^n$ cette solution particulière. On décompose $\mathbb{K}^n = \mathbb{K} \times \mathbb{K}^{n-1}$ et on écrit

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & b \\ a & B \end{pmatrix} \quad et \quad \varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \psi \end{pmatrix}$$

avec $a_{11}, \varphi_1 : J \longrightarrow \mathbb{K}$, $a, b^\intercal, \psi : J \longrightarrow \mathbb{K}^n$ et $B : J \longrightarrow \mathbb{M}_{\mathbb{K}}((n-1) \times (n-1))$. Pour tout $t \in J$, nous considérons $a(t)$ comme un vecteur-colonne et $b(t)$ comme un vecteur-ligne !

On considère un intervalle $I \subset J$ maximal tel que l'on ait $\varphi_1 \neq 0$ sur I . Nous allons déterminer toutes les solution de $f' = Af$ sur I en faisant l'Ansatz

$$f = \alpha \cdot \varphi + \begin{pmatrix} 0 \\ g \end{pmatrix}$$

avec $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{K}$ et $g : I \longrightarrow \mathbb{K}^{n-1}$. On a

$$f' = \alpha' \cdot \varphi + \alpha \cdot \varphi' + \begin{pmatrix} 0 \\ g' \end{pmatrix} = \alpha' \cdot \varphi + \alpha \cdot A\varphi + \begin{pmatrix} 0 \\ g' \end{pmatrix}$$

et

$$Af = \alpha \cdot Af + A \begin{pmatrix} 0 \\ g \end{pmatrix} ,$$

donc f est solution de $f' = Af$ si, et seulement si, α et g sont solutions de

$$\alpha' \cdot \varphi + \begin{pmatrix} 0 \\ g' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 0 \\ g \end{pmatrix} ,$$

i.e.

$$\alpha' \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \psi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ g' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & b \\ a & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} bg \\ Bg \end{pmatrix} .$$

Attention bg est le produit matriciel d'un vecteur-ligne par un vecteur-colonne. On peut l'écrire comme un produit scalaire $(b^\intercal | g)$. Cela est équivalent à

$$\alpha' = \frac{bg}{\varphi_1} \quad \text{et} \quad \alpha'\psi + g' = Bg ,$$

donc à

$$\alpha' = \frac{bg}{\varphi_1} \quad \text{et} \quad g' = Bg - \frac{bg}{\varphi_1} \cdot \psi = \tilde{B}g ,$$

en ayant posé

$$\tilde{B} := B - \frac{1}{\varphi_1} \cdot (b_j \cdot \psi)_{j=1,\ldots,n-1} = \left(a_{j,k} - \frac{1}{\varphi_1} \cdot a_{1,j} \cdot \varphi_k \right)_{j,k=2,\ldots,n-1} .$$

EXERCICE 1 Déterminer toutes les solutions de l'équation différentielle

$$\mathrm{id}^2 \cdot (1 + \mathrm{id}) \cdot f'' + 2 \cdot \mathrm{id} \cdot (2 + \mathrm{id}) \cdot f' + 2 \cdot (1 - \mathrm{id}) \cdot f = \mathrm{id}^2$$

sur $\mathbb{R}_+^*$. On remarquera que cette équation différentielle possède une solution particulière de la forme id^β .

EXERCICE 2 Déterminer un système fondamental de l'équation différentielle

$$f' = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\mathrm{id}} & 1 \\ -\frac{3}{\mathrm{id}^2} & \frac{1}{\mathrm{id}} \end{pmatrix} f$$

en sachant qu'il existe une solution dont la deuxième composante est constante.

12.13 Equations différentielles linéaires d'ordre 2

Les quatre exemples suivants sont importants pour les applications en physique.

Equation différentielle de Legendre

$$\left(1-\mathrm{id}^2\right)\cdot f''-2\cdot\mathrm{id}\cdot f'+n\cdot(n+1)\cdot f=0\quad\text{sur }\left]-1,1\right[$$

avec $n\in\mathbb{N}$.

Le *polynôme de Legendre* de degré n défini par

$$P_n:=\frac{1}{2^n\cdot n!}\cdot\partial^n\left[\left(\mathrm{id}^2-1\right)^n\right]$$

est une solution.

Equation différentielle de Hermite

$$f''-2\cdot\mathrm{id}\cdot f'+2\cdot n\cdot f=0\quad\text{sur }\mathbb{R}$$

avec $n\in\mathbb{N}$.

Le *polynôme d'Hermite* de degré n défini par

$$H_n:=(-1)^n\cdot e^{\mathrm{id}^2}\cdot\partial^n\left[e^{-\mathrm{id}^2}\right]$$

est une solution.

Equation différentielle de Laguerre

$$\mathrm{id}\cdot f''+(1-\mathrm{id})\cdot f'+n\cdot f=0\text{ sur }\mathbb{R}_+^*$$

avec $n\in\mathbb{N}$.

Le *polynôme de Laguerre* de degré n défini par

$$L_n:=e^{\mathrm{id}}\cdot\partial^n\left[\mathrm{id}^n\cdot e^{-\mathrm{id}}\right]$$

est une solution.

Equation différentielle de Bessel

$$\mathrm{id}^2\cdot f''+\mathrm{id}\cdot f+\left(\mathrm{id}^2-\nu\right)\cdot f=0\quad\text{sur }\mathbb{R}_+^*$$

avec $\nu\in\mathbb{R}_+$.

Comme solution on a par exemple la *fonction de Bessel* J_ν définie par

$$J_\nu:=\frac{\left(\frac{1}{2}\cdot t\right)^\nu}{\sqrt{\pi}\cdot\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\cdot\int_0^\pi\cos\left(t\cdot\cos\theta\right)\cdot\sin^{2\nu}\theta\,d\theta=$$

$$=\frac{2\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot t\right)^\nu}{\sqrt{\pi}\cdot\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\cdot\int_0^1\left(1-s^2\right)^{\nu-\frac{1}{2}}\cdot\cos\left(t\cdot s\right)\,ds\ .$$

Pour déterminer une seconde solution linéairement indépendante de l'équation différentielle linéaire du seconde ordre on peut utiliser la méthode de réduction de D'Alembert, qui revient à faire l'Ansatz

$$f=\varphi\cdot g\ .$$

PROPOSITION *Soient J un intervalle de $\mathbb{R}$, $a, b : J \longrightarrow \mathbb{K}$ des fonctions continues, φ une solution de l'équation différentielle linéaire homogène du second ordre*

$$f'' + a \cdot f' + b \cdot f = 0 \tag{$*$}$$

définie sur J , I un intervalle maximal contenu dans J sur lequel on a $\varphi \neq 0$ et $\tau \in I$.

Alors

$$f_\tau : t \longmapsto \varphi(t) \cdot \int_\tau^t \frac{1}{\varphi^2(s)} \cdot \exp\left(-\int_\tau^s a\right) ds : I \longrightarrow \mathbb{K}$$

est une solution linéairement indépendante de φ sur I .

On voit immédiatement que f est solution de $(*)$ si, et seulement si, g est solution de

$$\varphi \cdot g'' + (2 \cdot \varphi' + a \cdot \varphi) \cdot g' = 0 \ . \tag{$**$}$$

Il est clair que

$$h_\tau := \frac{1}{\varphi^2} \cdot \exp\left(-\int_\tau^\cdot a\right) : I \longrightarrow \mathbb{K}$$

est une solution $\neq 0$ de

$$\varphi \cdot h' + (2 \cdot \varphi' + a \cdot \varphi) \cdot h = 0 \ ,$$

donc

$$g_\tau := \int_\tau^\diamond h_\tau$$

est solution de $(**)$. La proposition en découle, car $f_\tau := \varphi \cdot g_\tau$ est évidemment une solution de $(*)$ et si elle dépendait linéairement de φ , on aurait $f_\tau = c \cdot \varphi$ avec $c \in \mathbb{K}$, donc

$$g_\tau = c \quad \text{, i.e.} \quad h_\tau = g_\tau' = 0 \ ,$$

ce qui est absurde. □

EXERCICE 1 On utilise les notations de la proposition. Soit ζ un zéro de φ , i.e. une extrémité de I . Montrer en utilisant le théorème d'unicité que

(a) φ est strictement monotone, donc change de signe au voisinage de ζ .

(b) f_τ se prolonge par continuité à ζ .

(c) f_τ ne s'annule pas en ζ .

EXERCICE 2 Soient $f, g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ des fonctions k-fois dérivables. Démontrer la formule de dérivation de Leibniz

$$(f \cdot g)^{(k)} = \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} \cdot f^{(l)} \cdot g^{(k-l)} \ .$$

En calculant

$$\partial^{n+2}\left[\left(\mathrm{id}^2 - 1\right)^{n+1}\right] = \partial^{n+1}\left(\partial\left[\left(\mathrm{id}^2 - 1\right)^{n+1}\right]\right) = \partial^{n+2}\left[\left(\mathrm{id}^2 - 1\right) \cdot \left(\mathrm{id}^2 - 1\right)^n\right]$$

de deux manières différentes, montrer que le polynôme de Legendre est solution de l'équation différentielle de Legendre.

12.14 Equation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants

Nous l'écrirons sous la forme

$$f'' + 2k \cdot f' + \omega_0^2 \cdot f = a \ ,$$

où $k, \omega_0 \in \mathbb{R}_+$ et $a : J \longrightarrow \mathbb{C}$ est une fonction continue. C'est l'*équation différentielle d'un oscillateur amorti entretenu* . On dit que k est le *coefficient d'amortissement* et ω_0 la *fréquence propre* du système. Nous verrons que c'est la fréquence de l'oscillation sans amortissement.

Les racines du polynôme charactéristique $P(\mu) := \mu^2 + 2k \cdot \mu + \omega_0^2$ sont

$$-k \pm \sqrt{k^2 - \omega_0^2} \ .$$

Equation différentielle homogène Utilisant les résultats de 12.11, on peut immédiatement citer un système fondamental de solutions (φ_1, φ_2) sur $\mathbb{R}$. Il nous faut distinguer les quatre cas suivants :

(a) $k = 0$ et $\omega_0 \neq 0$: *Oscillation de fréquence propre* ω_0 .

$$\varphi_1(t) := \cos \omega_0 t \quad \text{et} \quad \varphi_2(t) := \sin \omega_0 t$$

(b) $0 < k < \omega_0$: *Oscillation amortie* .

$$\varphi_1(t) := e^{-kt} \cdot \cos \omega t \quad \text{et} \quad \varphi_2(t) := e^{-kt} \cdot \sin \omega t$$

de fréquence $\omega := \sqrt{\omega_0^2 - k^2} < \omega_0$.

(c) $k = \omega_0$: *Oscillation apériodique limite* .

$$\varphi_1(t) := e^{-kt} \quad \text{et} \quad \varphi_2(t) := t \cdot e^{-kt} \ .$$

(d) $k > \omega_0$: *Oscillation apériodique* .

$$\varphi_1(t) := e^{-(k+d) \cdot t} \quad \text{et} \quad \varphi_2(t) := e^{-(k-d) \cdot t}$$

avec $d := \sqrt{k^2 - \omega_0^2}$. On a $k \pm d > 0$.

Equation différentielle inhomogène Nous allons considérer le problème avec conditions initiales particulier suivant :

$$f'' + 2k \cdot f' + \omega_0^2 \cdot f = a \cdot \cos \omega_1 t \quad \text{et} \quad f(0) = f'(0) = 0 \tag{$*$}$$

avec $0 \leqslant k < \omega_0$ et $a \neq 0$.

Commençons par chercher une solution particulière de la forme

$$f(t) = c \cdot e^{\mu t}$$

de l'équation différentielle

$$f'' + 2k \cdot f' + \omega_0^2 \cdot f = a \cdot e^{i\omega_1 t} \ . \tag{$**$}$$

Il suffit que l'on ait

$$c \cdot P(\mu) \cdot e^{\mu t} = a \cdot e^{i\omega_1 t} \ .$$

Il nous faut tout d'abord supposer que l'on a

$$P(i\omega_1) = -\omega_1^2 + 2k\omega_1 \cdot i + \omega_0^2 \neq 0 \ ,$$

i.e. que $k \neq 0$ ou $\omega_1 \neq \omega_0$. On obtient alors une solution particulière de $(**)$ en prenant

$$\mu := i \cdot \omega_1 \quad \text{et} \quad c := \frac{a}{\omega_0^2 - \omega_1^2 + 2k\omega_1 \cdot i} \ .$$

Comme les coefficients de $(*)$ sont réels, on en déduit une solution particulière (seulement de l'équation différentielle) en posant

$$f_0(t) := \operatorname{Re} \frac{a \cdot e^{i\omega_1 t}}{\omega_0^2 - \omega_1^2 + 2k\omega_1 \cdot i} = \operatorname{Re} \frac{a \cdot (\omega_0^2 - \omega_1^2 - 2k\omega_1 \cdot i) \cdot e^{i\omega_1 t}}{(\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + (2k\omega_1)^2} =$$

$$= \frac{a}{(\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + (2k\omega_1)^2} \cdot \left((\omega_0^2 - \omega_1^2) \cdot \cos \omega_1 t + 2k\omega_1 \cdot \sin \omega_1 t\right) \ .$$

La solution de notre problème avec conditions initiales $(*)$ est donc

$$f = f_0 - f_0(0) \cdot \varphi_1 - \frac{k \cdot f_0(0) + f_0'(0)}{\omega} \cdot \varphi_2 \ ,$$

puisque

$$\varphi_1(0) = 1 \quad , \quad \varphi_1'(0) = -k \quad \text{et} \quad \varphi_2(0) = 0 \quad , \quad \varphi_2'(0) = \omega \ .$$

Les deux cas particuliers suivants sont intéressants :

(a) $k = 0$ et $\omega_1 \neq \omega_0$. La solution est alors

$$f(t) = \frac{a}{\omega_0^2 - \omega_1^2} \cdot (\cos \omega_1 t - \cos \omega_0 t) =$$

$$= \frac{2a}{\omega_0^2 - \omega_1^2} \cdot \sin\left(\frac{\omega_0 + \omega_1}{2} \cdot t\right) \cdot \sin\left(\frac{\omega_0 - \omega_1}{2} \cdot t\right) \ .$$

Si $\omega_1 \simeq \omega_0$, on a battement :

$$f(t) \simeq \frac{2a}{\omega_0^2 - \omega_1^2} \cdot \sin\left(\frac{\omega_0 - \omega_1}{2} \cdot t\right) \cdot \sin(\omega_0 \cdot t) \ .$$

L'amplitude $\frac{2a}{\omega_0^2 - \omega_1^2} \cdot \sin\left(\frac{\omega_0 - \omega_1}{2} \cdot t\right)$ est modulée de grande période.

(b) $\omega_1 = \omega_0$ et $k > 0$. On a presque résonnance . La solution est

$$f_k(t) = \frac{a}{2k} \cdot \left(\frac{1}{\omega_0} \cdot \sin \omega_0 t - \frac{1}{\omega} \cdot e^{-kt} \cdot \sin \omega t\right) \ .$$

Si k est petit, on a $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - k^2} \simeq \omega_0$ et l'amplitude $\frac{a}{2k}$ est grande. Pour des temps t proche de 0 les deux termes se compensent presque et $f_k(t)$ est petit, ce qui n'est plus le cas lorsque t est grand, puisque le second terme tend vers 0 .

Comme exemple concret on peut citer la destruction le 7.11.1940 du pont suspendu américain de Tacoma inauguré le 1.7.1940 !

Reste le cas $P(i\omega_1) = 0$, i.e. $k = 0$ et $\omega_1 = \omega_0$. On a résonnance . La solution est

$$f(t) = \frac{a}{2\omega_0} \cdot t \cdot \sin\ \omega_0 t \ .$$

Dans ce cas l'amplitude diverge avec t .

Remarquons que par la règle de l'Hospital, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$f(t) = \lim_{k \to 0} f_k(t) \ .$$

12.15 Théorème d'existence locale

THEOREME *Soit $F : D \longrightarrow \mathbb{K}^n$ une application continue et localement lipschitzienne en z définie sur une partie ouverte D de $\mathbb{R} \times \mathbb{K}^n$.*

Le problème avec condition initiale

$$f' = F(\cdot, f) \quad et \quad f(\tau) = \xi$$

possède localement une unique solution, i.e. pour tout $(\tau, \xi) \in D$, il existe un intervalle $[a, b]$ tel que $\tau \in \left]a, b\right[$ et une fonction $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{K}^n$ solution de ce problème.

Soit V une voisinage de (τ, ξ) tel que F soit q-lipschitzienne en z dans V , pour un certain $q \in \mathbb{R}_+$, et que

$$|F(t, z)| \leqslant |F(\tau, \xi)| + 1 =: M \quad \text{pour tout } (t, z) \in V \ .$$

Soit alors $[a, b]$ un intervalle tel que $\tau \in \left]a, b\right[$ et

$$\widetilde{D} := \{(t, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{K}^n \mid |z - \xi| \leqslant M \cdot |t - \tau| \text{ pour tout } t \in [a, b]\} \subset V \ .$$

Les hypothèses (i) et (ii) du théorème de Picard-Lindelöf 12.6 sont évidemment satisfaites. Remarquons que $Y_\tau = \{\xi\}$. Pour toute fonction continue $g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{K}^n$ telle que $\mathrm{Gr}\, g \subset \widetilde{D}$, on a $g(\tau) = \xi$ et

$$|\Phi(g)(t) - \xi| = \left|\int_\tau^t F(s, f(s))\, ds\right| \leqslant M \cdot |t - \tau| \quad \text{pour tout } t \in [a, b] \ ,$$

ce qui montre que $\mathrm{Gr}\, \Phi(g) \subset \widetilde{D}$. Ceci prouve que (iii) est aussi satisfaite, d'où le résultat, l'unicité découlant du théorème 12.3. □

COROLLAIRE *Pour tout $(\tau, \xi) \in D$, il existe une solution maximale $f : J \longrightarrow \mathbb{K}^n$ du problème avec condition initiale*

$$f' = F(\cdot, \xi) \quad et \quad f(\tau) = \xi \ ,$$

i.e. telle que pour toute autre solution $g : I \longrightarrow \mathbb{K}^n$ de ce problème, on ait $I \subset J$ et $g = f_{|I}$.

Cette solution va dans D d'un bord à l'autre, i.e. $f(t)$ ne converge pas dans D lorsque t tend vers $\inf J$ *ou* $\sup J$ *. En particulier J est un intervalle ouvert.*

On considère l'ensemble S de toute les solutions de ce problème. Le théorème montre qu'il est non-vide. Si $g, h \in S$ sont définies sur I_g et I_h respectivement, le théorème d'unicité 12.3 montre que g et h coïncident sur $I_g \cap I_h$. Ceci nous permet de définir

$$f : J := \bigcup_{g \in S} I_g \longrightarrow \mathbb{K}^n \quad \text{par } f(t) = g(t) \text{ si } t \in I_g \ .$$

Il est clair que J est un intervalle et que f est solution maximale du problème.

Si $(\sigma, \zeta) := \lim_{t \to \inf J} f(t)$ existe dans D , alors $\sigma = \inf J$ et le théorème montre que l'on peut prolonger f , ce qui contredit la maximalité de f . On procède de la même manière pour $\sup J$, d'où notre assertion.

REMARQUE On montre immédiatement que les graphes des solutions maximales de l'équation différentielle forment une partition de D .